Étude arithmétique et dynamique de suites algorithmiques

Ce travail est consacré à l'étude arithmétique et dynamique de suites algorithmiques en dimension 1 et en dimension supérieure : nous considérons d'une part les suites sturmiennes et leurs généralisations, et d'autre part les suites substitutives. Le texte préliminaire donne le cadre général. Il est suivi par les articles décrits ci-dessous. Les références données entre crochets correspondent à la bibliographie qui se trouve à la fin de ce chapitre.

- Nous étudions dans le premier [30] une mesure du désordre liée à l'entropie métrique pour des suites à valeurs dans un alphabet fini ainsi que les liens entre cette mesure et les quasi-cristaux. Pour cela, nous calculons les fréquences des facteurs de certaines suites automatiques.
- Nous étudions la fonction de complexité du triangle de Pascal réduit modulo un entier dans le second [9].
- Ce travail se poursuit dans le troisième article [33] par l'étude de la complexité de suites doubles engendrées par un automate cellulaire linéaire.
- Nous étudions dans le quatrième article les propriétés de certains développements en fraction continue pour des séries formelles à coefficients dans un corps fini [36]. Nous nous intéressons en particulier à l'équivalence modulaire, ainsi qu'aux propriétés métriques, comme la réalisation d'une extension naturelle.
- Nous considérons dans [32] les fréquences des facteurs des suites sturmiennes. Ces fréquences sont au nombre de 3 pour les facteurs de longueur donnée et sont données par le théorème des trois longueurs.
- Plus généralement, nous étudions les liens qui existent entre la combinatoire des mots et certaines généralisations du théorème des trois longueurs dans le cinquième article [2].
- Le septième article [35] fournit une application ergodique de ces théorèmes aux nombres de recouvrement pour des codages de rotation.
- Nous introduisons dans le huitième article [37] une généralisation des suites sturmiennes. Cette généralisation est définie par l'approximation discrète d'un plan, ou de manière équivalente, comme un codage d'une $\mathbb{Z}^2$-action sur le cercle unité, définie par deux rotations irrationnelles.

– Nous donnons une caractérisation de ces suites en termes relevant de leurs fonctions de complexité dans [38]. Plus généralement, nous étudions les suites doubles dont le langage des facteurs en ligne est sturmien.

– Nous les caractérisons également par les propriétés de symétrie de leurs facteurs rectangulaires, généralisant les propriétés de palindromie des facteurs des suites sturmiennes dans [39].

– Enfin, nous montrons que ces suites sont obtenues en "itérant" des substitutions à deux dimensions gouvernées par l'algorithme de Jacobi-Perron [21].

Introduction

Table des matières

Une mesure classique du désordre pour une suite à valeurs dans un alphabet fini, consiste à compter le nombre $p(n)$ de facteurs de longueur n. On définit ainsi une fonction p appelée fonction de complexité. Cette fonction permet de caractériser en particulier les suites périodiques (ce sont les suites pour lesquelles il existe un entier n tel que $p(n) \leq n$), ainsi que certaines suites de basse complexité, comme les suites de complexité $n+1$. Celles-ci sont appelées suites sturmiennes et possèdent la particularité remarquable de pouvoir être étudiées tant d'un point de vue combinatoire qu'arithmétique : elles sont en effet obtenues comme des codages de rotation irrationnelle sur le cercle unité. Les paragraphes 1 et 2 leur sont consacrés. Les suites substitutives constituent une deuxième famille classique de suites unidimensionnelles de basse complexité. Nous étudions en particulier les substitutions de longueur constante au paragraphe 3.

On ne connaît pas, à l'heure actuelle, de condition suffisante exprimée en fonction de la complexité, garantissant la périodicité d'une suite double donnée (c'est-à-dire l'invariance par translation). (Une telle condition ne pourrait être une caractérisation, puisqu'il existe des suites périodiques de complexité arbitrairement grande.) Néanmoins, le résultat suivant est généralement conjecturé : s'il existe un couple d'entiers (m, n) tels que $P(m, n) \leq mn$, où la fonction de complexité $P(m, n)$ compte le nombre de facteurs rectangulaires de taille (m, n), alors cette suite est périodique.

Le paragraphe 4 est consacré aux suites doubles de basse complexité, où par basse complexité, on entend une complexité proche de la fonction conjecturée dans le cas périodique. Cette étude ne se veut pas exhaustive : le choix des exemples considérés ici est inspiré par leur pertinence dans le cadre unidimensionnel. On considère en particulier des suites doubles engendrées par automates cellulaires linéaires (paragraphe 3.5), ainsi que des suites obtenues en codant une $\mathbb{Z}^2$-action, définie sur le cercle unité par deux rotations irrationnelles. Cette dernière famille généralise les suites sturmiennes, tout en produisant des exemples de suites doubles substitutives, où la substitution sous-jacente associe aux lettres des motifs non rectangulaires.

0 Quelques définitions

Le but de ce paragraphe est d'introduire brièvement quelques notions dynamiques et combinatoires. Pour plus d'informations, on peut par exemple consulter l'incontournable [162].

0.1 Systèmes dynamiques symboliques

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé **alphabet**. On peut faire agir sur l'ensemble des suites unidirectionnelles $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ou bidirectionnelles $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'application de **décalage** T qui à la suite $(u_n)_n$ associe la suite $(u_{n+1})_n$. Travaillons par exemple avec $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Munissons $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ du produit des topologies discrètes. Soit $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. La suite u engendre alors le **système dynamique symbolique** $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$, où $\overline{\mathcal{O}(u)}$ est l'adhérence de l'orbite sous l'action du décalage T de la suite u dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Plus généralement, on appelle système dynamique symbolique l'action du décalage sur un fermé invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

De nombreuses propriétés combinatoires de la suite u se traduisent en termes dynamiques. On appelle **facteur** de la suite infinie u un bloc fini w de lettres apparaissant de manière consécutive dans la suite : $w = u_{n+1} \cdots u_{n+d}$; d est appelé la longueur de w et est noté $|w|$. Une suite est dite **récurrente** si chacun de ses facteurs apparaît une infinité de fois. Le décalage est alors surjectif sur $\overline{\mathcal{O}(u)}$. Une suite est dite **uniformément récurrente** si les lacunes entre deux occurrences d'un même facteur sont bornées. Il n'est alors pas difficile de montrer que le système $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$ est **minimal** (c'est-à-dire qu'il ne contient pas de fermé invariant non trivial) si et seulement si la suite u est uniformément récurrente (voir par exemple [162]). C'est pour cette raison que les suites "uniformément récurrentes" sont également appelées "suites minimales".

Il est intéressant de munir d'une mesure T-invariante le système dynamique topologique $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$. (Une mesure de probabilité borélienne μ est dite T-invariante si $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$, pour tout borélien B.) La connaissance des fréquences de blocs de la suite u permet ainsi de définir une telle mesure. La **fréquence** $f(w)$ du facteur w est définie comme la limite (si elle existe) du quotient du nombre d'occurrences de ce facteur dans les n premiers termes de la suite, par n. On suppose que les fréquences de tous les facteurs existent. On définit alors une mesure de probabilité μ sur la famille $\mathcal{B}$ des boréliens de $\overline{\mathcal{O}(u)}$, de la manière suivante : la mesure μ est l'unique mesure de probabilité invariante par T, telle que $\mu([w]) = f(w)$, où $[w]$ est le cylindre des suites de $\overline{\mathcal{O}(u)}$ de préfixe w et où $f(w)$ est la fréquence d'apparition du bloc w dans la suite u. En effet, les cylindres sont à la fois ouverts et fermés et engendrent la topologie; il suffit alors d'appliquer le théorème de compatibilité de Daniell-Kolmogorov (voir par exemple [197]).

La plupart des systèmes que nous considérerons sont uniquement ergodiques : un système dynamique est **uniquement ergodique**, s'il existe une unique mesure de probabilité T-invariante. D'où l'intérêt de l'étude des fréquences des facteurs qui permet de définir explicitement cette unique mesure T-invariante.

Notons qu'il existe des suites minimales qui engendrent des systèmes non uniquement ergodiques; dans un tel cas, la fréquence des facteurs peut ne pas exister.

0.2 Fonction de complexité

La fonction de complexité est un outil très utile à l'étude des suites et des systèmes dynamiques symboliques. Soit $u = (u_n)_n$ une suite à valeurs dans l'alphabet fini $\mathcal{A}$. On appelle **fonction de complexité** de u, et l'on note p, la fonction (définie sur les entiers) qui compte le nombre de facteurs de u de longueur donnée :

$$p(n) = \mathrm{Card}\{w;\ w \text{ est facteur de } u \text{ et } |w| = n\}.$$

Pour plus d'informations sur la fonction de complexité, voir par exemple les survols [8, 99]. Notons que l'ordre de croissance de la fonction de complexité est une caractéristique fondamentale de la suite. C'est en particulier un invariant topologique (voir par exemple [99]) : une conjugaison **topologique** entre deux systèmes dynamiques topologiques (X, T) et (Y, S) est une bijection bicontinue ϕ telle que $\phi T = S\phi$; or on voit sans trop de difficultés qu'une conjugaison topologique entre deux systèmes dynamiques symboliques est un code fini : il existe un entier r tel que $(\phi(x))_i$ ne dépend que de $(x_i \dots x_{i+r})$. Pour plus de détails, voir le cours [100]. Néanmoins la complexité n'est pas invariante par isomorphisme mesuré. Pour une notion de complexité dont l'ordre de croissance est invariant par isomorphisme mesuré, voir [97]. Voir également [101, 129, 178], pour différentes notions de complexité pour des mots finis, qui permettent par exemple d'obtenir de l'information sur le langage de suites infinies à travers l'étude de la complexité de leurs préfixes.

La fonction de complexité permet de caractériser les suites périodiques. On a en effet le résultat classique suivant (voir [153, 68]) :

$$\exists n, \quad p(n) \leq n \Longleftrightarrow \exists C, \ \forall n \quad p(n) \leq C \Longleftrightarrow u \text{ est périodique.}$$

Plus précisément, si la suite u est unidirectionnelle, c'est-à-dire indexée par $\mathbb{N}$, la suite est alors **ultimement périodique** ($\exists n_0, \ \exists T > 0, \ \forall n \geq n_0, \ u_{n+T} = u_n$) et si la suite u est bidirectionnelle, c'est-à-dire indexée par $\mathbb{Z}$, la suite est **strictement périodique** ($\exists T > 0, \ \forall n, \ u_{n+T} = u_n$). La preuve de ce résultat repose sur le fait que s'il existe n tel que $p(n) \leq n$, alors il existe n_0 tel que $p(n_0+1) = p(n_0)$, et tout facteur de longueur n_0 admet une unique extension (on appelle **extension** d'un facteur w une lettre x telle que wx est aussi facteur). Pour tout entier $k \geq 1$, le "futur" de la suite, c'est-à-dire $(u_m)_{m \geq k}$, est donc déterminé par la donnée de $u_{k-n_0} \dots u_{k-1}$. Il suffit de considérer un facteur de longueur n_0 qui apparaît deux fois dans la suite pour en déduire la périodicité. Notons que la période est alors inférieure ou égale à n_0.

Rappelons la définition de **l'entropie topologique** $h(u)$ d'une suite u, ou plus généralement du **système dynamique symbolique** associé $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$:

$$h(u) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log_d(p(n))}{n},$$

où d est le cardinal de l'alphabet sur lequel la suite est définie. Cette limite existe du fait de la sous-additivité de la fonction $n \mapsto \log(p(n))$. Les suites d'entropie topologique nulle sont dites suites **déterministes**. Les suites que nous étudierons dans ce texte sont déterministes. Nous considérons principalement deux familles de suites : les suites de complexité $n+1$ ou plus généralement d'ordre de croissance au plus linéaire (paragraphes 1 et 2), et les suites engendrées par substitution (paragraphe 3).

0.3 Substitutions

On appelle **substitution** ou **morphisme** un endomorphisme pour la concaténation du monoïde libre $\mathcal{A}^*$, formé des mots finis sur $\mathcal{A}$. Un exemple classique est donné par la substitution de Fibonacci : $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = a$. On peut alors étendre naturellement la définition d'une substitution à l'ensemble des suites $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Soit σ une substitution. Supposons qu'il existe une lettre a telle que $\sigma(a)$ commence par a et $|\sigma(a)| \geq 2$; on note $\overline{a}$ la suite de terme constant a; alors la suite $(\sigma^n(\overline{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de σ. On appelle **suite substitutive** l'image par une projection littérale (c'est-à-dire une substitution dont toutes les images sont des lettres) d'un point fixe de substitution.

De nombreuses propriétés topologiques et ergodiques des suites substitutives sont décrites par leur matrice : on associe à la substitution σ une matrice $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in\mathcal{A}^2}$ dont le terme général $m_{i,j}$ compte le nombre d'occurrences de la lettre j dans $\sigma(i)$. Une substitution est dite **primitive** si la matrice associée l'est (il existe une puissance de la matrice dont toutes les entrées sont strictement positives, c'est-à-dire qu'il existe un itéré de la substitution tel que l'image de toute lettre contient toutes les lettres de l'alphabet). Le système dynamique engendré par un point fixe de substitution primitive est alors minimal et uniquement ergodique [71]. Pour une approche dynamique et spectrale des substitutions, voir également [162]. Nous étudierons ces suites plus en détail dans la partie 3. Nous considérerons en particulier le cas des substitutions de longueur constante.

1 Suites sturmiennes

L'étude des suites sturmiennes illustre de manière frappante les relations qui existent entre combinatoire des mots et théorie ergodique, ce qui est naturel puisque l'on travaille sur des suites, mais aussi avec l'arithmétique, l'approximation diophantienne et la géométrie. En particulier le développement en fraction continue permet de décrire avec précision de nombreuses propriétés des suites sturmiennes. Nous y reviendrons dans la partie 2. Pour une approche plus géométrique des suites sturmiennes, voir par exemple [18, 19, 20, 23].

1.1 Premières propriétés

On a vu que si la complexité d'une suite est telle qu'il existe un entier n pour lequel $p(n) \leq n$, alors cette suite u est périodique. Il apparaît alors naturel de s'intéresser aux suites de complexité $n+1$, c'est-à-dire telles que $p(n) = n+1$, pour tout n. De telles suites existent sur $\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{Z}$. Les suites de complexité $n+1$ indexées par $\mathbb{N}$ sont appelées **suites sturmiennes**. Les suites sturmiennes sont donc les suites de complexité minimale parmi les suites non ultimement périodiques. L'exemple le plus classique de suite sturmienne est la suite de Fibonacci, point fixe de la substitution σ définie par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$. Les suites sturmiennes sont donc définies de manière purement combinatoire, mais ce qui est remarquable, c'est qu'elles peuvent être également représentées de manière géométrique (voir [154]) : les suites sturmiennes sont exactement les suites obtenues en codant l'orbite d'un point ρ du cercle unité sous la rotation d'angle irrationnel α, par rapport à des intervalles complémentaires du cercle unité de longueurs α et $1-\alpha$.

Dans tout ce qui suit R_α désigne la rotation définie sur le tore $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de dimension 1, par $R_\alpha x = x + \alpha$ modulo 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous *omettrons de préciser que nous travaillons modulo 1.*

Théorème 1 (Morse-Hedlund) *Soit u une suite sturmienne à valeurs dans $\{0,1\}$. Il existe alors α irrationnel dans $]0,1[$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :*
soit
$$\forall n,\ (u_n = 0 \Longleftrightarrow R_\alpha^n(\rho) = \rho + n\alpha \in [0, 1-\alpha[),$$
soit
$$\forall n,\ (u_n = 0 \Longleftrightarrow R_\alpha^n(\rho) = \rho + n\alpha \in]0, 1-\alpha]).$$

On appelle **angle** *d'une suite sturmienne le réel α qui lui est ainsi associé.*

Notons que les suites sturmiennes ont de nombreuses autres caractérisations, tant géométriques que combinatoires (voir, par exemple, le survol [145]). En particulier, les suites sturmiennes sont les suites équilibrées sur un alphabet à deux lettres qui sont non ultimement périodiques. (Une suite **équilibrée** est telle que la différence entre le nombre d'occurrences d'une lettre dans deux de ses facteurs de même longueur, est bornée par 1 en valeur absolue.)

Un des intérêts de la représentation géométrique des suites sturmiennes indiquée dans le théorème 1, est qu'elle fournit une description simple, en termes d'intervalles du cercle unité, des facteurs de longueur donnée. Rappelons la propriété classique suivante (voir par exemple [151]).

Lemme 1 *Soit u une suite sturmienne d'angle α. Il existe une bijection entre les facteurs de longueur n de la suite u et les intervalles de la partition du cercle unité par les points $-k\alpha$, $0 \le k \le n$.*

1.2 Quelques généralisations unidimensionnelles

De nombreuses généralisations des suites sturmiennes ont été étudiées, privilégiant l'une ou l'autre de leurs propriétés. Nous allons considérer dans un premier temps quelques généralisations de nature combinatoire, puis dans un second temps, quelques généralisations géométriques. Pour une approche plus géométrique et dynamique des généralisations des suites sturmiennes, voir [18] où sont considérés en particulier les échanges d'intervalles, le flot de Teichmüller et les difféomorphismes pseudo-Anosov, les feuilletages et les pseudo-groupes...

Facteurs spéciaux La fonction de complexité d'une suite sturmienne satisfait : $\forall n,\ p(n+1) - p(n) = 1$. On en déduit l'existence d'un unique facteur de longueur donnée ayant deux extensions à droite (et de même à gauche). Un tel facteur est appelé **facteur spécial**. Arnoux et Rauzy généralisent cette propriété dans [27] en considérant des suites de complexité $2n+1$, avec l'existence d'un unique facteur de longueur donnée ayant trois extensions à droite (et de même à gauche). Ces suites (appelées suites d'Arnoux-Rauzy) se représentent géométriquement comme un échange de six intervalles sur le cercle unité.

Palindromes et règles de Rauzy Justin, Pirillo et Droubay introduisent dans [82] la notion de mots épisturmiens généralisant les propriétés de palindromie des facteurs des suites sturmiennes [80, 81] : les suites épisturmiennes sont les suites dont le langage est stable par image miroir et qui ont au plus un facteur spécial de longueur fixée. Cette généralisation est basée sur la construction par règles de Rauzy et mots standard des suites sturmiennes [167].

Équilibre Hubert généralise les propriétés d'équilibre dans [120] pour des suites non périodiques. Cette étude est reliée au problème du recouvrement de $\mathbb{N}$ par deux ensembles disjoints de la forme $\{[\alpha_1 n + \beta_1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{[\alpha_2 n + \beta_2]\}_{n\in\mathbb{N}}$ (voir [111]). Plus généralement si l'on veut recouvrir $\mathbb{N}$ par n ensembles disjoints $\{[\alpha_i n+\beta_i]\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $n \geq 3$ et $\alpha_i \neq \alpha_j$, si $i \neq j$, alors les nombres α_i doivent être nécessairement rationnels [111]. Fraenkel a conjecturé que si, pour $1 \leq i \leq n$, on a $\alpha_i > 0$, alors

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \left\{\frac{2^k - 1}{2^n}, 0 \leq k \leq n\right\}.$$

En termes combinatoires, cela revient à considérer des suites équilibrées à fréquences rationnelles (voir [17, 193]). Pour plus de références sur la conjecture de Fraenkel et ses relations avec les suites équilibrées, voir le survol [192].

Complexité modifiée Nakashima, Tamura et Yasutomi introduisent dans [155] la notion de complexité modifiée qui compte le nombre de facteurs de longueur donnée qui apparaissent infiniment souvent. Ils étudient ainsi les suites dont la fonction de complexité modifiée vaut au plus $n + 1$.

Suites à facteurs groupés Soit $R''(n)$ la taille du plus petit facteur qui contient tous les facteurs de longueur n d'une suite donnée. Les suites sturmiennes ont la propriété suivante : $\forall n,\ R''(n) = 2n = p(n) + n - 1$ (voir [54]). Cassaigne appelle plus généralement "suite à facteurs groupés" une suite telle que : $\forall n,\ R''(n) = p(n) + n - 1$ et décrit cette classe de suites dans [54]. Notons qu'on obtient ainsi à la fois des suites périodiques mais aussi des suites de complexité maximale 2^n.

Billard Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura considèrent dans [25, 26] des suites définies sur un alphabet à trois lettres obtenues en jouant au billard dans un cube : on obtient alors comme fonction de complexité $p(n) = n^2 + n + 1$ (voir [25, 26] et, pour le cas n-dimensionnel, voir le travail de Baryshnikov [28]).

Hubert considère également la dynamique symbolique du billard et la complexité des codages des trajectoires dans un polygone rationnel convexe [118], ainsi que dans le triangle isocèle et le "demi-triangle équilatéral" [119].

Codages de rotations Une généralisation naturelle des suites sturmiennes consiste à considérer un codage de la rotation R_α par rapport à une partition du cercle unité en d intervalles. La complexité est alors de la forme $p(n) = an + b$, pour n assez grand (voir [1]). Inversement, toute suite de complexité ultimement affine n'est pas nécessairement obtenue comme un codage de rotation. Par exemple, Rote produit dans [169] des exemples de suites de complexité $2n$, qui ne sont pas des codages binaires de rotations. Didier donne dans [78] une caractérisation des suites obtenues comme codages de rotations (en explicitant les liens avec les suites sturmiennes). Enfin, notons que si la complexité d'une suite u satisfait $p(n) = n+k$, pour n assez grand, alors u est l'image d'une suite sturmienne par une substitution, à un préfixe de longueur finie près (voir par exemple [1, 79, 54, 102, 114]).

Échanges d'intervalles On appelle échange d'intervalles l'application qui consiste à réorganiser les intervalles d'une partition de $[0, 1[$ suivant une permutation donnée. En codant, d'après la partition définissant l'échange, l'orbite d'un point de $[0, 1[$ sous l'action de cette transformation, on obtient ainsi des suites de complexité sous-affine. Didier caractérise combinatoirement dans [76] les suites codant les échanges de trois intervalles. Ferenczi, Holton et Zamboni définissent également dans [103] un algorithme produisant les orbites des points de discontinuité dans le cas des échanges de trois intervalles. Notons que les suites sturmiennes, les codages binaires de rotations et les échanges de trois intervalles sont des objets très proches d'un point de vue combinatoire et arithmétique (voir par exemple [23]). Un codage de rotation est ainsi la différence terme à terme de deux suites sturmiennes [119, 169]. Pus généralement, on passe de l'une à l'autre de ces suites par des projections littérales ou par des transformations de type “automate cellulaire”, c'est-à-dire des codes finis. Notons néanmoins que les résultats obtenus dans [103] semblent indiquer une différence de comportement arithmétique entre les échanges de trois intervalles et les codages binaires de rotations : le développement en fraction continue qui est décrit dans [103] ne semble pas être un simple produit gauche de la transformation des fractions continues. Nous reviendrons sur les propriétés arithmétiques de ces suites dans la partie 2.4.

1.3 Complexité sous-affine

Considérons plus généralement le cas des suites de complexité sous-affine (il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, tel que pour tout n, $p(n) \leq an + b$). De nombreuses propriétés tant combinatoires, ergodiques, qu'arithmétiques peuvent se déduire de cette simple indication sur l'ordre de croissance de la fonction de complexité.

Commençons par un résultat purement combinatoire dû à Cassaigne [52].

Théorème 2 (Cassaigne) *Si la complexité $p(n)$ d'une suite est sous-affine, alors $p(n + 1) - p(n)$ est borné.*

Notons que ce résultat est faux pour la complexité sous-quadratique : Ferenczi donne dans [96] un exemple de suite de complexité sous-quadratique dont les différences secondes $p(n + 2) + p(n) - 2p(n + 1)$ ne sont pas bornées.

La conjecture S-adique De plus, Ferenczi déduit du théorème 2 le résultat suivant [96] : les systèmes minimaux de complexité sous-affine sont engendrés par un nombre fini de substitutions (un tel système est appelé **S-adique** selon la terminologie due à Vershik). De même, une suite engendrée par l'itération d'un nombre fini de substitutions est appelée **suite S-adique**.

Théorème 3 (Ferenczi) *Soit u une suite uniformément récurrente de complexité sous-affine définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$; il existe alors un nombre fini c de substitutions σ_i, $1 \leq i \leq c$, définies sur un alphabet $\mathcal{B}$, une application φ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ et une suite infinie $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{1,\ldots,c\}$ tels que d'une part*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{b\in\mathcal{B}} |\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(b)| = +\infty$$

et d'autre part il existe une lettre b de $\mathcal{B}$ pour laquelle tout facteur de la suite u est facteur de $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(b)$, pour un certain entier n.

Le nombre c de ces substitutions peut être de plus majoré explicitement dans le cas où : $\forall n,\ p(n+1)-p(n)\leq 2$.

On connaît ainsi explicitement un développement S-adique pour les systèmes dynamiques engendrés par les suites sturmiennes d'une part et d'autre part par les suites d'Arnoux-Rauzy [27], pour les systèmes engendrés par certains codages binaires de rotations [77] (c'est-à-dire pour des codages selon une partition du cercle unité en intervalles dont les longueurs sont supérieures ou égales à l'angle de la rotation), et pour les systèmes engendrés par certains échanges de trois intervalles [144]. Notons que dans le cas sturmien, on obtient un résultat plus précis : toute suite sturmienne est S-adique, l'itération étant gouvernée par le développement d'Ostrowski du point de départ par rapport au développement en fraction continue de l'angle [22] (voir aussi le paragraphe 2.4).

La réciproque du théorème 3 est fausse. Il suffit en effet de considérer une substitution de complexité quadratique pour produire un contre-exemple, comme le point fixe commençant par a de la substitution $a\mapsto ab$, $b\mapsto bc$, $c\mapsto c$ [159]. Il reste à définir une notion plus forte de S-adicité qui permettrait de caractériser les suites de complexité sous-affine : considérons donc une suite u engendrée par l'itération d'un nombre fini de substitutions; quelles restrictions faut-il imposer aux substitutions pour que la suite u soit de complexité sous-affine?

Durand donne une condition suffisante dans [88] pour qu'une suite S-adique soit de complexité sous-affine. Cette condition est trop forte puisque les suites obtenues sont non seulement de complexité sous-affine mais aussi "linéairement récurrentes". Soit u une suite récurrente donnée et w un facteur. On appelle **mot de retour** sur w tout mot v tel que vw est facteur de la suite u, w est préfixe de vw et w a exactement deux occurrences dans vw. Une suite est dite **linéairement récurrente** s'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout facteur w, la longueur de tout mot de retour v de w satisfait $|v|\leq C|w|$. Notons qu'une telle suite est de complexité sous-affine [89]. Durand montre qu'un système est linéairement récurrent si et seulement s'il est S-adique à quotients partiels bornés, c'est-à-dire que chaque substitution revient avec des plages bornées [88]. En particulier, une suite sturmienne est linéairement récurrente si et seulement si les coefficients dans le développement en fraction continue de son angle sont à quotients partiels bornés, ce qui montre bien que les suites S-adiques ne sont pas nécessairement linéairement récurrentes. Nous reviendrons sur la notion de mots de retour dans le paragraphe 3.1.

Un des intérêts de la représentation S-adique est qu'elle permet une description arithmétique des suites étudiées. En effet la suite (i_n) (théorème 3) est gouvernée par le développement en fraction continue de l'angle dans le cas sturmien. Plus généralement, l'étude des itérations permet de définir un développement en fraction continue généralisé décrivant la suite considérée : on trouve ainsi de tels exemples de développement en fraction continue dans [103, 144, 163, 168, 200]. Nous reviendrons dans la partie 2.4 sur la numération d'Ostrowski qui permet de décrire la suite (i_n) dans le cas d'une suite sturmienne donnée ou du système dynamique engendré par un codage binaire de rotation. Les techniques les plus généralement utilisées pour ces problèmes sont d'une part l'étude des graphes des mots des suites (nous reviendrons sur cette notion dans le paragraphe 1.4) et l'induction.

Propriétés ergodiques La complexité sous-affine implique de plus les propriétés ergodiques suivantes dans le cas des suites minimales. Rappelons que cette propriété est invariante par isomorphisme topologique.

Soit u une suite primitive de complexité sous-affine.

- Une première conséquence est que le décalage unilatère sur $\overline{\mathcal{O}}(u)$ peut être rendu bijectif sauf sur un nombre fini d'orbites (voir par exemple le cours [100]).
- Boshernitzan a montré que l'on obtient une majoration explicite (en fonction de l'ordre de croissance de la fonction de complexité) du nombre n de mesures ergodiques [45, 47].
- En particulier les conditions suivantes impliquent l'unique ergodicité [45, 47]:
$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n} < 2,$$
ou
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n} < 3.$$
- Ferenczi a obtenu de même une majoration explicite du rang [96] (nous reviendrons sur la notion de rang au paragraphe 2.3).
- Enfin Ferenczi a montré dans [96] l'absence de mélange fort.

1.4 Graphe des mots

Définitions Un outil très utile pour l'étude des suite sturmiennes (et en particulier pour l'étude des fréquences des facteurs) est le **graphe des mots** de Rauzy. Soit u une suite définie sur l'alphabet fini $\mathcal{A}$ (de cardinal d). Le graphe des mots Γ_n des facteurs de longueur n de la suite u est un graphe orienté (voir, par exemple, [166]), qui est un sous-graphe du graphe des mots de de Bruijn[1] (voir [70]).

Le graphe Γ_n a pour sommets les facteurs de longueur n de la suite, avec une arête de U vers V, s'il existe un mot W de longueur $n-1$ tel que :

$$U = xW \text{ et } V = Wy, \text{ avec } x, y \in \mathcal{A},$$

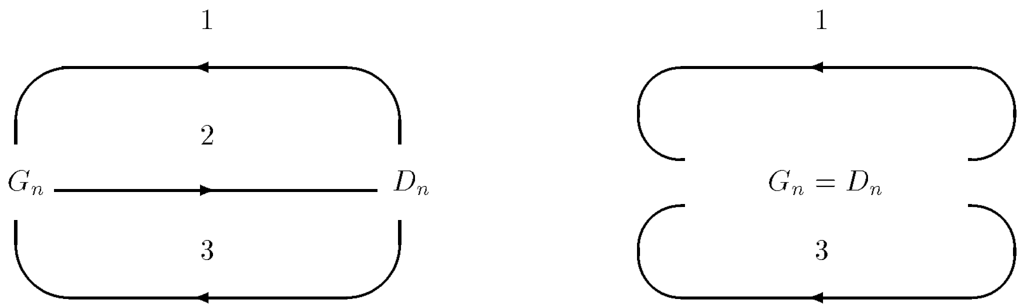
et tel que xWy soit un facteur de la suite.

Suites sturmiennes Considérons une suite sturmienne. De la complexité ($\forall n,\ p(n) = n+1$), on déduit l'existence d'un unique facteur D_n de longueur n **biprolongeable** à droite, c'est-à-dire ayant deux extensions à droite dans la suite. Soit, de même, G_n l'unique facteur de longueur n biprolongeable à gauche. Une suite sturmienne présente deux types de graphes selon que $G_n = D_n$ ou que $G_n \neq D_n$.

Cette forme simple du graphe des mots permet de déduire des informations sur les fréquences des facteurs des suites sturmiennes. Cette idée a été introduite par Dekking dans le cas de la suite de Fibonacci (voir [72]). Rappelons que la connaissance des fréquences de blocs d'une suite sturmienne u permet une description précise de la mesure associée au système dynamique $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$. En effet le système dynamique associé à une suite sturmienne est **uniquement ergodique** (ceci est une conséquence de la description des suites sturmiennes donnée par le théorème 1, la rotation sous-jacente étant d'angle irrationnel).

Soit U un sommet de Γ_n. On note U^+ le nombre d'arêtes de Γ_n d'origine U et U^- le nombre d'arêtes d'extrémité U. On a le lemme suivant.

Lemme 2 *Supposons que $U \to V$ et que $U^+ = 1 = V^- = 1$, alors les facteurs U et V ont même fréquence*



1. Le graphe des mots de de Bruijn correspond au graphe des mots d'une suite de complexité maximale ($\forall n,\ p(n) = d^n$,) et a été introduit par de Bruijn dans le but de construire des suites finies circulaires de longueur d^n à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, d-1\}$, telles que tout facteur de longueur n apparaît une fois et une seule : une telle suite correspond à un chemin Hamiltonien fermé dans le graphe de de Bruijn.

On déduit alors de ce lemme que tous les mots du chemin (1) (voir la figure ci-dessus), privé de D_n et G_n ont même fréquence, que, de même, tous les mots du chemin (3), privé de D_n et G_n ont même fréquence et enfin, que tous les mots du chemin (2), D_n et G_n inclus, ont même fréquence. On en déduit donc que les fréquences des facteurs de même longueur d'une suite sturmienne prennent au plus 3 valeurs. De plus, si $G_{n-1} = D_{n-1}$ alors l'un des deux chemins (1) ou (3) est vide, c'est-à-dire que l'on a une arête de D_n vers G_n. On en déduit donc la proposition suivante.

Proposition 1 *Les fréquences des facteurs de même longueur d'une suite sturmienne prennent au plus* 3 *valeurs. Si* $G_{n-1} = D_{n-1}$*, les fréquences des facteurs de longueur* n *prennent au plus* 2 *valeurs.*

Suites d'Arnoux-Rauzy L'étude de l'évolution du graphe des mots est une méthode puissante qui permet de décrire avec précision les suites sturmiennes. Arnoux et Rauzy ont ainsi prouvé la S-adicité des systèmes dynamiques sturmiens : tout système dynamique sturmien est obtenu par itération de deux substitutions (voir [27]). En ce qui concerne les suites d'Arnoux-Rauzy (voir le paragraphe 1.2), l'étude des graphes des mots permet également de représenter géométriquement ces suites comme un échange de six intervalles sur le cercle unité. Cet échange est uniquement ergodique [27]. Par conséquent, les fréquences de blocs existent pour une telle suite. Le graphe des mots admet alors quatre branches, trois branches allant de D_n à G_n et une branche allant de G_n à D_n. On montre en particulier qu'il existe, pour les facteurs de longueur donnée, au plus quatre fréquences dont l'une est la somme des trois autres (voir [61, 62], pour une étude de ces fréquences).

Graphe des mots et fréquences Plus généralement, supposons que toutes les fréquences des facteurs d'une suite u existent. Notons que la fonction qui associe à une flèche étiquetée par xWy la fréquence du facteur xWy est un **flot** satisfaisant à la loi de Kirchhoff. Une **branche** du graphe Γ_n est une suite de longueur maximale $(U_1, \ldots, U_m)$ de flèches connectées de Γ_n, éventuellement vide, satisfaisant

$$U_i^+ = 1, \quad \text{pour} \quad i < m, \quad U_i^- = 1, \quad \text{pour} \quad i > 1.$$

Par conséquent, les flèches d'une même branche ont la même fréquence et le nombre de fréquences des facteurs de longueur donnée est majoré par le nombre de branches (voir [46]).

Théorème 4 (Boshernitzan) *On considère une suite récurrente de complexité* $p(n)$*, les fréquences des facteurs de longueur* n *prennent au plus* $3(p(n+1) - p(n))$ *valeurs.*

On en déduit que si $p(n+1) - p(n)$ est uniformément majoré en n, les fréquences des facteurs de longueur donnée prennent un nombre fini de valeurs. En fait, en utilisant le résultat de Cassaigne précédemment cité (théorème 2) dont la preuve repose aussi sur une utilisation du graphe des mots (voir [52]), on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1 *Si la complexité $p(n)$ d'une suite est sous-affine, alors les fréquences des facteurs de longueur donnée ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.*

Quelques applications Notons quelques applications récentes de la notion de graphe des mots. La **fonction de récurrence** $R(n)$ d'une suite mesure la taille (éventuellement infinie) de la plus petite fenêtre qui, placée en toute position de la suite, contient tous les facteurs de longueur n. Rauzy a conjecturé dans [166] que si $R(n)$ est la fonction de récurrence d'une suite non périodique, alors $\limsup_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n} \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, cette valeur étant atteinte pour la suite de Fibonacci. Cassaigne en a obtenu une preuve basée sur l'évolution des graphes des mots [57] (voir aussi [55], pour une étude du spectre des valeurs limite de la fontion de récurrence). Allouche et Bousquet-Mélou ont également étudié une conjecture similaire de Shallit, avec une fonction $S(n)$ légèrement différente : $S(n)$ est la longueur du suffixe le plus grand de $u_0u_1\dots u_n$ qui est aussi un facteur de $u_0u_1\dots u_{n-1}$. Toujours par l'étude des graphes des mots, Cassaigne a obtenu un contre-exemple pour cette seconde conjecture concernant la fonction S (une suite donnant une limite strictement inférieure à celle donnée par la suite de Fibonacci), et a pu prouver que celui-ci est optimal (voir [53]). Un résultat annexe est une nouvelle caractérisation des suites sturmiennes, au moyen d'une autre variante $R''(n)$ de la fonction de récurrence [54] : les suites sturmiennes sont des suites à facteurs groupés (voir également le paragraphe 1.2).

De même, notons que les caractérisations de [1, 79, 102, 54, 114] des suites de complexité $n+k$ font intervenir les graphes des mots. Pour les suites telles que $p(n+1)-p(n)=2$, voir [95, 169] et pour une étude des suites telles que $p(n+1)-p(n)\in\{1,2\}$, voir [1].

Les graphes de mots interviennent également dans [101] pour l'estimation de complexités pour des mots finis, ainsi que pour le calcul de la **fonction de dispersion**, qui associe à n la longueur maximale d'un chemin admissible sans répétition du graphe des mots Γ_n.

Tijdeman introduit dans [194] une notion de graphe très proche de celle du graphe des mots afin de montrer le résultat suivant.

Théorème 5 (Tijdeman) *Soit u une suite définie sur un alphabet de q lettres dont les fréquences existent et sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Alors $p(n) > n(q-1)$, pour tout n.*

Nous reviendrons dans le paragraphe 2.1 sur des résultats concernant le théorème des trois longueurs obtenus par l'étude du graphe des mots [2, 35, 60, 61, 62] ou de graphes très similaires [63].

2 Théorème des trois longueurs

2.1 Fréquences des suites sturmiennes

On a vu que les fréquences des facteurs de longueur donnée d'une suite sturmienne prennent au plus trois valeurs. Or on peut exprimer ces valeurs en fonction du développement en fraction continue de l'angle (voir [32]).

Théorème 6 *Considérons une suite sturmienne d'angle α. Soit $m \geq 1$. Soient $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ deux m-points de Farey consécutifs tels que $\frac{p_1}{q_1} < \alpha < \frac{p_2}{q_2}$.*
Les fréquences des facteurs de longueur m sont à valeurs dans l'ensemble :

$$p_2 - \alpha q_2,\ \ \alpha q_1 - p_1,\ \ \alpha(q_1 - q_2) + p_2 - p_1.$$

Il y a de plus

- $m - q_2 + 1$ *facteurs de fréquence* $p_2 - \alpha q_2$*;*
- $m - q_1 + 1$ *facteurs de fréquence* $\alpha q_1 - p_1$*;*
- $(q_1 + q_2) - m - 1$ *facteurs de fréquence* $\alpha(q_1 - q_2) + p_2 - p_1$*.*

On rappelle qu'un m-point de Farey est un élément α de $[0, 1]$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \geq 0$, $1 \leq q \leq m$ et $pgcd(p, q) = 1$ (voir [113], p. 23). Les points $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ s'expriment explicitement en fonction du développement en fraction continue de l'angle α.

La preuve de ce théorème se fait par récurrence sur m et est fondée sur l'évolution du graphe des mots étudiée par Arnoux et Rauzy dans [27]. En effet, la taille des branches donne le nombre de facteurs correspondant à chacune des fréquences. De plus, les fréquences des branches reliant D_m à G_m sont données par $f(D_{m-1}a)$ et $f(D_{m-1}b)$ (si elles sont non vides), alors que la fréquence de la branche du milieu est donnée par $f(D_m)$. Il est important de caractériser le cas où $G_m = D_m$. Ceci n'arrive que dans le cas suivant.

Proposition 2 *Soit $m \geq 1$. Soient $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ deux m-points de Farey consécutifs tels que $\frac{p_1}{q_1} \neq 0$ et $\frac{p_2}{q_2} \neq 1$. On considère une suite sturmienne dont l'angle α vérifie $\alpha \in]\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}[$. On a $G_m = D_m$ si et seulement si $m = q_1 + q_2 - 2$.*

Ce résultat correspond à la caractérisation des mots strictement bispéciaux donnée par Mignosi et de Luca dans [74], à partir des mots standard de Rauzy [167]. En effet, si on a l'égalité $D_m = G_m$, on vérifie que le mot G_m est alors **strictement bispécial** dans le langage de toutes les suites sturmiennes, c'est-à-dire que les quatre extensions $aG_m a$, $bG_m a$, $aG_m b$ et $bG_m b$ sont des facteurs de suites sturmiennes. Notons que sous les hypothèses de la proposition 2, le mot $G_{q_1+q_2-2}$ est alors un élément de PER, en reprenant les notations de [74], c'est-à-dire que $G_{q_1+q_2-2}$ admet deux périodes, q_1 et q_2, premières entre elles, ou en d'autres termes, que $G_{q_1+q_2-2}$ est un mot maximal pour le théorème de Fine et Wilf [104]. Voir aussi [198], pour l'étude du cas de la suite de Fibonacci.

Revenons à la bijection donnée par le lemme 1 entre facteurs de longueur n et intervalles du cercle unité délimités par les points $-k\alpha$, $0 \leq k \leq n$. On retrouve ainsi un résultat classique d'analyse diophantienne, à savoir le théorème des trois longueurs, initialement conjecturé par Steinhaus et prouvé par V. T. Sós (voir [186, 188, 191, 190]).

En effet, si l'on place les points $\{0\}$, $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}, \ldots,$ $\{n\alpha\}$ sur le cercle unité, on obtient $n+1$ segments dont les longueurs prennent au plus trois valeurs, l'une étant la somme des deux autres. Cette propriété est connue sous le nom de **théorème des trois longueurs** et peut être considérée comme une illustration géométrique des propriétés de bonne approximation des quotients partiels de Farey dans le développement en fraction continue de α. La connexion entre ce théorème et la combinatoire des mots est particulièrement apparente quand on considère un théorème équivalent, appelé **théorème des trois lacunes** : fixons α et β dans $]0,1[$, les lacunes entre les entiers n successifs pour lesquels $\{\alpha n\} < \beta$, prennent au plus trois valeurs, l'une étant la somme des deux autres. Il est alors naturel d'introduire la suite binaire définie comme le codage de la rotation d'angle α par rapport aux intervalles $[0,\beta[, [\beta,1[$ (en particulier, si $\beta = \alpha$ ou $\beta = 1-\alpha$, cette suite est sturmienne) : les longueurs des plages de chacune des lettres de la suite codage sont données par les trois lacunes. En fait, les théorèmes des trois longueurs et des trois lacunes sont directement liés aux propriétés topologiques et métriques des systèmes dynamiques associés aux codages de rotations. Dans le survol [2], nous donnons en particulier des preuves combinatoires et élémentaires de certaines généralisations de ce théorème.

Notons quelques généralisations récentes du théorème des trois longueurs. Dans [62], une généralisation de ce théorème est donnée pour la rotation du tore $\mathbb{T}^2$ associée à la substitution de Tribonacci : l'ensemble des morceaux du fractal de Rauzy [165, 149] qui représentent les cylindres correspondant aux facteurs de longueur donnée est constitué de trois ou quatre régions à translation près. Une généralisation analogue est également donnée dans [107], pour toute rotation irrationnelle du tore $\mathbb{T}^2$. Enfin, Justin et Pirillo calculent dans [130] la fonction $L(m)$ qui donne la longueur du plus long facteur d'une suite sturmienne donnée ayant pour période m.

2.2 À propos du théorème de Geelen et Simpson

Geelen et Simpson [109] ont montré la généralisation suivante du théorème des trois longueurs.

Théorème 7 (Geelen et Simpson) *Soient $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}$ et soient $n, m \in \mathbb{N}$. L'ensemble des points*

$$\{i\alpha + j\beta + \rho,\ 0 \leq i \leq m-1,\ 0 \leq j \leq n-1\}$$

partitionne le cercle unité en, au plus, $\min\{m,n\}+3$ *longueurs.*

Cette borne est maximale au sens où, pour tout couple (m,n), il existe (α,β) réalisant cette borne. Inversement, on peut se demander s'il existe des couples

(α, β) tels que, si l'on considère des carrés de côté N (c'est-à-dire les points $i\alpha + j\beta + \rho$, $0 \leq i, j \leq N-1$), on puisse alors obtenir une partition en intervalles dont le cardinal est majoré (indépendamment de N). Boshernitzan a répondu par l'affirmative à cette question [48].

Théorème 8 (Boshernitzan) *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels mal approchable (au sens de [176, 59]); il existe alors une constante C telle que le cardinal de l'ensemble des longueurs de la partition du cercle unité par les points $\{m\alpha + n\beta,\ 1 \leq m, n \leq N\}$ est majoré par C.*

Nous sommes en particulier sous les hypothèses du théorème 8 si $\{1, \alpha, \beta\}$ forme une base sur $\mathbb{Q}$ d'un corps cubique. Boshernitzan a montré de plus que pour un ensemble résiduel de couples (α, β), le cardinal de l'ensemble des longueurs n'est pas majoré. Enfin, il conjecture que ce cardinal est majoré pour presque tout couple (α, β) pour la mesure de Lebesgue.

Notons que Chevallier donne dans [63] une version d-dimensionnelle du théorème de Geelen et Simpson en introduisant un graphe proche du graphe des mots.

Théorème 9 (Chevallier) *Soit $d \geq 3$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{T}^1$ et $2 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_d$ des entiers. L'ensemble*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{d} k_i \alpha_i,\ 0 \leq k_i < n_i,\ i = 1, \ldots, d \right\}$$

divise $\mathbb{T}^1$ en intervalles dont les longueurs prennent au plus

$$\prod_{i=1}^{d-1} n_i + 3 \prod_{i=1}^{d-2} n_i + 1$$

valeurs.

2.3 Une application en théorie ergodique

L'étude des fréquences de facteurs des suites binaires obtenues comme codages de rotations permet d'exprimer certains nombres de recouvrement pour les systèmes dynamiques associés ainsi que d'étendre ces résultats à des échanges de trois intervalles, ce qui fait l'objet de [35].

Soit (X, T, μ) un système dynamique métrique. On peut associer à un tel système des invariants pour la notion d'isomorphisme métrique ou topologique, appelés **nombres de recouvrement**, permettant également de définir la notion de **rang** (voir par exemple le survol [98] ainsi que [96] pour les relations entre la notion de rang et de complexité ainsi que l'introduction de la thèse de Chekhova [60]). Rappelons qu'une tour de Rokhlin est une union d'ensembles disjoints de la forme B, TB, $\ldots$, $T^{h-1}B$. Les nombres de recouvrement (voir [61, 93, 94, 98, 134]) mesurent la tour de Rokhlin de plus grande taille et de hauteur arbitrairement grande h, contenue dans X, dont la base B possède certaines propriétés de régularité, comme le fait d'être un intervalle ou un ensemble de petit diamètre, si $X = \mathbb{T}^1$, ou bien d'être un cylindre, si X est un sytème dynamique symbolique.

Les nombres de recouvrement associés à une rotation irrationnelle R_α du cercle unité ou à un système dynamique symbolique sturmien sont calculés dans [61], à partir de l'expression des fréquences des facteurs des suites sturmiennes, et donc du théorème des trois longueurs. Plus généralement, si l'on considère un système dynamique symbolique engendré par une suite codant la rotation R_α sur deux intervalles, délimités par les points 0 et β, l'expression des nombres de recouvrement fait intervenir les fréquences des facteurs d'une telle suite : les fréquences des facteurs de longueur n sont données par les longueurs des intervalles délimités par les points $-k\alpha$, $\beta - l\alpha$, $0 \leq k, l \leq n$. D'après le théorème 7, ces longueurs prennent au plus 5 valeurs. Ces fréquences sont exprimées dans [35], à partir de l'étude du graphe des mots et d'un algorithme d'approximation de β par les points $k\alpha$, que l'on peut décrire en termes dynamiques comme un produit gauche du développement en fraction continue (voir le paragraphe suivant).

On peut associer classiquement à un codage binaire de rotation irrationnelle un échange de trois intervalles, défini par un procédé d'induction (voir par exemple [164]). On en déduit alors l'expression de nombres de recouvrement pour des échanges de trois intervalles. On obtient ainsi que tout échange ergodique de trois intervalles est de spectre simple et ne peut être isomorphe en mesure au système dynamique associé à la suite de Thue-Morse. On obtient de plus des exemples d'échanges de trois intervalles induits par la même rotation, mais non conjugués topologiquement. Ces résultats sont montrés dans [35].

2.4 Autour du système de numération d'Ostrowski

Approche arithmétique Le développement en fraction continue d'un réel α permet de construire explicitement les rationnels qui approchent au mieux ce réel; il s'agit de la propriété de **meilleure approximation** : un rationnel a/b est dit meilleure approximation de α si

$$\forall c/d \neq a/b,\ 0 < d \leq b,\ \text{alors } |d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Les meilleures approximations d'un irrationnel α sont exactement les convergents $\frac{p_n}{q_n}$. Considérons maintenant le problème d'approximation non homogène associé : comment approcher modulo 1 un réel β par des points de la forme $k\alpha$? Remarquons que si α est rationnel, il existe alors des réels β tels que la quantité $|p\alpha + q - \beta|$ peut être minorée indépendamment de (p, q). Il est donc raisonnable de penser que si α est bien approché par les rationnels (c'est-à-dire si les quotients partiels de α sont grands), il existe alors des réels β qui ne pourront pas être bien approchés par des points de la forme $p\alpha + q$, ce qui est effectivement le cas [133]. Ceci laisse indiquer que le développement en fraction continue de α joue encore un rôle déterminant pour le problème non homogène. Afin de construire explicitement des solutions à ce problème, il est intéressant d'introduire le système de numération suivant.

Le **système de numération d'Ostrowski** [158] est le système de numération associé à l'échelle de numération $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où les q_n sont les dénominateurs des convergents dans le développement en fraction continue d'un réel irrationnel $0 < \alpha < 1$ donné. (Notons que l'on a bien $q_0 = 1$.) On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des quotients partiels. On a $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, et $\forall n$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$.

En appliquant l'algorithme glouton (voir par exemple [105]), on obtient le résultat suivant : tout nombre entier naturel N s'écrit de manière unique sous la forme

$$N = \sum_{k=1}^{m} d_k q_{k-1},$$

où

$$\begin{cases} 0 \leq d_1 \leq a_1 - 1, \ 0 \leq d_k \leq a_k, \quad \text{pour } k \geq 2, \\ d_k = 0 \text{ si } d_{k+1} = a_{k+1}. \end{cases} \tag{1}$$

Par exemple, si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or, on retrouve la numération de Fibonacci, et la condition de Markov (1) équivaut au fait que l'on ne trouve pas deux 1 consécutifs dans la suite des coefficients de la représentation. Cette numération est appelée **représentation de Zeckendorf**.

On peut de manière analogue développer des réels : la base est alors donnée par la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$\forall n, \ \theta_n := q_n\alpha - p_n.$$

Rappelons que le signe de θ_n est égal au signe de $(-1)^n$. Tout réel β, avec $-\alpha \leq \beta < 1 - \alpha$, s'écrit de manière unique sous la forme suivante (voir par exemple [75, 188, 84, 141, 142, 125, 185]) :

$$\beta = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \theta_{k-1}, \tag{2}$$

$$\text{où } 0 \leq b_1 \leq a_1 - 1, \ 0 \leq b_k \leq a_k, \quad \text{pour } k \geq 2,$$

$$b_k = 0 \text{ si } b_{k+1} = a_{k+1},$$

$$b_{2k+1} \neq a_{2k+1}, \ \text{pour une infinité d'entiers } k.$$

Notons que l'on a bien convergence puisque

$$\forall k, \ b_k|q_{k-1}\alpha - p_{k-1}| \leq \frac{a_k}{q_k} \leq \frac{1}{q_{k-1}}.$$

La condition sur les coefficients d'indice impair garantit l'unicité de cette écriture dans le cas où $\beta \equiv l\alpha \pmod 1$. Notons que cette écriture peut être étendue à $\mathbb{R}$ (voir [183]).

Ces développements nous permettent donc d'approcher arbitrairement près β modulo 1 par des points de la forme $N\alpha$: il suffit de développer β selon (2) ; les entiers N_n avec $N_n = \sum_{k=1}^{n} b_k q_{k-1}$ fournissent les meilleures approximations.

Supposons maintenant que l'on ne veuille approcher β que d'un côté modulo 1 (c'est ce type d'approximation qui intervient dans les problèmes de calcul des nombres de recouvrement évoqués dans le paragraphe précédent). Il apparaît alors naturel de développer β selon la base $(|\theta_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tout réel β, avec $0 \leq \beta < 1$, s'écrit alors de manière unique sous la forme (voir par exemple [112, 121]) :

$$\beta = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k |\theta_{k-1}|, \tag{3}$$

$$\text{où } 0 \leq c_k \leq a_k, \text{ et } c_{k+1} = 0 \text{ si } c_k = a_k,$$

$$c_k \neq a_k \text{ pour une infinité d'entiers pairs et une infinité d'entiers impairs.}$$

Il existe de même un système de numération associé sur les entiers : l'échelle de numération est donnée par $((-1)^n q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est alors plus délicat d'exprimer les meilleures approximations, à gauche par exemple, de β par des points de la forme $N\alpha$ en raison des signes qui apparaissent : pour un algorithme explicite, voir [35].

Ces développements sont d'abord apparus pour des évaluations de discrépance en théorie de la distribution uniforme (voir par exemple [58, 69, 75, 83, 84, 85, 141, 142, 160, 175, 185, 186, 187, 188]). En effet, ce type d'expression est utilisé pour donner des bornes sur des expressions non homogènes du type

$$N \sum_{1\leq k\leq N} (\{k\alpha + \beta\} - 1/2).$$

Pour un rappel des différents algorithmes de fractions continues non homogènes correspondant à ce type de problèmes, voir [139].

Approche ergodique De même que l'on peut obtenir de nombreuses propriétés métriques et ergodiques concernant les fractions continues en introduisant la transformation $T(x) = \{1/x\}$, de même peut-on ici décrire les développements (2) et (3) comme un produit gauche de la transformation T des fractions continues.

Ito donne ainsi dans [121] les transformations définies sur $[0,1[\times[0,1[$ qui produisent les développements (2) et (3). On en déduit une réalisation de leur extension naturelle et une expression des mesures invariantes (voir aussi [125, 185]). Voir également [132, 131] pour une construction de mesures non singulières, non atomiques et quasi-ergodiques associées à ces systèmes de numération.

De plus, une caractérisation de l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\alpha)$ (pour α quadratique) est donnée dans [112] en fonction de ces développements. Ce résultat est étendu dans [122] à des nombres cubiques en utilisant l'algorithme de Jacobi-Perron modifié.

Sidorov et Vershik étudient dans [183] les propriétés “adiques” et ergodiques des systèmes de numération associés. En particulier, ils établissent un isomorphisme entre une rotation irrationnelle du cercle unité donnée et une transformation adique à l'aide des deux développements (2) et (3). De même, Liardet montre dans [143] les propriétés de l'odomètre construit sur ce système de numération (il est continu, donc surjectif et minimal) en relation avec l'étude dynamique des suites α-multiplicatives.

Approche combinatoire Ces écritures interviennent également dans [22] afin d'exprimer algorithmiquement une suite sturmienne donnée, en "itérant" des substitutions élémentaires gouvernées par ces développements (voir aussi [128, 135, 136, 137, 138, 139, 157]). En d'autres termes, les fractions continues décrivent fidèlement le langage de **toutes** les suites sturmiennes de même angle. Si l'on veut connaître le développement S-adique **d'une** suite sturmienne, on a besoin d'une information supplémentaire donnée par le développement de type (2) par exemple, du point dont on code l'orbite. Didier introduit un développement analogue dans [77] pour l'étude des codages binaires de rotations. Voir également [103] pour ce qui concerne les échanges de trois intervalles.

On obtient alors des caractérisations de propriétés algébriques comme la quadraticité de α en termes combinatoires d'une part, et en termes de développements ultimement périodiques d'autre part. Cette idée se retrouve dans la généralisation suivante du théorème de Lagrange due à Boshernitzan et Carroll [49]. Si tous les paramètres numériques d'un échange d'intervalles appartiennent à un même corps quadratique de nombres, on a la propriété d'autosimilarité suivante : soit T un échange d'intervalles dont les longueurs appartiennent à un même corps quadratique de nombres; soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de transformations obtenues à partir de T par inductions successives, c'est-à-dire $T_0 = T$ et T_n est l'application de premier retour de T_{n-1} sur un des intervalles échangés; alors la suite (T_n) prend un nombre fini de valeurs, c'est-à-dire qu'on obtient un nombre fini de transformations. En particulier, si on induit toujours de la même manière (par exemple, sur le premier intervalle), la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors ultimement périodique.

Enfin, pour une approche algébrique et géométrique de ces questions, voir [20, 23] : on sait qu'il est possible de coder le flot géodésique sur la surface modulaire par les fractions continues (voir par exemple [19]). Arnoux et Fisher ont ainsi introduit le flot scénographique qui permet d'étendre l'approche modulaire à ce contexte non homogène (ou, en d'autres termes, affine).

3 Des suites substitutives aux automates cellulaires

Nous allons considérer dans un premier temps les suites points fixes de substitutions de longueur constante (paragraphe 3.1) ainsi que certaines de leurs propriétés métriques et topologiques (paragraphe 3.2), puis leurs liens avec les quasi-cristaux (paragraphe 3.3). La question de l'automaticité (au sens de Shallit) des suites sturmiennes est alors naturelle. Nous l'abordons dans la partie 3.4. Nous finissons cette partie avec l'étude des généralisations bidimensionnelles possibles.

3.1 Suites automatiques

Les suites point fixe de substitutions de longueur constante ont de nombreuses propriétés. En particulier, elles peuvent être engendrées par un processus algorithmique simple : un automate fini [67]. Rappelons les définitions d'automate et de suite automatique. Pour plus d'informations sur le sujet, voir les survols [4, 15, 73]. Un q-**automate** est défini par la donnée :

- d'un ensemble fini d'états $S = \{i = a_1, a_2, ..., a_d\}$, dont on a privilégié un élément i, appelé état initial,
- de q applications ou "flèches" de l'ensemble des états S dans lui-même, notées $0, 1, ..., q-1$,
- d'une application φ de S dans un ensemble Y, dite fonction de sortie.

Une suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Y est dite q-**automatique** si elle est engendrée par un q-automate de la façon suivante : considérons un entier n, écrivons-le en base q et identifions les chiffres de son développement aux applications $0, 1, ..., q-1$; en lisant les chiffres de n de droite à gauche, on obtient une application composée de S dans lui-même. Soit a_f l'image de l'état initial i par cette application, on pose alors : $u(n) = \varphi(a_f)$.

La notion de q-automaticité que nous considérons ici est basée sur la numération en base q. On peut étendre la notion d'automaticité à des systèmes de numération plus généraux, comme la numération de Fibonacci. Nous n'aborderons pas cet aspect ici. Dans tout ce qui suit, nous entendrons par automaticité la notion de q-automaticité.

Le théorème suivant dû à Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [64, 65] relie l'automaticité aux propriétés suivantes combinatoires et algébriques.

Théorème 10 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)
Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans le corps $\mathbb{F}_q$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *la série formelle $\sum_{n\geq 0} u(n)X^n$ est algébrique sur le corps $\mathbb{F}_q(X)$,*
2. *le q-**noyau** $N_q(u)$ de la suite u est fini, où $N_q(u)$ est défini comme l'ensemble des sous-suites de la forme*
$$N_q(u) = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbb{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\},$$
3. *la suite u est q-automatique,*
4. *la suite u est l'image par une projection lettre à lettre d'un point fixe d'une substitution de longueur q.*

La dernière équivalence est due à Cobham [67] et l'équivalence entre les conditions 2 et 3 est due à Eilenberg [92].

Durand généralise dans [86] l'équivalence entre la condition 3 et l'automaticité, aux suites substitutives uniformément récurrentes. Cette caractérisation est basée sur la notion de mots de retour (voir le paragraphe 1.3) et de suite dérivée. Rappelons qu'un mot de retour sur le facteur w est un mot séparant deux occurrences successives de w; on appelle **suite dérivée** d'une suite minimale u fixée, une suite obtenue en codant u par les mots de retour sur un préfixe non vide de la suite u. La caractérisation est alors la suivante.

Théorème 11 (Durand) *Une suite uniformément récurrente est substitutive si et seulement si l'ensemble de ses suites dérivées est fini.*

Ce résultat a été prouvé indépendamment par Holton et Zamboni [117]. Il a de plus été étendu au cas des pavages substitutifs par Priebe [161] : les pavages de Voronoï dérivés jouent alors le rôle des suites dérivées. Notons que la notion de mots de retour a de nombreuses applications tant arithmétiques (généralisations du théorème de Cobham [87]) que dynamiques (description des systèmes de Bratelli-Vershik stationnaires minimaux comme réunion des systèmes de substitutions primitives et des odomètres [89]).

La caractérisation 1 a de nombreuses applications en transcendance (pour des séries formelles à coefficients dans un corps fini), voir par exemple les survols [7, 195]. Beals et Thakur étendent de plus ce type de propriétés algébriques à des classes de langages plus générales [29].

Nous avons vu le lien qui existe entre les suites automatiques et les propriétés algébriques des séries formelles. Il est naturel de s'interroger sur l'existence et les propriétés de développements en fraction continue de séries formelles à coefficients dans un corps fini. Nous étudions dans [36] les propriétés de certains développements en fraction continue pour des séries formelles à coefficients dans un corps fini. Nous nous intéressons en particulier à l'action de $SL(2, \mathbb{F}_q[X])$, ainsi qu'à des propriétés métriques, comme la réalisation d'une extension naturelle.

3.2 Complexité et fréquences

On a les propriétés suivantes.

Théorème 12 *1. La complexité d'un point fixe d'une substitution primitive (voir par exemple [162]) ou d'une suite automatique [67] satisfait*

$$\forall n,\ p(n) \leq Cn.$$

2. Plus généralement la complexité d'un point fixe de substitution satisfait [91, 159]

$$\forall n,\ p(n) \leq Cn^2.$$

Cette propriété permet de montrer qu'une suite de haute complexité n'est pas automatique. Notons que des suites automatiques ont des fonctions de complexité similaires mais des propriétés très dissemblables pour ce qui concerne leurs propriétés spectrales (voir par exemple [162]).

Considérons quelques résultats sur les fréquences des facteurs d'un point fixe d'une substitution de longueur constante. Pour des résultats généraux sur les suites substitutives primitives, voir [162]. Rappelons que pour de telles suites les fréquences existent et sont strictement positives. Le résultat suivant d'équirépartition s'applique pour les fréquences de facteurs de substitutions primitives de longueur constante (voir [71]).

Théorème 13 (Dekking) *Soit σ une substitution primitive de longueur constante. On note $f(w)$ la fréquence du facteur w. Il existe $C_2 > C_1 > 0$ tels que*

$$C_1 \leq nf(w) \leq C_2,$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tous les facteurs w de longueur n.

Le résultat suivant se prouve en appliquant les propriétés des matrices stochastiques à la puissance n-ième d'une matrice de substitution divisée par l^n, où l est la longueur de la substitution (voir [67]).

Théorème 14 (Cobham) *Si les fréquences des facteurs d'une suite automatique existent, elles sont rationnelles. De plus, si la substitution correspondante est primitive, alors les fréquences existent.*

En particulier, une suite sturmienne ne peut être automatique, puisque les fréquences des lettres sont irrationnelles. Néanmoins une suite sturmienne d'angle $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est F-automatique, pour la notion d'automaticité liée à la numération de Fibonacci.

Pour des résultats plus précis sur les suites automatiques dont une lettre a une fréquence nulle, voir [67]. Voir également [106] pour une description précise des fréquences des facteurs d'une suite point fixe d'un morphisme de longueur constante circulaire et marqué.

3.3 Suites automatiques et quasi-cristaux

Un cristal est un arrangement triplement périodique d'atomes et ne peut donc avoir que des symétries d'ordre 2, 3, 4 ou 6. Or, en 1984, Shechtman, Blech, Gratias et Cahn ont fabriqué un alliage d'aluminium et de manganèse dont les figures de diffraction présentent six axes de symétrie d'ordre 5, soit une symétrie icosaédrique (voir [182]). On a alors appelé un tel alliage **quasi-cristal**. Pour plus d'informations sur le sujet, voir par exemple [40, 177].

Une suite infinie peut servir de modèle pour un réseau unidimensionnel d'atomes de la manière suivante : on associe à chaque lettre un segment de longueur donnée et on concatène bout à bout les segments ainsi obtenus. On place alors des atomes aux extrémités de chaque segment. On appelle suite quasi-périodique une suite correspondant à un quasi-cristal, c'est-à-dire une suite non périodique mais suffisamment ordonnée, pour que la figure de diffraction qu'elle produise présente des taches similaires à celles des systèmes périodiques. Ainsi la suite de Fibonacci est-elle quasi-périodique alors que la suite de Thue-Morse ne l'est pas.

Pour construire des pavages quasi-périodiques, on cherche un nombre fini de parties avec des règles de liaison et des règles d'inflation qui montrent que l'on peut étendre le pavage à l'espace entier tout en conservant la non-périodicité. Une suite substitutive correspond à ce modèle. Une telle suite présente, de plus, un certain ordre : $\forall n \; p(n) \leq Cn^2$. Toute substitution ne donne pas naissance à une suite quasi-périodique : la suite de Thue-Morse est substitutive mais n'est pas quasi-périodique. Bombieri et Taylor ont ainsi montré, dans [43] et [42], qu'il y avait des restrictions algébriques sur les substitutions qui engendraient des pavages quasi-périodiques. Ils ont montré qu'une condition nécessaire, pour que le pavage unidimensionnel engendré par une substitution soit un quasi-cristal, est que le polynôme caractéristique de la substitution ait une seule racine de module strictement plus grand que 1 (**nombre de Pisot**). Notons que cette condition intervient plus généralement dans les problèmes de représentation géométrique des systèmes dynamiques substitutifs comme une rotation sur un tore ([24, 115, 116]).

Il est naturel de chercher un critère de reconnaissance de suites quasi-cristallines (de telle suites ont en particulier un spectre discret). Pour cela, Burrows et Sulston calculent dans [145] des valeurs d'entropies conditionnelles de blocs dans le but de donner une mesure quantitative du désordre, plus précise que la notion topologique de complexité. Cette mesure a été introduite par Shannon [181], et est définie à partir d'approximations successives : une suite de valeurs d'entropie est ainsi associée à une suite à valeurs dans un alphabet à deux lettres $\{a, b\}$, à partir des probabilités conditionnelles $f(a/x_1...x_k)$ et $f(b/x_1...x_k)$, où $x_1...x_k$ est un bloc de la suite de probabilité non nulle et $f(x/x_1...x_k) = \frac{f(x_1...x_kx)}{f(x_1...x_k)}$. La suite $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est alors ainsi définie :

$$H_k = \sum{}' f(x_1...x_k)H(x_1...x_k),$$

où $\sum'$ désigne la somme sur tous les blocs de longueur k de fréquence non nulle et

$$H(x_1...x_k) = L(f(a/x_1...x_k)) + L(f(b/x_1...x_k)), \text{ avec } L(x) = -x\log_2(x).$$

Notons que cette suite de valeurs d'entropie, définie à partir de probabilités conditionnelles, mesure les propriétés de prédictibilité de la suite initiale et converge vers l'**entropie mesurée** du système dynamique $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$. En calculant ces entropies de blocs pour certaines suites automatiques représentatives, ce qui revient à donner une expression des fréquences des facteurs de longueur donnée, on montre cependant que la vitesse de convergence de ces entropies conditionnelles vers l'entropie métrique (qui est alors nulle) ne permet pas de distinguer entre suites automatiques selon leurs propriétés spectrales (voir [30, 31]).

Notons qu'il existe de nombreux résultats et une littérature fournie concernant les liens entre les suites automatiques et la physique. Voir par exemple [6, 14, 147, 148].

3.4 Automaticité et suites sturmiennes

Shallit introduit dans [180, 110, 179] une **mesure de l'automaticité** d'une suite $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur un alphabet fini : la k-automaticité de la suite u, $A_u^k(n)$, est définie comme le plus petit nombre possible d'états d'un k-automate fini déterministe qui engendre le préfixe de longueur n de cette suite. Cette mesure est à rapprocher de la notion de complexité en arbre introduite dans [156]. Elle indique de plus quantitativement à quel point une suite est proche d'être k-automatique. Notons qu'on introduit les chiffres dans l'automate, en partant du chiffre le moins significatif (dans le développement en base k) et que cette mesure dépend de cette convention : il y a des langages de basse automaticité dont l'image miroir a une haute automaticité [110].

Une suite ne peut pas être k-automatique si toutes les suites dans le k-noyau sont distinctes (théorème 10). Une suite est dite maximalement diverse si les sous-suites $\{(u(k^s n + r))_{n\in\mathbb{N}};\ s \geq 1,\ 0 \leq r \leq k^s - 1\}$ sont toutes distinctes. Shallit prouve dans [179] que les suites sturmiennes sont maximalement diverses, ce qui prouve qu'elles sont loin d'être automatiques, même quand elles sont points fixes de substitutions. Plus précisément, Shallit déduit du théorème des trois longueurs une mesure d'automaticité des suites sturmiennes [179].

Yao donne également dans [199] un critère de non-automaticité motivé par un critère de transcendance dû à de Mathan (voir [146]). Ce critère est énoncé en termes d'approximation diophantienne mais Koskas en a donné une version combinatoire dans [140], utilisant les automates. En particulier, Yao donne une preuve simple d'un résultat de Mkaouar [152]: la suite des quotients partiels de la suite de Baum et Sweet (la série dont les coefficients sont donnés par cette suite est la solution unique de $Xf^3 + f + X = 0$ dans $\mathbb{F}_2((1/X))$) n'est pas k-automatique, quelque soit l'entier $k \geq 2$.

3.5 Passage à la dimension 2

Suites automatiques doubles La structure d'automate fini peut s'étendre aux suites doubles selon deux directions. L'idée la plus naturelle consiste à généraliser la notion d'automate et de substitution uniforme, en suivant les travaux de Salon [170, 171]. On considère ainsi des suites automatiques doubles, engendrées par automates doubles ou de manière équivalente, des suites images par une projection littérale de points fixes de substitutions qui associent à une lettre un motif carré. On définit la **fonction de complexité rectangulaire** $P(m,n)$ d'une suite double comme la fonction qui compte le nombre de facteurs rectangulaires de taille donnée. On voit aisément, en calquant la preuve qui correspond au cas unidimensionnel, que la complexité satisfait alors

$$\exists C > 0,\ \forall (m,n),\ P(m,n) \leq C \sup(m,n)^2.$$

Substitutions doubles Notons que l'on peut également généraliser la notion de substitution de longueur non constante en associant aux lettres de l'alphabet des motifs non forcément carrés ou rectangulaires. Nous donnons de tels exemples dans [21]. Afin de pouvoir itérer ces substitutions, nous disposons soit d'une règle globale de placement des images des lettres, soit d'une règle locale, permettant selon le contexte, c'est-à-dire selon les lettres entourant une lettre donnée, de disposer les images de ces lettres les unes par rapport aux autres. On engendre ainsi par itération de ces substitutions des suites doubles qui peuvent être considérées comme des généralisations des suites sturmiennes. Nous reviendrons sur ces suites dans le paragraphe 4.3.

Automates cellulaires Une seconde voie de généralisation consiste à engendrer une suite double en itérant l'action d'un automate cellulaire sur une condition initiale donnée. Un **automate cellulaire** unidimensionnel est une application $\mathcal{A}_\varphi$ de l'ensemble des suites $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même définie par une **application locale** $\varphi :\ A^{2r+1} \to A$ de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_\varphi :\ A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (v_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$\text{avec : } \forall n,\ v_n = \varphi(u_{n-r}, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+r}).$$

En termes topologiques, un automate cellulaire est une application continue de $A^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même qui commute avec le décalage (théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon). Pour un survol sur les propriétés dynamiques et topologiques des automates cellulaires unidimensionnels, voir [41].

On considère ici des suites doubles engendrées par l'itération, à partir d'une condition initiale presque partout nulle, d'un automate cellulaire linéaire défini sur un anneau de la forme $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, pour $l \geq 2$. On peut travailler avec une représentation en séries formelles. On pose $A = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Soit $A((X))$ le corps des séries formelles de Laurent à coefficients dans A :

$$A((X)) = \{\sum_{n\geq n_0} f_n X^n,\ f_n \in A\}.$$

Soit $R(X) = \sum_{i=0}^{d} r_i X^i$ un polynôme à coefficients dans A. L'**automate cellulaire linéaire** $\mathcal{A}_R$ engendré par le polynôme R est défini de la manière suivante sur l'ensemble $A((X))$ de toutes les **configurations**

$$\mathcal{A}_R :\ A((X)) \to A((X))$$

$$f(X) \mapsto R(X)f(X).$$

La règle de transition locale $\varphi :\ A^{d+1} \to A$ est linéaire et donnée par

$$\varphi(x_0, \ldots, x_d) = \sum_{i=0}^{d} r_{d-i} x_i.$$

L'orbite $\mathcal{O}_f$ d'une série formelle $f \in A((X))$ sous l'action de $\mathcal{A}_R$ est égale à l'ensemble

$$\mathcal{O}_f = \{\mathcal{A}_R^t(f);\ t \in \mathbb{N}\} = \{R(X)^t f(X);\ t \in \mathbb{N}\}.$$

On représente la série $f(X) = \sum f_i X^i$ sur le réseau $\mathbb{Z}$ en associant l'état f_i à la cellule de site $i \in \mathbb{Z}$. On représente de même sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ l'évolution temporelle de la condition initiale f sous l'action de $\mathcal{A}_r$: la cellule de site (i,t) est dans l'état $f(i,t)$ à l'instant t (où $t \in \mathbb{N}$), avec

$$\mathcal{A}_R^t(f) = f(X)R(X)^t = \sum_i a(i,t)X^i.$$

L'automate cellulaire engendre donc une suite double a à partir d'une condition initiale f. Nous nous restreindrons ici à des conditions initiales polynomiales. On considère donc un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On définit alors les suites doubles $a = (a(u,v))_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}$ (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) et $a_l = (a_l(u,v))_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}$ (à coefficients dans $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$) de la manière suivante :

$$\forall u \in \mathbb{Z},\ \sum_{v\in\mathbb{Z}} a(u,v)X^v :\equiv P(X)R(X)^u,$$

$$\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ a_l(u,v) = a(u,v) \text{ modulo } l.$$

On dit que la suite double a est engendrée par le polynôme R avec condition initiale P.

En particulier, si $P(X) = 1$ et $R(X) = 1 + X$, on obtient la suite double des coefficients binomiaux $(\binom{u}{v})_{u,v}$ mod d.

La question du lien avec les suites automatiques doubles est naturelle. Cette question est traitée en détail dans [11, 12, 13].

Théorème 15 (Allouche, von Haeseler, Peitgen, Petersen et Skordev) *Soit χ le nombre de diviseurs premiers p de l pour lesquels le polynôme R réduit modulo p n'est pas un monôme. Alors,*

- *si $\chi \geq 2$, il n'existe pas d'entier $k \geq 2$ pour lequel la suite double a est k-automatique;*
- *si $\chi = 1$ et si p désigne le nombre premier pour lequel la réduction n'est pas monomiale, alors la suite double a est p^s-automatique, pour tout entier $s \geq 1$, et n'est jamais k-automatique pour une autre valeur de k;*
- *si $\chi = 0$, alors la suite double a est k-automatique pour tout $k \geq 2$.*

On peut donner une description détaillée de la complexité du triangle de Pascal réduit modulo un nombre premier et dans le cas général, on peut mesurer la croissance de la fonction de complexité [9]. La complexité est quadratique si et seulement si on réduit modulo une puissance d'un nombre premier. Elle fournit donc une sorte de mesure quantitative indiquant que la "complication" du triangle de Pascal croît avec le nombre de diviseurs premiers distincts de l'entier modulo lequel on réduit le triangle. Ce résultat se généralise aux automates cellulaires linéaires avec condition initiale quelconque [33]. La preuve repose d'une part sur le fait que l'on peut se ramener à l'étude de la complexité en ligne, et d'autre part sur le fait que la complexité possède une propriété d'indépendance si l'on réduit modulo deux entiers premiers entre eux. On se ramène alors au cas où l'on réduit modulo un premier p. La difficulté consiste à minorer la complexité. Pour cela, il suffit de donner une borne inférieure pour le nombre de facteurs ayant plusieurs extensions. Cette idée est inspirée par les techniques de minoration de la complexité développées dans [159].

4 Suites doubles

La question de la définition de la fonction de complexité se pose dès que l'on passe en dimension supérieure. Nous considérons ici des suites doubles, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans un ensemble fini. Nous nous intéresserons de plus à la notion de fonction de complexité rectangulaire. Cette notion peut sembler peu satisfaisante puisque nous privilégions ainsi une base du réseau $\mathbb{Z}^2$. Néanmoins elle est relativement bien adaptée aux suites que nous considérons aux paragraphes 4.2 et 4.3. Pour une définition plus générale de la complexité, voir par exemple [173]. Les questions suivantes sont alors naturelles : quelles fonctions de complexité existent ? Peut-on obtenir une caractérisation géométrique d'une suite à partir de sa fonction de complexité? Que se passe-t-il en particulier dans le cas périodique?

4.1 Suites doubles périodiques

Soit $U = (U(m,n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite double. On appelle **facteur rectangulaire** de taille (m,n) de la suite U un tableau $W = [w_{i,j}]$ de la forme

$$\begin{matrix} w_{1,n} & \dots & w_{m,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1,1} & \dots & w_{m,1}, \end{matrix}$$

tel qu'il existe k, l satisfaisant : $\forall\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ w_{i,j} = U_{k+i-1,l+j-1}$. La **fonction de complexité rectangulaire** $P(m,n)$ compte le nombre de facteurs rectangulaires de taille (m,n).

Une suite double est dite **périodique** si elle est invariante par translation, c'est-à-dire si elle admet un vecteur de périodicité non nul et à coordonnées entières :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2/\{0,0\},\ \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2,\ U(i+a, j+b) = U(i,j).$$

Notons que le fait que le réseau des vecteurs de périodicité soit de rang 2 est caractérisé par une complexité rectangulaire bornée. Néanmoins, il n'existe pas de caractérisation par la fonction de complexité rectangulaire des suites périodiques : on peut en effet construire des suites doubles admettant un vecteur périodique non nul, et de complexité arbitrairement grande; il suffit pour cela de considérer une suite unidimenisonnelle $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de complexité 2^n et de construire $(u(m+n,n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$. Réciproquement, Nivat a conjecturé le résultat suivant.

Conjecture 1 *Soit $U(m,n)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite double et soit $P(m,n)$ sa fonction de complexité rectangulaire. S'il existe (m_0, n_0) tel que*

$$P(m_0, n_0) \le m_0 n_0,$$

alors la suite double U est périodique.

Notons que les travaux d'Epifanio, Mignosi et Koskas [90] laissent entrevoir une voie d'accès à travers une version bidimensionnelle du théorème de Fine et Wilf. Sanders et Tijdeman ont prouvé la conjecture dans [174] pour des facteurs de taille $(2,n)$ ou $(n,2)$: s'il existe n tel que $P(2,n) \le 2n$ ou $P(n,2) \le 2n$, alors la suite est périodique. Une conjecture plus générale est donnée dans [172, 173, 174], en étendant la notion de complexité. En revanche, dès que l'on passe en dimension supérieure ou dès que l'on cherche à énoncer une conjecture utilisant des motifs autres que des rectangles, on peut donner des contre-exemples.

4.2 Suites de complexité $mn + n$

Cassaigne étudie et caractérise dans [56] les suites de complexité $mn + 1$, cas limite, selon la conjecture, entre le cas périodique et le cas non périodique.

Ces exemples sont non uniformément récurrents et correspondent en un sens, aux cas dégénérés des suites de complexité $n+1$ sur $\mathbb{Z}$, comme la suite

$$\ldots 0000001000000 \ldots$$

Comment alors construire des suites de basse complexité uniformément récurrentes ? Une suite double est dite **uniformément récurrente** si pour tout entier n, il existe N tel que tout facteur carré de taille N contienne tout facteur carré de taille n. On a vu que les suites doubles engendrées par automates cellulaires ont une complexité quadratique. De même que dans le cas unidimensionnel, la structure sous-jacente est, en un sens, trop rigide pour permettre d'atteindre une complexité moindre : rappelons qu'une suite automatique ne peut avoir pour complexité $n+1$.

Une idée naturelle afin de construire une suite qui soit à la fois de basse complexité et non périodique, consiste alors à disposer en ligne des suites sturmiennes [38]. Supposons donc que l'on dispose en ligne des suites sturmiennes de même angle, afin de réduire le "désordre". Une suite sturmienne d'angle α est déterminée par la donnée de son point de départ et du sens d'ouverture des intervalles de la partition selon laquelle elle code les trajectoires (théorème 1). Soit ρ_i le point de départ de la ligne d'indice i. Considérons deux cas extrémaux : supposons d'une part, que les points de départ correspondant à chaque ligne sont des itérés de la rotation d'angle α ($\rho_i = i\alpha,\ \forall i$); supposons d'autre part, que les points de départ sont gouvernés par une seconde rotation irrationnelle d'angle β ($\rho_i = i\beta,\ \forall i$), où $1, \alpha, \beta$ sont rationnellement indépendants. Dans le premier cas, on obtient une suite de complexité $m+n$, pour tout (m,n). Dans le second cas, on obtient une suite uniformément récurrente et non périodique de complexité $mn+n$, pour m assez grand.

On montre dans [38] qu'une étude précise du langage des facteurs de taille $(m,2)$, dans le cas où $\forall m$, $P(m,2) \leq 2m+2$, permet de caractériser les fonctions de complexité de suites dont toutes les lignes sont des suites sturmiennes de même angle. On montre alors qu'ou bien la suite est périodique, ou bien sa fonction de complexité satisfait

$$\exists m_0,\ \forall m \geq m_0,\ P(m,n) = mn+n.$$

On en déduit le résultat d'impossibilité suivant pour une suite uniformément récurrente.

Corollaire 2 *Il n'existe pas de suite uniformément récurrente telle que*

$$\forall (m,n),\ P(m,n) = mn+1$$

ou telle que

$$\forall (m,n),\ P(m,n) = mn + \inf(m,n).$$

Rappelons que le cas des suites de complexité $mn+1$ a également été traité dans [56], par une approche purement combinatoire.

On peut de plus caractériser les suites de complexité $m+n$ et les suites de complexité $mn+n$.

Théorème 16 *Une suite double U a pour complexité $m+n$ si et seulement s'il existe une suite u unidimensionnelle de complexité $n+1$ telle que*

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = u(m+n,0),$$

ou

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = u(m-n,0).$$

Théorème 17 *Une suite double uniformément récurrente U définie sur $\{0,1\}$ a pour complexité $mn+n$ pour m assez grand si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $1,\alpha,\beta$ sont rationnellement indépendants, et $\rho \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait : soit*

$$\forall n,\ (\ U(m,n) = 0 \Leftrightarrow \{m\alpha + n\beta + \rho\} \in [0,\alpha[),$$

soit

$$\forall n,\ (\ U(m,n) = 0 \Leftrightarrow \{m\alpha + n\beta + \rho\} \in]0,\alpha]).$$

4.3 Une généralisation des suites sturmiennes

Ces suites doubles uniformément récurrentes et de complexité $mn+n$, peuvent être considérées comme une généralisation à deux dimensions des suites sturmiennes. Elles sont en effet obtenues par une projection littérale de suites doubles codant l'approximation d'un plan : on peut approcher un plan de normale irrationnelle par des faces carrées orientées selon les trois plans de coordonnées; cette approximation est appelée **plan discret** ou **surface plissée**; si l'on projette cette surface sur le plan $x+y+z=0$, selon la direction $(1,1,1)$, on obtient un pavage du plan par trois sortes de losanges, à savoir les projections des trois types de faces; on peut coder cette projection sur $\mathbb{Z}^2$ en associant aux losanges le type de la face projetée; on obtient ainsi une suite définie sur un alphabet à trois lettres; on montre alors que ces suites codent une action de $\mathbb{Z}^2$ sur le cercle unité [37]. Cette description permet aisément de calculer la fonction de complexité; on obtient : $\forall (m,n),\ P(m,n) = mn+m+n$. On peut majorer, de plus, le nombre des fréquences des facteurs de taille (m,n) par $\min(m,n)+5$, en appliquant une généralisation du théorème des trois longueurs, due à Geelen et Simpson [109] (voir également le paragraphe 2.2). Ces suites sont uniformément récurrentes et non périodiques. En appliquant une projection littérale, on obtient les suites citées ci-dessus (voir théorème 17) de complexité $mn+n$. Ces dernières sont les suites de plus basse complexité rectangulaire connues parmi les suites doubles uniformément récurrentes et non périodiques. Enfin, ces suites présentent des propriétés de symétrie généralisant la notion de palindromie unidimensionnelle que nous étudions dans [39] : on obtient ainsi une caractérisation de ces suites, inspirée par la caractérisation des suites sturmiennes par palindromes donnée dans [130].

4.4 Substitutions bidimensionnelles

Ces suites sont de plus engendrées par des substitutions bidimensionnelles dont l'itération est gouvernée par l'algorithme de Jacobi-Perron [21], ce qui généralise le cas sturmien [27]. La preuve repose sur un processus d'induction/exduction. Il ne semble pas que l'algorithme de Jacobi-Perron joue ici un rôle privilégié. En effet, l'introduction d'autres algorithmes de fractions continues bidimensionnelles permet de définir de nouvelles substitutions, que l'on peut itérer sans crainte de chevauchements. Néanmoins, pour vérifier que ces substitutions engendrent bien une suite définie sur tout $\mathbb{Z}^2$, des problèmes techniques d'ordre combinatoire apparaissent, que nous n'avons pu résoudre actuellement que dans le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron. L'étude des fréquences des facteurs rectangulaires conduit, de plus, à des considérations diophantiennes de minimisation de formes linéaires. Ceci semble donc corroborer le fait que l'algorithme de Jacobi-Perron ne résout pas toutes les questions se posant concernant ces suites, contrairement au cas unidimensionnel totalement décrit par l'algorithme des fractions continues.

4.5 Autour de la surface plissée

Les suites sturmiennes doubles sont obtenues par projection d'un plan discret, encore appelé **surface plissée** par Ito et Ohtsuki [126, 127]. L'étude de cette surface a de nombreuses applications diophantiennes et dynamiques.

Ito et Ohtsuki introduisent ainsi dans [126, 127] une notion de substitution sur les faces carrées, dont l'itération engendre la surface plissée. (Ce sont ces substitutions dont la traduction en termes combinatoires permet d'engendrer les suites sturmiennes doubles.) Ces substitutions sont associées à des éléments de $SL(3,\mathbb{Z})$ relativement à un développement en fractions continues multidimensionnelles. Inversement, étant donné une matrice positive primitive Pisot M de taille 3×3 à coefficients entiers, de déterminant $\det(M) \geq 1$, on peut engendrer un pavage quasi-périodique en utilisant une substitution associée à la matrice M (voir [108]). En particulier, ce procédé permet de définir, après renormalisation, deux systèmes dynamiques sur le domaine ainsi obtenu dont la frontière est fractale, à savoir, un sous-shift de matrice $\det(M)M$ et un échange de morceaux.

La question de l'existence d'une représentation géométrique pour un système dynamique symbolique donné est naturelle. En généralisant cette notion de substitution sur les faces et toujours par renormalisation de la surface plissée, Arnoux et Ito obtiennent le résultat suivant de représentation pour les substitutions primitives Pisot, sous la condition supplémentaire d'existence de coïncidences [24]. (Une substitution est dite **Pisot** si la matrice associée admet une valeur propre réelle plus grande que 1 et si toutes les autres valeurs propres sont strictement plus petites que 1 en module.)

Théorème 18 (Arnoux-Ito) *Soit σ une substitution primitive Pisot unitaire sur d lettres admettant des coïncidences pour toutes les lettres. Le système uniquement ergodique engendré par σ est isomorphe en mesure à un échange de morceaux.*

Les pièces de l'échange de morceaux sont construites de manière explicite; elles sont alors les bases de cylindres formant une partition de Markov pour l'automorphisme du tore associé à la substitution.

Ce travail a été initié par l'étude du système dynamique engendré par la substitution de Rauzy : $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$, dont la représentation géométrique est connue sous le nom de **fractal de Rauzy** [165, 123] : l'échange de morceaux peut être alors en fait décrit comme une rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$. Cette construction est basée sur le lien qui existe entre le point fixe de la substitution de Rauzy et la répartition dans $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$ de la suite $(N\eta)_{N\in\mathbb{N}}$, où le vecteur $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ est tel que $(1, \eta_1, \eta_2)$ est une base du module des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\zeta)$, ζ étant l'unique racine réelle de $X^3 + X^2 + X - 1$. Pour une étude détaillée du fractal de Rauzy, voir par exemple [149]. Voir également [51] et [115, 116] (ainsi que les références citées), pour des résultats sur la représentation géométrique des substitutions.

Plus généralement, l'étude de la surface plissée intervient dans des problèmes de discrépance bidimensionnels. Ainsi, dans [107], une expression de type Van der Corput est-elle donnée pour la suite $(n(\alpha, \beta))_n$ dans le tore $\mathbb{T}^2$ (avec $1, \alpha, \beta$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$) ainsi qu'une caractérisation géométrique de ses propriétés de distribution, généralisant le théorème des trois longueurs.

Notons que dans ces exemples, la surface plissée subit un processus de renormalisation et est associée à des rotations sur un tore de dimension au moins 2. Arithmétiquement, les problèmes d'approximation qui se posent correspondent à des problèmes d'approximation simultanée. Nous nous trouvons dans une situation "duale" par rapport à l'étude combinatoire de la surface plissée, dont la projection engendre les suites sturmiennes doubles : en effet, nous obtenons une action de $\mathbb{Z}^2$ sur le tore de dimension 1 donnée par l'action de deux rotations et les problèmes d'approximation correspondent à des minimisations de formes linéaires, du type

$$\min\{i\alpha + j\beta\},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Références

[1] P. ALESSANDRI *Codages de rotations et basses complexités*, Université Aix-Marseille II, Thèse, 1996.

[2] P. ALESSANDRI, V. BERTHÉ *Three distance theorems and combinatorics on words*, Enseig. Math. **44** (1998), 103–132.

[3] J.-P. ALLOUCHE *Somme des chiffres et transcendence*, Bull. Soc. math. France **110** (1982), 279–285.

[4] J.-P. ALLOUCHE *Automates finis en théorie des nombres*, Exposition. Math., **5** (1987), 239–266.

[5] J.-P. ALLOUCHE *Note sur un article de Sharif et Woodcock*, Séminaire de théorie des Nombres de Bordeaux, Série II **1** (1989), 631–633.

[6] J.-P. ALLOUCHE *Finite automata in 1-D and 2-D physics*, in J.-M. Luck, P. Moussa, and M. Waldschmidt eds, Number Theory and Physics, Proceedings in Physics **47**, Springer, Berlin (1990), 177–184.

[7] J.-P. ALLOUCHE *Finite automata and arithmetic* Séminaire Lotharingien de Combinatoire (Gerolfingen, 1993) Prépubl. Inst. Rech. Math. Av., Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1993 **34** (1993), 1–18.

[8] J.-P. ALLOUCHE *Sur la complexité des suites infinies*, Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994), 133–143.

[9] J.-P. ALLOUCHE, V. BERTHÉ *Triangle de Pascal, complexité et automates*, Bull. Belg. Math. Soc. **4** (1997), 1–23.

[10] J.-P. ALLOUCHE, M. BOUSQUET-MÉLOU *On the conjecture of Rauzy and Shallit for infinite words*, Comment. Mah. Univ. Carolinae **36** (1995), 705–711.

[11] J.-P. ALLOUCHE, F. von HAESELER, H.-O. PEITGEN, G. SKORDEV *Linear cellular automata, finite automata and Pascal's triangle*, Discrete Applied Mathematics **66** (1996), 1–22.

[12] J.-P. ALLOUCHE, F. von HASELER, H.-O. PEITGEN, A. PETERSEN, G. SKORDEV *Automaticity of double sequences generated by one-dimensional linear cellular automata*, Theoret. Comput. Sci. **88** (1997), 195–209.

[13] J.-P. ALLOUCHE, F. von HASELER, H.-O. PEITGEN, A. PETERSEN, G. SKORDEV *Linear cellular automata and automatic sequences*, Parallel Computing **23** (1997), 1577–1592.

[14] J.-P. ALLOUCHE, M. MENDÈS FRANCE *Quasicrystal Ising chains and automata theory*, J. Stat. Phys. **42** (1986), 809–821.

[15] J.-P. ALLOUCHE, M. MENDÈS FRANCE *Automata and automatic sequences*, Actes de l'École de Physique Théorique des Houches: "Beyond quasicrystals", Les Éditions de Physique, Springer (1995), 293–367.

[16] J.-P. ALLOUCHE, J. SHALLIT *The ring of k-regular sequences*, Theoret. Comput. Sci. **98** (1992), 163–187.

[17] E. ALTMAN, B. GAUJAL, A. HORDIJK *Balanced sequences and optimal routing*, Rapport TW-97-08, Université de Leiden, Pays-Bas (1998).

[18] P. ARNOUX *Représentation géométrique des systèmes dynamiques symboliques*, Habilitation à diriger des recherches, Université Aix-Marseille II, 1991.

[19] P. ARNOUX *Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire*, Enseig. Math. **40** (1994), 29–48.

[20] P. ARNOUX *Recoding Sturmian sequences on a subshift of finite type: chaos from order, a worked out example*, Fiesta 98, Chili.

[21] P. ARNOUX, V. BERTHÉ, S. ITO *Discrete planes, $\mathbb{Z}^2$-action, Jacobi Perron algorithms and substitutions*, prépublication 99.

[22] P. ARNOUX, S. FERENCZI, P. HUBERT *Trajectories of rotations*, Acta Arith. **87** (1999), 209–217.

[23] P. ARNOUX, A. FISHER *The scenery flow for geometric structures on the torus: the linear setting*, prépublication 99.

[24] P. ARNOUX, S. ITO *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, IML, prétirage 98–18.

[25] P. ARNOUX, C. MAUDUIT, I. SHIOKAWA, J. TAMURA *Complexity of sequences defined by billiards in the cube*, Bull. Soc. math. France **122** (1994), 1–12.

[26] P. ARNOUX, C. MAUDUIT, I. SHIOKAWA, J. TAMURA *Rauzy's conjecture on billiards in the cube*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 211–218.

[27] P. ARNOUX, G. RAUZY *Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$*, Bull. Soc. math. France **119** (1991), 199–215.

[28] Y. BARYSHNIKOV *Complexity of trajectories in rectangular billiards*, Comm. Math. Phys. **174** (1995), 43–56.

[29] R. M. BEALS, D. S. THAKUR *Computational classification of numbers and algebraic properties*, Internat. Math. Rev. Notices **15** (1998), 799–818.

[30] V. BERTHÉ *Conditional entropy of some automatic sequences*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994) 7993–8006.

[31] V. BERTHÉ *Entropy in deterministic and random systems*, Actes de l'École de Physique Théorique des Houches: "Beyond quasicrystals", Les Éditions de Physique, Springer (1995) 441–463.

[32] V. BERTHÉ *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes*, Theoret. Comput. Sci. **165** (1996), 295–309.

[33] V. BERTHÉ *Complexité et automates cellulaires linéaires*, prépublication 99.

[34] V. BERTHÉ *Sequences of low complexity: automatic and Sturmian sequences*, "Symbolic dynamics and its applications" (F. Blanchard, A. Maas, A. Nogueira eds) Cambridge University Press, à paraître.

[35] V. BERTHÉ, N. CHEKHOVA, S. FERENCZI *Covering numbers: arithmetics and dynamics for rotations and interval exchanges*, J. Anal. Math., à paraître.

[36] V. BERTHÉ, H. NAKADA *On continued fraction expansions in positive characteristic: equivalence relations and some metric properties*, prépublication 99.

[37] V. BERTHÉ, L. VUILLON *Tilings and rotations: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences* , prétirage 97–19, IML.

[38] V. BERTHÉ, L. VUILLON *Suites doubles de basse complexité*, prétirage 99–10, IML.

[39] V. BERTHÉ, L. VUILLON *Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences*, prépublication 99.

[40] BEYOND QUASICRYSTALS (F. Axel, D. Gratias eds) Les éditions de physique les Ulis, Springer, Berlin, **3**, 1995.

[41] F. BLANCHARD, P. KURKA, A. MAASS *Topological and measure-theoretic properties of one-dimensional cellular automata*, Phys. D **103** (1997), 86–99.

[42] E. BOMBIERI, J. E. TAYLOR *Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory: some preliminary connections*, Proceedings of Kovalevsky Symposium, Contemporary Mathematics, Americ. Math. Soc. **64** (1987) 241–264.

[43] E. BOMBIERI, J. E. TAYLOR *Wich distributions of matter diffract? An initial investigation. International workshop on aperiodic crystals (Les Houches,1986)* , J. Physique, Colloque C3, supplément au $n°7$, **47** (1986), C3–19.

[44] J. M. BORWEIN, P. B. BORWEIN *On the generating function of the integer part* $[n\alpha+\gamma]$, J. Number Theory **43** (1993), 293–318.

[45] M. BOSHERNITZAN *A unique ergodicity of minimal symbolic flows with linear block growth*, J. Anal. Math. **44** (1984), 77–96.

[46] M. BOSHERNITZAN *A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic*, Duke Math. J. **52** (1985), 723–752.

[47] M. BOSHERNITZAN *A condition for unique ergodicity of minimal symbolic flows*, Ergodic Theory Dynam. Sys. **12** (1992), 425–428.

[48] M. BOSHERNITZAN *Communication privée*, 99.

[49] M. BOSHERNITZAN, C. R. CARROLL *An extension of Lagrange's theorem to interval exchange transformations over quadratic fields*, J. Anal. Math. **72** (1997), 21–44.

[50] B. L. BURROWS, K. W. SULSTON *Measures of disorder in non-periodic sequences*, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991), 3979–3987.

[51] V. CANTERINI, A. SIEGEL *Automate des suffixes et des préfixes, et représentation des substitutions*, travail en cours.

[52] J. CASSAIGNE *Special factors of sequences with linear subword complexity*, Developments in Language Theory II (DLT'95), Magdeburg (Allemagne), World Scientific (1996), 25–34.

[53] J. CASSAIGNE *On a conjecture of J. Shallit*, International Conference on Automata, Languages and Programing (ICALP'97), Lecture Notes in Comput. Sci. **1256**, Springer Verlag (1997), 693–704.

[54] J. CASSAIGNE *Sequences with grouped factors*, Developments in Language Theory III (DLT'97), Publications of the Aristotle University of Thessaloniki (1998), 211–222.

[55] J. CASSAIGNE *Limit values of the recurrence quotient of Sturmian sequences*, Theoret. Comput. Sci. **218** (1999), 3–12.

[56] J. CASSAIGNE *Double sequences with complexity mn+1*, J. Auto. Lang. Comb., à paraître.

[57] J. CASSAIGNE *Sur la conjecture de Rauzy*, travail en cours.

[58] J. W. S. CASSELS *Über* $\underline{\lim}_{x\to+\infty} x|\theta x+\alpha-y|$, Math. Annalen **127** (1954), 288–304.

[59] J. W. S. CASSELS *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge, Cambridge University Press, 1957.

[60] N. CHEKHOVA *Nombres de recouvrement*, Thèse, Université Aix-Marseille II, 1997.

[61] N. CHEKHOVA *Nombres de recouvrement des rotations*, Theoret. Comput. Sci., à paraître.

[62] N. CHEKHOVA, P. HUBERT, A. MESSAOUDI *Propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques de la substitution de Tribonacci*, prétirage 98–24, IML.

[63] N. CHEVALLIER *Three distance theorem and grid graph*, prépublication 99.

[64] G. CHRISTOL *Ensembles presque périodiques k-reconnaissables*, Theoret. Comput. Sci. **9** (1979), 141–145.

[65] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE, G. RAUZY, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. math. France **108** (1980), 401–419.

[66] A. COBHAM *On the base dependence of sets of numbers recognizable by finite automata*, Math. Systems Theory **3** (1969), 186–192.

[67] A. COBHAM *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.

[68] E. M. COVEN, G. A. HEDLUND *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[69] T. W. CUSICK, A. M. ROCKETT, P. SZÜSZ *On inhomogeneous diophantine approximation*, J. Number Theory **48** (1994), 259–283.

[70] N. G. de BRUIJN *A combinatorial problem*, Rominklijke Netherland Academic Van Wetenschepen Proc. **49** Part. 20 (1946), 758–764.

[71] F. M. DEKKING *Combinatorial and statistical properties of sequences generated by substitutions*, Thèse, Université de Nimègue, 1980.

[72] F. M. DEKKING *On the Thue-Morse Measure*, Acta Univ. Carol., Math. Phys. **33** (1992), 35–40.

[73] M. DEKKING, M. MENDÈS FRANCE, A. van der POORTEN *Folds!*, Math. Intell. **4** (1982), 130–138; *Folds!II: symmetry disturbed* Math. Intell. **4** (1982), 173–181; *Folds!III: more morphisms* Math. Intell. **4** (1982), 190–196.

[74] A. DE LUCA, F. MIGNOSI *Some combinatorial properties of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. **136** (1994), 361–385.

[75] I. R. DESCOMBES *Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **75** (1956), 284–355.

[76] G. DIDIER *Échanges de trois intervalles et suites sturmiennes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), 463–478.

[77] G. DIDIER *Codages de rotations et fractions continues*, J. Number Theory **71** (1998), 275–306.

[78] G. DIDIER *Combinatoire des codages de rotations*, Acta Arith. **85** (1998), 157–177.

[79] G. DIDIER *Caractérisation des N-écritures et applications à l'étude des suites de complexité ultimement $n+c^{ste}$*, Theoret. Comput. Sci. **215** (1999), 31–49.

[80] X. DROUBAY *Palindromes in the Fibonacci word*, Inform. Process. Lett. **55** (1995), 217–221.

[81] X. DROUBAY, G. PIRILLO *Palindromes and Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci., to appear.

[82] X. DROUBAY, J. JUSTIN, G. PIRILLO *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, prépublication 98/06 Liafa.

[83] Y. DUPAIN *Intervalles à restes majorés pour la suite* $\{n\ alpha\}$, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **29** (1977), 289–303.

[84] Y. DUPAIN, V. T. SÓS *On the one-sided boundedness of the discrepancy-function of the sequence* $n\alpha$, Acta Arith. **27** (1980), 363–374.

[85] Y. DUPAIN, V. T. SÓS *On the discrepancy of* $n\alpha$ *sequences*, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai **34**, Topics in classical number theory, Budapest (1981), 355–387.

[86] F. DURAND *A characterization of substitutive sequences using return words*, Discrete Math. **179** (1998), 89–101.

[87] F. DURAND *A generalization of Cobham's theorem*, Theory Comput. Sci. **31**, 169–185.

[88] F. DURAND *Linearly recurrent subshifts*, à paraître dans Ergod. Theory Dynam. Sys.

[89] F. DURAND, B. HOST, C. SKAU *Substitutions, Bratelli diagrams and dimension groups*, à paraître dans Ergod. Theory Dynam. Sys.

[90] C. EPIFANIO, P. MIGNOSI, M. KOSKAS *On a conjecture on bidimensional words*, prépublication 99.

[91] A. EHRENFEUCHT, K. P. LEE, G. ROZENBERG *Subwords of various classes of deterministic developmental languages without interactions*, Theoret. Comput. Sci. **1** (1975), 59–75.

[92] S. EILENBERG *Automata, languages, and machines*, Vol. A, Academic Press, 1974.

[93] S. FERENCZI *Systèmes localement de rang un*, Ann. Inst. Henri Poincaré **20** (1984), 35–51.

[94] S. FERENCZI *Tiling and local rank properties of the Morse sequence*, Theoret. Comput. Sci. **129** (1994), 369–383.

[95] S. FERENCZI *Les transformations de Chacon : combinatoire, structure géométrique, lien avec les systèmes de complexité* $2n+1$, Bull. Soc. math. France **123** (1995), 271–292.

[96] S. FERENCZI *Rank and symbolic complexity*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), 663–682.

[97] S. FERENCZI *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel J. Math. **100** (1997), 189–207.

[98] S. FERENCZI *Systems of finite rank*, Colloq. Math. **73** (1997), 35–65.

[99] S. FERENCZI *Complexity of sequences and dynamical systems*, Discrete Math. **206** (1999), à paraître.

[100] S. FERENCZI *Substitutions and symbolic dynamical systems*, Cours du CIMPA "Finite automata and its applications", Wuhan, Chine, 96, à paraître.

[101] S. FERENCZI, Z. KÁSA *Complexity for finite factors and infinite sequences*, Theoret. Comput. Sci., à paraître (actes de la confŕence *Words*, Rouen, 1997).

[102] S. FERENCZI, C. MAUDUIT *Transcendence of numbers with a low complexity expansion*, J. Number Theory **67** (1997), 146–161.

[103] S. FERENCZI, C. HOLTON, L. ZAMBONI *Simultaneous approximation of irrationals and three-interval exchanges*, travail en cours.

[104] N. J. FINE et H. S. WILF *Uniqueness theorems for periodic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 109–114.

[105] A. S. FRAENKEL *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 105–114.

[106] A. E. FRID *On the frequency of factors in a D0L WORD*, Journal of Automata, Languages and Combinatorics **3** (1998), 29–41.

[107] T. FUJITA, S. ITO, S. NINOMYA *Kronecker sequences, Van der Corput type sequences, and the modified Jacobi-Perron algorithm*, prépublication 99.

[108] M. FURUKADO, S. ITO *The quasi-periodic tiling of the plane and Markov subshifts*, Japan J. Math. **24** (1998), 1–42.

[109] A. S. GEELEN, R. J. SIMPSON *A two dimensional Steinhaus theorem*, Australas. J. Combin. **8** (1993), 169–197.

[110] I. GLAISTER, J. SHALLIT *Polynomial automaticity, context-free languages, and fixed points of morphisms (extended abstract)*, Mathematical foundations of Computer Science 1996 (Cracow), 382–393, Lecture Notes in Comput. Sci., 1113, Springer, Berlin, 1996.

[111] R. L. GRAHAM *Covering the positive integers by disjoint sets of the form* $\{n\alpha+\beta\} : n = 1, 2, \ldots\}$, J. Combin. Theory Ser. A **15** (1973), 354–358.

[112] Y. HARA, S. ITO *On real quadratic fields and periodic expansions*, Tokyo J. Math. **12** (1989) 357–370.

[113] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Science Publications (1979).

[114] A. HEINIS *On low-complexity* $\mathbb{Z}$*-words and their factors*, Rapport MI 02-99, Université de Leiden, Pays-Bas (1999).

[115] C. HOLTON, L. ZAMBONI *Substitutions, systems of partial isometries on* $\mathbb{R}$ *and actions on trees*, Bull. Belgian Math. Soc., Simon Stevin (1999), à paraître.

[116] C. HOLTON, L. ZAMBONI *Geometric realizations of substitutions*, Bull. Soc. math. France **126** (1998), 149–179.

[117] C. HOLTON, L. ZAMBONI *Descendants of primitive substitutions*, Theory Comput. Systems **32** (1999), 133–157.

[118] P. HUBERT *Complexité de suites définies par des billards rationnels*, Bull. Soc. math. France **123** (1995), 257–270.

[119] P. HUBERT *Propriétés combinatoires des suites définies par le billard dans les triangles pavants*, Theoret. Comput. Sci. **164** (1996), 165–183.

[120] P. HUBERT *Well balanced sequences*, à paraître dans Theoret. Comput. Sci.

[121] S. ITO *Some skew product transformations associated with continued fractions and their invariant measures*, Tokyo J. Math. **9** (1986), 115–133.

[122] S. ITO *On periodic expansions of cubic numbers and Rauzy fractals*, prépublication 98.

[123] S. ITO, M. KIMURA *On Rauzy fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math **8** (1991), 461–486.

[124] S. ITO, H. NAKADA *On natural extensions of transformations related to diophantine approximations*, Tokyo J. Math. **9** (1986), 115–133.

[125] S. ITO, H. NAKADA *Approximations of real numbers by the sequence* $n\alpha$ *and their metrical theory*, Acta Math. Hung. **52** (1988), 91–100.

[126] S. ITO, M. OHTSUKI *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms*, Tokyo J. Math. **16** (1993), 441–472.

[127] S. ITO, M. OHTSUKI *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 33-58.

[128] S. ITO, S.-i. YASUTOMI *On continued fractions, substitutions, and characteristic sequences* $[nx+y]-[(n-1)x+y]$, Japan J. Math. **16** (1990), 287–306.

[129] A. IVÁNYI *On the d-complexity of words*, Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Comput. **8** (1987), 69–90.

[130] J. JUSTIN, G. PIRILLO *Fractional powers in Sturmian words*, prépublication.

[131] M. KEANE *Irrational rotations and quasi-ergodic measures*, Publications des séminaires de Mathématiques de l'université de Rennes (1970), 17-26.

[132] M. KEANE *Sur les mesures quasi-ergodiques des translations irrationelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **272** (1971), 54–55.

[133] A. Y. KHINTCHINE *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen 1963.

[134] J. L. KING *Joining-rank and the structure of finite-rank mixing transformations*, J. Anal. Math. **51** (1988), 182–227.

[135] T. KOMATSU *On the characteristic word of the inhomogeneous Beatty sequence*, Bull. Austr. Math. Soc. **51** (1995), 337–351.

[136] T. KOMATSU *The fractional part of* $n\theta + \Phi$ *and Beatty sequences*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 387–406.

[137] T. KOMATSU *A certain power series and the inhomogeneous continued fraction*, J. Number Theory **59** (1996), 291–312.

[138] T. KOMATSU *A certain power series associated with a Beatty sequence*, Acta Arith. **76** (1996), 109–129.

[139] T. KOMATSU *On inhomogeneous continued fraction expansions and inhomogeneous diophantine approximation*, J. Number Theory **62** (1997), 192–212.

[140] M. KOSKAS *Complexité de suites, fonctions de Carlitz*, Université Bordeaux I, Thèse, 1995.

[141] J. LESCA *Sur la répartition modulo* 1 *des suites* $n\alpha$, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1966-67), Théorie des Nombres, Fasc. 1, Exp. 15, 7 pp.

[142] J. LESCA *Sur la répartition modulo 1 de la suite* $n\alpha$, Acta Arith. **20** (1972), 345–352.

[143] P. LIARDET *Dynamical properties of the Ostrowski* α*-expansion*, travail en cours.

[144] L.-M. LOPEZ, P. NARBEL *Substitutions, interval exchange transformations, symbolic description of flows, multidimensional continued fractions, and linear complexity words*, prépublication 1998.

[145] M. LOTHAIRE *Algebraic Combinatorics on Words*, Chapitre 2: Sturmian words, par J. Berstel et P. Séébold, à paraître.

[146] B. de MATHAN *Irrationality measures and transcendence in positive characteristic*, J. Number Theory **54** (1995), 93–112.

[147] M. MENDÈS FRANCE *Some applications of the theory of automata*, in K. Nagasaka, T. Mitsui, and T. Kano eds, Prospects in Mathematical Science, World Scientific, Singapore (1988), 127–140.

[148] M. MENDÈS FRANCE *Opacity of an automaton. Application to inhomogeneous Ising chain*, Commun. Math. Phys. **139** (1991), 341–352.

[149] A. MESSAOUDI *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy*, Journal Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 135–161.

[150] F. MIGNOSI *Infinite words with linear subword complexity*, Theoret. Comput. Sci. **65** (1989), 221–242.

[151] F. MIGNOSI *On the number of factors of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. **82** (1991), 71–84.

[152] M. MKAOUAR *Sur le développement en fraction continue de la série de Baum et Sweet*, Bull. Soc. math. France **123** (1995), 361–374.

[153] M. MORSE, G. A. HEDLUND *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[154] M. MORSE, G. A. HEDLUND *Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.

[155] I. NAKASHIMA, J.-i. TAMURA, S.-i. YASUTOMI *Modified complexity and Surmian word*, prépublication 99.

[156] H. NIEDERREITER, M. VIELHABER *Tree complexity and a doubly exponential gap between structured and random sequences*, J. Complexity **12** (1996), 187–198 .

[157] K. NISHIOKA, J. TAMURA, I. SHIOKAWA *Arithmetical properties of a certain power series*, J. Number Theory **42** (1992), 61–87.

[158] A. OSTROWSKI *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, II*, Abh. Math. Sem. Hamburg I (1922), 77–98 et 250–251.

[159] J.-J. PANSIOT *Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés*, Lecture Notes Comput. Sci. **172** (1984), 380–389.

[160] C. PINNER *On sums of fractional parts* $\{n\alpha + \gamma\}$, J. Number Theory **65** (1970), 48–73.

[161] N. PRIEBE *Detecting hierarchy in tiling dynamical systems via derived Voronoï tessellations*, Ph. D. Thesis, University of North Carolina, 1997.

[162] M. QUEFFÉLEC *Substitution dynamical systems. Spectral analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1294**, Springer-Verlag, 1987.

[163] G. RAUZY *Une généralisation du développement en fraction continue*, Sém. Delange-Pisot-Poitou, exp. 15 (1976–1977), 1–16.

[164] G. RAUZY *Échanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arith. **34** (1979), 315–328.

[165] G. RAUZY *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. math. France **110** (1982), 147–178.

[166] G. RAUZY *Suites à termes dans un alphabet fini*, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux (1983), 25-01–25-16.

[167] G. RAUZY *Mots infinis en arithmétique*, in Automata on infinite words, M. Nivat, D. Perrin eds., Lecture Notes in Comput. Sci. **192** (1985), 167–171.

[168] R. N. RISLEY, L. Q. ZAMBONI *A generalization of sturmian flows; combinatorial structure and transcendence*, prépublication 98.

[169] G. ROTE *Sequences with subword complexity* $2n$, J. Number Theory **46** (1994), 196–213.

[170] O. SALON *Suites automatiques à multi-indices et algébricité*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **305** (1987), 501–504.

[171] O. SALON *Suites automatiques à multi-indices*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, Exposé 4, (1986-1987), 4-01–4-27; suivi par un Appendice de J. Shallit, 4-29A–4-36A.

[172] J. W. SANDER, R. TIJDEMAN *Low complexity functions and convex sets in* $\mathbb{Z}^k$, à paraître dans Math. Z.

[173] J. W. SANDER, R. TIJDEMAN *The complexity of functions on lattices*, à paraître dans Theoret. Comput Sci.

[174] J. W. SANDER, R. TIJDEMAN *The rectangle complexity of functions on two-dimensional lattices*, à paraître dans Theoret. Comput Sci.

[175] J. SCHOISSENGEIER *On the discrepancy of* $n\alpha$, Acta Arith. **44** (1984), 241–279.

[176] W. M. SCHMIDT *Diophantine approximations*, Lecture Notes in Math. **785** (1980), Springer Verlag.

[177] M. SENECHAL *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.

[178] J. SHALLIT *On the maximum number of distinct factors in a binary string*, Graphs and Combinatorics **9** (1993), 197–200.

[179] J. SHALLIT *Automaticity IV: sequences, sets, and diversity*, J. Théor. Nombres Bordeaux **8** (1996), 347–367.

[180] J. SHALLIT, Y. BREITBART *Automaticity I: Properties of a measure of descriptional complexity*, J. Comput. System Sci. **53** (1993), 10–25.

[181] C. E. SHANNON *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948) 379–423, 623–656.

[182] D. SHECHTMAN, I. BLECH, D. GRATIAS, J. W. CAHN *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Let. **53** (1984), 1951–1954.

[183] N. A. SIDOROV, A. M. VERSHIK *Arithmetic expansions associated with rotations of the circle and continued fractions*, St. Petersburg Math. Journ. **5** (1994), 1121–1136.

[184] N. B. SLATER *Gaps and steps for the sequence* $n\theta$ *mod 1*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 1115–1123.

[185] M. STEWART *Irregularities of uniform distribution*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **37** (1981), 185–221.

[186] V. T. SÓS *On the theory of diophantine approximations I (On a problem of A. Ostrowski)*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 461–472.

[187] V. T. SÓS *On the theory of diophantine approximations II (inhomogeneous problems)*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **9** (1957), 229–241.

[188] V. T. SÓS *On the distribution mod 1 of the sequence* $n\alpha$, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **1** (1958), 127–134.

[189] K. STOLARSKY *Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators*, Canad. Math. Bull. **19** (1976), 473–482.

[190] J. SURÁNYI *Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **1** (1958), 107–111.

[191] S. ŚWIERCZKOWSKI *On successive settings of an arc on the circumference of a circle*, Fundamenta Math. **46** (1958), 187–189.

[192] R. TIJDEMAN *Exact covers of balanced sequences and Fraenkel's conjecture*, Proc. Number Theory Conference Graz (1998), De Gruyter.

[193] R. TIJDEMAN *Fraenkel's conjecture for six sequences*, Indag. Math., à paraître.

[194] R. TIJDEMAN *On the minimal complexity of infinite words*, prépublication 98.

[195] D. S. THAKUR *Automata and transcendence*, Contemp. Math. **210** (1998), 387–399.

[196] L. VUILLON *Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle,* Theoret. Comput. Sci. **209** (1998), 261–285.

[197] P. WALTERS *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics **79**, Springer-Verlag, New York, 1982.

[198] Z.-Y. WEN, Z.-X. wen *Some properties of the singular words of the Fibonacci word*, Europ. J. Combinatorics **15** (1994), 587–598.

[199] J.-y. YAO *Critères de non-automaticité et leurs applications*, Acta Arith. **80** (1997), 237–248.

[200] L. ZAMBONI *Une généralisation du théorème de Lagrange sur le développement en fraction continue*, C. R. Acad. Sci. Paris **327**, Série I (1998), 527–530.