Exercice 1

On applique la méthode de minimisation vue au TD :

1	1				
2	1	3			
3	3	1	1		
4	1	4	5	1	
5	1		5	1	5
	0	1	2	3	4

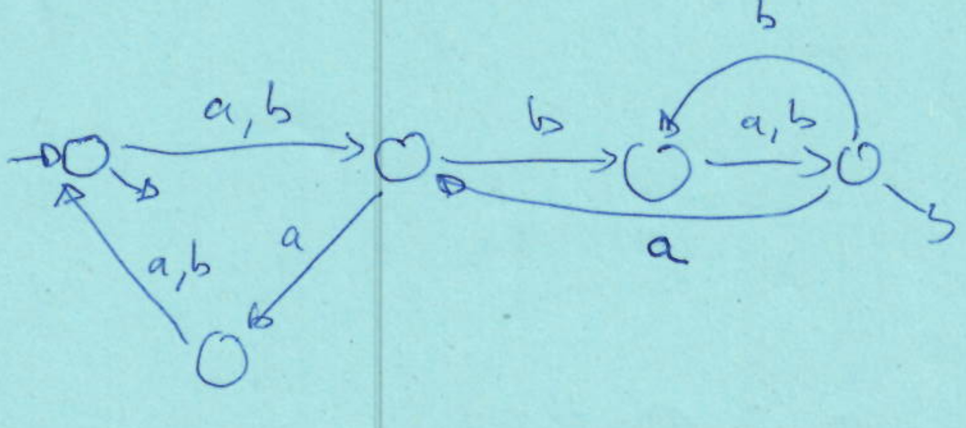
1. On marque d'abord toutes les paires (état final, état non final)
2. Ensuite on parcourt les autres paires (3,0) est mis dans la liste de (1,2) et (1,5)
3. On marque (1,2) car avec b on va vert (2,3) déjà marqué

   Donc, on marque aussi (3,0)
4. On marque (1,4) à cause de (0,1)
5. On marque (2,4) à cause de (0,3)

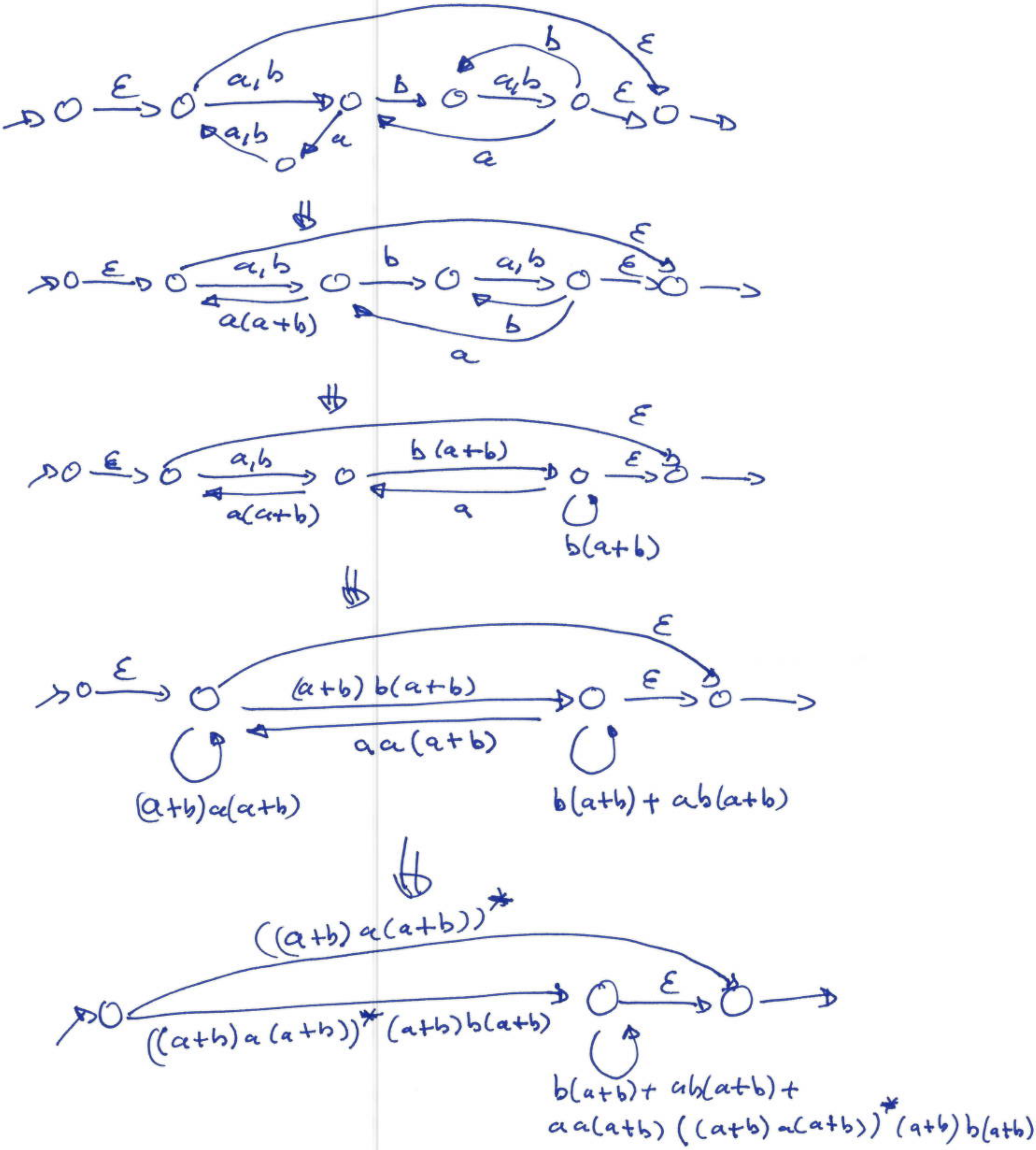
   et (2,5) à cause de (2,3)

   et (4,5) à cause de (0,4)

Donc, l'automate minimal est :



On obtient une expression régulière :



Donc :

$$((a+b)a(a+b))^*$$
$$+ \; ((a+b)a(a+b))^*(a+b)b(a+b)$$
$$\cdot \left[b(a+b) + ab(a+b) + aa(a+b)((a+b)a(a+b))^*(a+b)b(a+b) \right]^*$$

Exercice 2 :

$L_1 = \{a^n c b^n \mid n \geq 1\}$

$L_2 = pref(L_1)$ le langage de tous les préfixe de L_1

Pour générer L_2 avec acceptation par pile vide on ajoute un état q_1 dans lequel on peut aller avec ε sans changer la pile et où on dépile tout

$\delta(q_{init}, \varepsilon, \gamma_{init}) = \{(q_1, \gamma_{init})\}$
$\delta(q_{init}, \varepsilon, A) = \{(q_1, A)\}$
$\delta(q_{init}, \varepsilon, B) = \{(q_1, B)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, \gamma_{init}) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

L_1 : $S \rightarrow aSb \mid acb$

L_2 : $S \rightarrow aS_1 \mid aS_2b$
$S_1 \rightarrow aS_1 \mid \varepsilon \mid c$
$S_2 \rightarrow aS_2 \mid aS_2b \mid c$

Exercice 3

① $\{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \text{ et } w_2 \in L\}$

$= L.L$ est régulier car la concaténation de deux langages réguliers est régulier

② $L' = \{w_1 w_1 \mid w_1 \in L\}$ n'est pas forcément régulier

Prenant par exemple $L = (a+b)^*$

On montre que la ~~condition~~ propriété du lemme d'itération (voir TD 1) n'est pas satisfaite.

Pour N quelconque, on choisit $a^N b^N a^N b^N \in L'$

soit $a^N b^N a^N b^N = xyz$ avec $x = \varepsilon$, $y = a^N$ et $z = b^N a^N b^N$

Alors pour toute factorisation $y = uvw$ avec $v \neq \varepsilon$

on a $xuv^0wz = xuwz = a^K b^N a^N b^N$ avec $K < N$

$a^K b^N a^N b^N \notin L'$

Exercice 4

(1)

$$S \to aSc \mid S_1$$
$$S_1 \to bS_1c \mid \varepsilon$$

(2)

$$S \to S_1 S_2$$
$$S_1 \to aS_1b \mid \varepsilon$$
$$S_2 \to bS_2c \mid \varepsilon$$