M1/2012-2013 **Peter Habermehl** <Peter.Habermehl@liafa.univ-paris-diderot.fr>

Automates Avancés
Travaux Dirigés n°1

▸ Exercice 1.

Donner un automate (ou une expression regulière) pour les langages suivants :

- Tous les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ où il n'y a jamais deux a consécutif.
- $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x$ représente un nombre positif codé en binaire divisible par $2\}$
- $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x$ représente un nombre positif codé en binaire divisible par $3\}$
- $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x$ représente un nombre positif codé en binaire divisible par $6\}$

▸ Exercice 2. *De l'automate à l'expression régulière*

Donner une expression regulière du langage reconnu par l'automate de la figure 1.

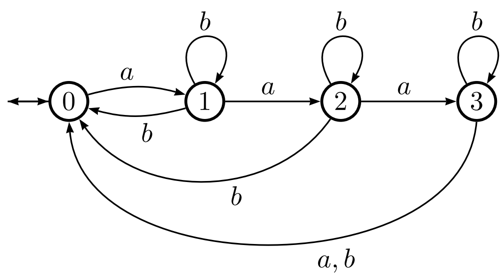

Figure 1: automate fini

▸ Exercice 3. *De l'expression regulière à l'automate*

- Donner un automate reconnaissant le langage $(a + b)^*$
- Donner un automate reconnaissant le langage $(a^*b^*)^*$
- Donner un automate reconnaissant le langage $a\,(b + (ba)^*)\,a(a + b)(ba + a)$
- Donner un automate reconnaissant le langage $((a + ac)^* + b^*)^*a(b + c)$

▸ Exercice 4. *Manipulation d'automates*

Le *produit de shuffle* de deux mots u et v est l'ensemble

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{u_0v_0u_1v_1 \cdots u_nv_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \{0,1,\ldots,n\}, \\ u_i \in \Sigma^*, v_i \in \Sigma^* \text{ et } u_0u_1 \cdots u_n = u, v_0v_1 \cdots v_n = v\}.$$

Le produit de shuffle de deux langages est l'union de tous les produits de shuffle de leurs mots :

$$L \sqcup\!\sqcup\, M = \bigcup_{u \in L, v \in M} u \sqcup\!\sqcup\, v$$

- Donner le produit de shuffle de a^*b^* et c^*d^*.
- Donner un automate pour a^*b^* et un pour c^*d^*. Donner un automate pour le produit de shuffle de a^*b^* et c^*d^*.
- Soit deux langages L_1 et L_2 donnés par des automates déterministes. Donner un automate qui reconnaît $L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2$. On pourra commencer par regarder ce qui se passe si L_1 et L_2 sont des singletons.

▸ Exercice 5. *Lemme de pompage (d'itération)*

1. Soit un automate fini quelconque $\mathcal{A}$ et un mot u reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que si u est suffisamment long, alors tout chemin réussi de $\mathcal{A}$ d'étiquette u passe deux fois par le même état. Cela reste vraie pour un mot xyz reconnu par $\mathcal{A}$ et y suffisamment grand.
2. En déduire le lemme de pompage :

   Lemme 1 (de pompage) *Soit L un langage régulier. Alors la propriété suivante est vraie: Il existe un entier N tel que pour tous mots x, y, z avec $xyz \in L$ et $|y| \geq N$, il existe une factorisation $y = uvw$, avec v non vide et pour tout $i \geq 0$, $xuv^iwz \in L$.*

▸ Exercice 6. *Lemme de pompage*

1. Montrer que le langage $\{a^nb^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.
2. Montrer que $\bigcup_{n\geq 0}(a^+c)^n(b^+c)^n + (a+b+c)^*cc(a+b+c)^*$ satisfait la condition du lemme de pompage. Est-ce que le langage est régulier pour autant ?

▸ Exercice 7.

Est-ce que le langage $\{xy \mid x, y \in \{a,b\}^* \text{ et } |x|_a = |y|_b\}$ est régulier ? Justifier.

▸ Exercice 8. *Transformation de langages*

1. Montrer que le carré d'un langage régulier n'est pas nécessairement un langage régulier. Le carré du langage L étant défini par
$$L^2 = \{uu \mid u \in L\}.$$
2. Montrer que la racine carrée d'un langage régulier est un langage régulier. La racine carrée du langage L étant définie par
$$\sqrt{L} = \{u \mid uu \in L\}.$$
   On pourra exprimer $\sqrt{L}$ comme combinaison régulier de langages obtenus à partir d'un automate reconnaissant L.