

# Automates Avancés

## Travaux Dirigés n°3

Rappel :

Lemme d'itération pour les langages hors-contexte : Si  $L$  est un langage hors-contexte (algébrique) alors il existe un entier  $N > 0$  tel que pour tout mot  $w$  de  $L$  avec  $|w| \geq N$  il existe une factorisation  $w = uvzxy$  où :

- $|vx| \geq 1$
- $|vzx| \leq N$
- Pour tout entier  $i \geq 0$  on a  $uv^i zx^i y \in L$ .

► **Exercice 1.**

Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage  $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$  n'est pas hors-contexte. Indication: Choisissez  $w = a^{N^2}$  et montrez une contradiction.

► **Exercice 2.**

Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage  $L = \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$  n'est pas hors-contexte. Indication: Choisissez  $w = a^p$  avec un  $p$  premier et  $p > N$  et  $i = p + 1$  et montrez une contradiction.

► **Exercice 3.**

Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage  $L = \{ww \mid w \in a, b^*\}$  n'est pas hors-contexte.

► **Exercice 4.**

- Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages réguliers. Est-ce que  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 \cap L_2$ ,  $\bar{L}_1$ ,  $L_1^*$ ,  $L_1.L_2$  sont réguliers ?
- Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages hors-contexte. Est-ce que  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 \cap L_2$ ,  $\bar{L}_1$ ,  $L_1^*$ ,  $L_1.L_2$  sont hors-contexte ?
- Montrez que  $\{ww \mid w \in a, b^*\}$  n'est pas hors-contexte.
- Donnez une grammaire hors-contexte pour le langage  $L = \{a, b\}^* - \{ww \mid w \in a, b^*\}$ . Idée: Montrez d'abord que dans  $L$  il y a exactement tous les mots de taille impaire ainsi que tous les mots de la forme  $xayubv$  ou  $ubvxay$  avec  $|x| = |y|$  et  $|u| = |v|$ .