Peter Habermehl <Peter.Habermehl@liafa.jussieu.fr>

Automates Avancés
Travaux Dirigés n°1

▸ Exercice 1. *De l'automate à l'expression rationnelle*

Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate de la figure 1.

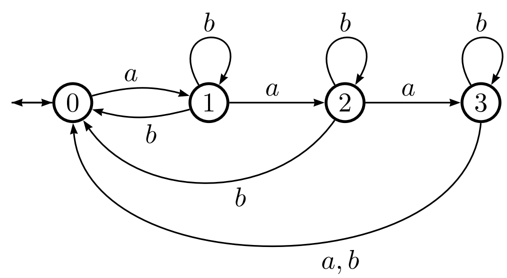

Figure 1: automate fini

▸ Exercice 2. *De l'expression rationnelle à l'automate*

Donner un automate reconnaissant le langage

$$a\,(b + (ba)^*)\,a(a + b)(ba + a).$$

▸ Exercice 3. *Manipulation d'automates*

Le *produit de shuffle* de deux mots u et v est l'ensemble

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{u_0v_0u_1v_1 \cdots u_nv_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \{1, 2 \ldots, n\},$$
$$u_i \in \Sigma^*, v_i \in \Sigma^* \text{ et } u_0u_1 \cdots u_n = u, v_0v_1 \cdots v_n = v\}.$$

Le produit de shuffle de deux langages est l'ensemble des produits de shuffle de leurs mots :

$$L \sqcup\!\sqcup\, M = \{u \sqcup\!\sqcup\, v \mid u \in L \text{ et } v \in M\}.$$

Soit deux langages L_1 et L_2 donnés par des automates déterministes. Donner un automate qui reconnaît $L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2$. On pourra commencer par regarder ce qui se passe si L_1 et L_2 sont des singletons.

▸ **Exercice 4.** ***Lemme de pompage***

1. Soit un automate fini quelconque $\mathcal{A}$ et un mot u reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que si u est suffisament long, alors tout chemin réussi de $\mathcal{A}$ d'étiquette u passe deux fois par le même état.

2. En déduire le lemme de pompage :

   Lemme 1 (de pompage) *Soit L un langage reconnaissable. Alors il existe un entier N tel que pour tout mot u de L de longueur au moins N, il existe une factorisation $u = u_1 v u_2$, avec v non vide et $u_1 v^* u_2 \subseteq L$.*

▸ **Exercice 5.** ***Réciproque fausse du lemme de pompage***

1. Montrer que le langage $\{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

2. Soit un langage *infini* reconnaissable L sur l'alphabet $\{c, d\}$. Pour tout entier n, on note $L_{\geq n}$ le langage des mots de L de longueur au moins n :

$$L_{\geq n} = L \cap \{c, d\}^n \{c, d\}^*$$

   (a) Montrer que le langage

$$K = \bigcup_{n \geq 0} a^n b^n L_{\geq n}$$

   vérifie la condition nécessaire du lemme de pompage.

   (b) Montrer que le langage K n'est pas reconnaissable.

▸ **Exercice 6.** ***Transformation de langages***

1. Montrer que le carré d'un langage reconnaissable n'est pas nécessairement un langage reconnaissable. Le carré du langage L étant défini par

$$L^2 = \{uu \mid u \in L\}.$$

2. Montrer que la racine carrée d'un langage reconnaissable est un langage reconnaissable. La racine carrée du langage L étant définie par

$$\sqrt{L} = \{u \mid uu \in L\}.$$

   On pourra exprimer $\sqrt{L}$ comme combinaison reconnaissable de langages obtenus à partir d'un automate reconnaissant L.