

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°5

► Exercice 1. *Arithmétique de Presburger*

Décrivez la signification des formules suivantes, dites si elles sont satisfaisables ou non, et le cas échéant donnez l'ensemble des solutions :

1. $\exists z, x + z = y$
2. $\exists y, \exists z, (x = y + z) \wedge (z = y + y)$
3. $\exists y, \exists z, \exists t, (x = y + z) \wedge (z = y + y) \wedge (x = t + t)$
4. $\forall x \exists y, (x = 2y) \vee (x = 2y + 1)$
5. $\forall z, (P(0) \wedge \forall x, \forall y, P(x) \wedge y = x + 1 \implies P(y)) \implies P(z)$ où P est une formule quelconque à une variable libre

► Exercice 2. *D'une formule à un automate*

On suppose qu'on lit les entiers en binaire de droite à gauche. Donner des automates correspondant aux formules de Presburger suivantes :

1. $x + z = y$
2. $\exists z, x + z = y$
3. $\exists y, \exists z, (x = y + z) \wedge (z = y + y)$

► Exercice 3. *Démonstration d'une formule*

Montrer que la formule de Presburger $\forall x \exists y, (x = 2y) \vee (x = 2y + 1)$ est vraie grâce au passage par un automate.

► Exercice 4. *Automate d'une équation*

On considère l'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, où $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$.

On construit l'automate reconnaissant cette formule en partant de l'unique état initial q_b et en ajoutant des états et des transitions de la façon suivante, si q_c est un état précédemment obtenu :

- soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$ une solution de l'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c \pmod 2$,
- soit $d = \frac{c - (a_1\theta_1 + \dots + a_n\theta_n)}{2}$,
- on crée l'état q_d et on ajoute la transition $q_c \xrightarrow{\theta} q_d$.
- L'unique état final est q_0 .

1. Tester cette construction sur l'égalité $x + 2y = 3z + 1$.
2. Montrer que l'automate obtenu par cette construction reconnaît exactement les solutions de l'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ et que sa taille (i.e. son nombre d'états) est majorée par $\max(|b|, |a_1| + \dots + |a_n|)$.

► Exercice 5. *Automate d'une inéquation*

En s'inspirant de la construction de l'exercice 4, donner la construction d'un automate qui reconnaît l'ensemble des solutions de $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$.

Donner une majoration de la taille de cet automate.