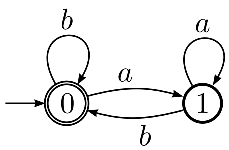
 <Peter.Habermehl@liafa.jussieu.fr>

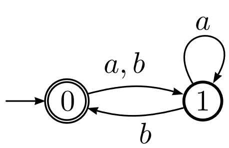
Automates Avancés
Travaux Dirigés n°8

▸ Exercice 1. ***Automates de Büchi***

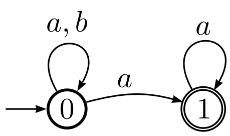
1. Donnez le langage accepté par l'automate de Büchi suivant:



2. Donnez le langage accepté par l'automate de Büchi suivant:



3. Donnez le langage accepté par l'automate de Büchi suivant:



   Est-ce qu'on peut trouver un automate de Büchi déterministe pour le même langage ?

4. Donnez un automate de Büchi **déterministe** reconnaissant $(aab)^\omega + (abb)^\omega$
5. Donnez un automate de Büchi **déterministe** reconnaissant a^*ba^ω
6. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez un automate de Büchi reconnaissant le langage $\Sigma^+(aaaaa)^\omega$.
7. Donnez un automate de Büchi reconnaissant le langage L^ω, où L est un langage rationnel de mots finis ne contenant pas le mot vide.
8. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez un automate de Büchi **déterministe** reconnaissant $L_1 = \{u \in \Sigma^\omega \mid |u|_a = \infty\}$.
9. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez un automate de Büchi **déterministe** reconnaissant $L_2 = \{u \in \Sigma^\omega \mid |u|_b = \infty\}$.
10. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez un automate de Büchi **déterministe** reconnaissant $L_1 \cap L_2 = \{u \in \Sigma^\omega \mid |u|_a = |u|_b = \infty\}$.

▸ **Exercice 2.** ***Langage de mots infinis et langages de mots finis***
Montrez qu'un langage de mot infinis est reconnaissable par un automate de Büchi si et seulement s'il est une union finie de langages de la forme KL^ω, où K et L sont des langages rationnels de mots finis.

▸ **Exercice 3.** ***Intersection de langages***
Soit $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, i_1, \Delta_1, F_1)$ et $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, i_2, \Delta_2, F_2)$ deux automates de Büchi ayant un unique état initial.

On construit l'automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, (i_1, i_2, 1), \Delta, Q_1 \times F_2 \times \{1\})$ en posant $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{0, 1\}$ et

$$\Delta = \{\big((p_1, p_2, s), a, (q_1, q_2, t)\big) \mid p_1 \xrightarrow[\Delta_1]{a} q_1, p_2 \xrightarrow[\Delta_2]{a} q_2$$
$$\text{et } t = 0 \text{ ssi } \big((s = 1 \wedge p_2 \in F_2 \wedge q_1 \notin F_1) \text{ ou } (s = 0 \wedge q_1 \notin F_1)\big)\}$$

Montrer que

$$L^\omega(\mathcal{A}) = L^\omega(\mathcal{A}_1) \cap L^\omega(\mathcal{A}_2).$$

▸ **Exercice 4.**
Soit un langage de mot finis L sur l'alphabet Σ. On définit le langage de mots infinis $\overrightarrow{L}$ par

$$\overrightarrow{L} = \{w \in \Sigma^\omega \mid w \text{ a une infinité de préfixes dans } L\}.$$

Soit un automate $\mathcal{A}$ qu'on considèrera suivant le contexte soit comme un automate de mots finis, soit comme un automate de Büchi.

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est déterministe, alors $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L(\mathcal{A})}$.
2. Soit un langage K de mots infinis. Montrer que K est reconnaissable par un automate de Büchi déterministe si et seulement s'il existe un langage rationnel de mots finis L tel que $K = \overrightarrow{L}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'automate de Büchi déterministe reconnaissant $\Sigma^+ a^\omega$.