

# Automates Avancés

## Travaux Dirigés n°5

► **Exercice 1.**

Soit une grammaire hors-contexte  $G$  donnée par les productions  $S \rightarrow ASB \mid \epsilon$ ,  $A \rightarrow a$  et  $B \rightarrow b$ .

- Donnez un automate à pile qui accepte le même langage que  $G$ .

► **Exercice 2.**

Soit  $M$  un automate à pile défini par  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F, \delta)$  avec  $Q = \{q_0, q_1\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{A, Z_0\}$ ,  $F = \{q_2\}$  et  $\delta$  est donnée par

$$\begin{array}{lll} \langle q_0, Z_0 \rangle \xrightarrow{a} \langle q_1, AZ_0 \rangle & \langle q_0, Z_0 \rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_1, Z_0 \rangle & \langle q_1, A \rangle \xrightarrow{a} \langle q_1, AAA \rangle \\ \langle q_1, A \rangle \xrightarrow{b} \langle q_1, \epsilon \rangle & \langle q_1, Z_0 \rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_2, \epsilon \rangle & \end{array}$$

- Donnez un calcul de  $M$  sur le mot  $aabbb$ .
- Quel est le langage généré par  $M$  ?
- Calculez  $pre^*(q_2)$ .
- Calculez  $post^*(q_0Z_0)$ .
- Calculez  $post^*(q_1(AA)^*)$ .
- Construisez **directement** une grammaire hors-contexte  $G$  à partir de  $M$  telle que  $L(G) = L(M)$ .

► **Exercice 3.**

(voir thèse de S. Schwon) Nous considérons le programmes (en pseudo-code) récursif suivant qui dessine une figure au hasard.

```

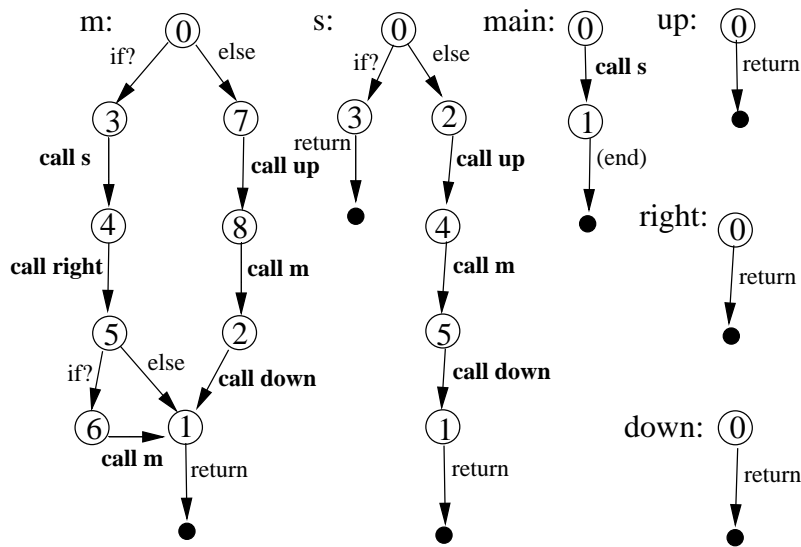
void m() {
    if (?) {
        s(); right();
        if (?) m();
    } else {
        up(); m(); down();
    }
}

void s() {
    if (?) return;
    up(); m(); down();
}

main() {
    s();
}

```

Ce programme correspond aux graphes de flot de contrôle suivant:



Les procédures *up*, *down* et *right* retournent directement. Chaque procédure peut être modélisée avec des transitions d'un automate à pile. Puisque nous n'avons pas de variables globales, l'automate a un seul état  $q$ . Nous faisons abstraction des instructions. Les transitions de *s*, *main*, *up*, *down*, *right* sont données comme suit:

$$\begin{array}{ll}
 \langle q, s_0 \rangle \leftrightarrow \langle q, s_2 \rangle & \langle q, s_0 \rangle \leftrightarrow \langle q, s_3 \rangle \\
 \langle q, s_2 \rangle \leftrightarrow \langle q, up_0s_4 \rangle & \langle q, s_3 \rangle \leftrightarrow \langle q, \epsilon \rangle \\
 \langle q, s_4 \rangle \leftrightarrow \langle q, m_0s_5 \rangle & \langle q, s_5 \rangle \leftrightarrow \langle q, down_0s_1 \rangle \\
 \langle q, s_1 \rangle \leftrightarrow \langle q, \epsilon \rangle &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \langle q, main_0 \rangle \leftrightarrow \langle q, s_0main_1 \rangle & \langle q, main_1 \rangle \leftrightarrow \langle q, \epsilon \rangle \\
 \langle q, up_0 \rangle \leftrightarrow \langle q, \epsilon \rangle & \langle q, down_0 \rangle \leftrightarrow \langle q, \epsilon \rangle \\
 \langle q, right_0 \rangle \leftrightarrow \langle q, \epsilon \rangle &
 \end{array}$$

- Donnez les transitions qui correspondent à la procédure *m*.
- Tracez l'exécution du programme (en utilisant la pile), où la suite des appels est *s.up.m.up.m.s.right.m.s.right.down.down*
- Comment peut-on vérifier si le programme peut terminer ?
- Calculez  $pre^*(q.\epsilon)$
- Calculez  $post^*(q.main_0)$
- Est-ce qu'il est possible d'avoir deux appels de *up* qui se suivent dans la pile ? Vérifiez en utilisant  $pre^*$  ou  $post^*$ .
- Comment peut-on modéliser des variables globales sur un domaine fini ?

► **Exercice 4.**

Soit une grammaire hors-contexte  $G$  donnée par les productions  $S \rightarrow AB \mid BC \mid F$ ,  $A \rightarrow DAA \mid a$ ,  $B \rightarrow a$ ,  $D \rightarrow b$ ,  $C \rightarrow CC \mid c$ ,  $E \rightarrow e$ .

- Donnez une formule de Presburger (formule arithmétique linéaire) qui représente l'image de Parikh de  $L(G)$ . Construisez cette formule directement à partir de  $G$  qui peut être légèrement simplifiée.