

# Automates Avancés

## Travaux Dirigés n°7

### Logique du premier ordre sur les mots finis

► **Exercice 1.**

Donner les langages sur  $\Sigma = \{a, b\}$  associés à chacune des formules suivantes :

1.  $\exists x(\forall z((z < x \rightarrow a(z)) \wedge (z > x \rightarrow b(z))))$ ,
2.  $\exists x\exists y(x < y \wedge \forall z((z < x \rightarrow a(z)) \wedge (z > y \rightarrow b(z))))$ ,
3.  $\forall x((\exists y(y < x)) \rightarrow a(x))$ .

► **Exercice 2.**

Soit un alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . Donner des formules du premier ordre qui définissent les langages suivants sur  $\Sigma$  :

1.  $\Sigma^+$
2.  $a\Sigma^*b$
3.  $\Sigma^*ab\Sigma^*$

► **Exercice 3.**

On note  $\text{FO}(P)$ , où  $P$  est un prédicat, la logique du premier ordre à laquelle on a ajouté le prédicat  $P$  (en plus des prédicats unaires  $a$ , pour tout  $a \in \Sigma$ ).

Soient les prédicats suivants :

- $<(x, y)$  interprété par  $x < y$ ,
- $S(x, y)$  interprété par  $y = x + 1$  (ie “ $y$  est la position qui suit  $x$ ”),
- $+(x, y, z)$  interprété par  $z = x + y$ .

1. Montrer que

$$\text{FO} \subseteq \text{FO}(S) \subseteq \text{FO}(<) \subseteq \text{FO}(+),$$

c'est-à-dire que ces logiques forment une chaîne croissante par rapport à leur expressivité.

2. Montrer qu'on peut exprimer  $x = y$  dans  $\text{FO}(S)$ .
3. Montrer qu'on peut définir le langage des mots de longueur supérieure à 4 dans  $\text{FO}(S)$ .
4. Montrer qu'on peut définir le langage  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  dans  $\text{FO}(+)$ .

## Logique monadique du second ordre sur les mots finis

### ► Exercice 4.

Donner les langages sur  $\Sigma = \{a, b\}$  associés à chacune des formules suivantes :

1.  $\exists X \exists Y (\forall x (X(x) \leftrightarrow \neg Y(x)) \wedge \forall z ((X(z) \rightarrow a(z)) \wedge (Y(z) \rightarrow b(z))))$ ,
2.  $\exists X \forall x ((X(x) \leftrightarrow X(x+1)) \wedge (a(x) \leftrightarrow X(x)))$ .

### ► Exercice 5.

Donner une formule MSO pour les langages suivants sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  :

1.  $\{u \in \Sigma^* \mid u \text{ ne contient pas le facteur } aa\}$ ,
2.  $(a^2)^*$ ,
3.  $\{u \in \Sigma^* \mid \text{dans } u \text{ le nombre de } a \text{ entre deux } b \text{ est un multiple de } 3\}$