

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°3

Rappel :

Lemme d'itération pour les langages hors-contexte : Si L est un langage hors-contexte (algébrique) alors il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout mot w de L avec $|w| \geq N$ il existe une factorisation $w = wvzxy$ où :

- $|vx| \geq 1$
- $|vzx| \leq N$
- Pour tout entier $i \geq 0$ on a $w^i v z x^i y \in L$.

► **Exercice 1.**

Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$ n'est pas hors-contexte. Indication: Choisissez $w = a^{N^2}$ et montrez une contradiction.

► **Exercice 2.**

Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage $L = \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$ n'est pas hors-contexte. Indication: Choisissez $w = a^p$ avec un p premier et $p > N$ et $i = p + 1$ et montrez une contradiction.

► **Exercice 3.**

Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage $L = \{ww \mid w \in a, b^*\}$ n'est pas hors-contexte.

► **Exercice 4.**

Donnez une grammaire hors-contexte pour le langage $L = \{a, b\}^* - \{ww \mid w \in a, b^*\}$. Idée: Dans L il y a tous les mots de taille impaire ainsi que tous les mots de la forme $xayubv$ ou $ubv xay$ avec $|x| = |y|$ et $|u| = |v|$. Donnez un automate à pile pour L .

► **Exercice 5.**

Soit $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F, \delta)$ un automate à pile avec

$Q = \{q_0\}$, $\Gamma = \{Z_0, A, B\}$, $F = \emptyset$ et

$\delta = \{(q_0, Z_0, \epsilon, q_0, \epsilon), (q_0, Z_0, a, q_0, AZ_0), (q_0, Z_0, b, q_0, BZ_0), (q_0, A, a, q_0, AA), (q_0, A, b, q_0, \epsilon), (q_0, B, a, q_0, \epsilon), (q_0, B, b, q_0, BB)\}$.

Remarque: On pourrait aussi définir δ comme une fonction:

$\delta(q_0, Z_0, \epsilon) = \{(q_0, \epsilon)\}$

$\delta(q_0, Z_0, a) = \{(q_0, AZ_0)\}$

$\delta(q_0, Z_0, b) = \{(q_0, BZ_0)\}$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, A, a) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, A, b) &= \{(q_0, \epsilon)\} \\ \delta(q_0, B, a) &= \{(q_0, \epsilon)\} \\ \delta(q_0, B, b) &= \{(q_0, BB)\} \end{aligned}$$

- Est-ce que cet automate est déterministe ?
- Donnez une suite de configuration de l'automate à pile qui montre qu'il accepte le mot *abbbaa*.
- Donnez une suite de configuration de l'automate à pile qui montre qu'il accepte le mot *bbaaaabb*.
- Quel est le langage accepté par l'automate à pile ?

► **Exercice 6.**

Donnez un automate à pile qui reconnaît à pile vide le langage $\{a^m b^n \mid m \leq n \leq 2m\}$.

► **Exercice 7.**

Soit M un automate à pile donné par $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F, \delta)$ avec $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, Z_0\}$, $F = \{\}$ et

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, AZ_0)\}, \delta(q_0, b, A) = \{(q_1, AAA)\} \\ \delta(q_0, \epsilon, Z_0) &= \{(q_1, Z_0)\}, \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \epsilon)\}, \delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, \epsilon)\} \end{aligned}$$

- Construisez directement une grammaire hors-contexte qui engendre le langage accepté par M par pile vide.