

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°5

► **Exercice 1. Grammaire → Automate à pile**

Soit une grammaire hors-contexte G donnée par les productions $S \rightarrow ASB \mid \epsilon$, $A \rightarrow a$ et $B \rightarrow b$.

- Donnez un automate à pile qui accepte le langage $L(G)$, c.-à-d. le langage généré par la grammaire.

► **Exercice 2.**

Soit M un automate à pile défini par $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F, \delta)$ avec $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, Z_0\}$, $F = \{q_2\}$ et δ est donnée par

$$\langle q_0, Z_0 \rangle \xrightarrow{a} \langle q_1, AZ_0 \rangle \quad \langle q_0, Z_0 \rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_1, Z_0 \rangle \quad \langle q_1, A \rangle \xrightarrow{a} \langle q_1, AAA \rangle \quad \langle q_1, A \rangle \xrightarrow{b} \langle q_1, \epsilon \rangle \quad \langle q_1, Z_0 \rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_2, \epsilon \rangle$$

- Donnez un calcul de M sur le mot $aabbb$.
- Quel est le langage généré par M ?
- Calculez $pre^*(\{(q_2, \epsilon)\})$.
- Calculez $post^*(\{(q_0, Z_0)\})$.
- Calculez $post^*(\{(q_1, w) \mid w \in (AA)^*\})$.
- Construisez **directement** une grammaire hors-contexte G à partir de M telle que $L(G) = L(M)$.

► **Exercice 3.**

(voir thèse de S. Schwoon) Nous considérons le programmes (en pseudo-code) récursif suivant qui dessine une figure au hasard.

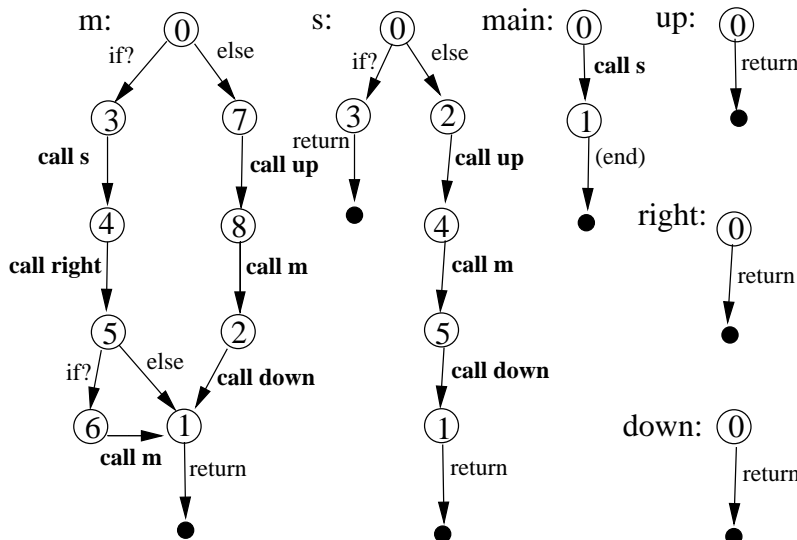
```

void m() {
    if (?) {
        s(); right();
        if (?) m();
    } else {
        up(); m(); down();
    }
}

void s() {
    if (?) return;
    up(); m(); down();
}

main() {
    s();
}
    
```

Ce programme correspond aux graphes de flot de contrôle suivant:



Les procédures *up*, *down* et *right* retournent directement. Chaque procédure peut être modélisée avec des transitions d'un automate à pile. Puisque nous n'avons pas de variables globales, l'automate a un seul état q . Nous faisons abstraction des instructions. Les transitions de s , $main$, up , $down$, $right$ sont données comme suit:

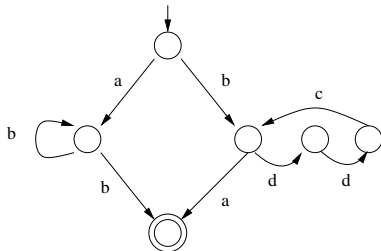
$\langle q, s_0 \rangle \hookrightarrow \langle q, s_2 \rangle$ $\langle q, s_0 \rangle \hookrightarrow \langle q, s_3 \rangle$
 $\langle q, s_2 \rangle \hookrightarrow \langle q, up_0 s_4 \rangle$ $\langle q, s_3 \rangle \hookrightarrow \langle q, \epsilon \rangle$
 $\langle q, s_4 \rangle \hookrightarrow \langle q, m_0 s_5 \rangle$ $\langle q, s_5 \rangle \hookrightarrow \langle q, down_0 s_1 \rangle$
 $\langle q, s_1 \rangle \hookrightarrow \langle q, \epsilon \rangle$

$\langle q, main_0 \rangle \hookrightarrow \langle q, s_0 main_1 \rangle$ $\langle q, main_1 \rangle \hookrightarrow \langle q, \epsilon \rangle$
 $\langle q, up_0 \rangle \hookrightarrow \langle q, \epsilon \rangle$ $\langle q, down_0 \rangle \hookrightarrow \langle q, \epsilon \rangle$
 $\langle q, right_0 \rangle \hookrightarrow \langle q, \epsilon \rangle$

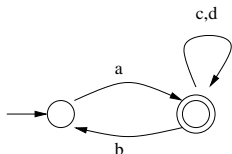
- Donnez les transitions qui correspondent à la procédure m .
- Tracez l'exécution du programme (en utilisant la pile), où la suite des appels est $s.up.m.up.m.s.right.m.s.right.down.down$
- Comment peut-on vérifier si le programme peut terminer ?
- Calculez $pre^*(\{(q, \epsilon)\})$
- Calculez $post^*(\{(q, main_0)\})$
- Est-ce qu'il est possible d'avoir deux appels de up qui se suivent dans la pile ? Vérifiez en utilisant pre^* ou $post^*$.
- Comment peut-on modéliser des variables globales sur un domaine fini ?

► **Exercice 4. Image de Parikh**

Donner l'image de Parikh de l'automate suivant:



Donner l'image de Parikh de l'automate suivant:



Quel est l'intersection des deux **langages** ? Quel est l'intersection des deux **images de Parikh** ?

► **Exercice 5.**

- Donnez un automate sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ dont l'image de Parikh est donné par la formule suivante:

$$x_a + 2x_b = 3x_c + 1$$

où x_a, x_b et x_c représentent respectivement le nombre de a, b et c .

- Donnez un automate dont l'image de Parikh est donné par la formule suivante:

$$x_a + 2x_b \geq 3x_c + 1$$