

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°9

Logique du premier ordre sur les mots (in)finis

► **Exercice 1.**

Donner les langages (in)finis sur $\Sigma = \{a, b\}$ associés à chacune des formules suivantes :

1. $\exists x(\forall z((z < x \rightarrow a(z)) \wedge (z > x \rightarrow b(z))))$,
2. $\exists x\exists y(x < y \wedge \forall z((z < x \rightarrow a(z)) \wedge (z > y \rightarrow b(z))))$,
3. $\forall x((\exists y(y < x)) \rightarrow a(x))$.

► **Exercice 2.**

Soit un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Donner des formules du premier ordre qui définissent les langages suivants sur Σ :

1. $a\Sigma^*b$
2. $\Sigma^*ab\Sigma^*$
3. $\Sigma^*ab\Sigma^\omega$

► **Exercice 3.**

On note $\text{FO}(P)$, où P est un prédicat, la logique du premier ordre à laquelle on a ajouté le prédicat P (en plus des prédicats unaires a , pour tout $a \in \Sigma$).

Soient les prédicats suivants :

- $<(x, y)$ interprété par $x < y$,
- $S(x, y)$ interprété par $y = x + 1$ (ie “ y est la position qui suit x ”),
- $+(x, y, z)$ interprété par $z = x + y$.

1. Montrer que

$$\text{FO} \subseteq \text{FO}(S) \subseteq \text{FO}(<) \subseteq \text{FO}(+),$$

c'est-à-dire que ces logiques forment une chaîne croissante par rapport à leur expressivité.

2. Montrer qu'on peut exprimer $x = y$ dans $\text{FO}(S)$.
3. Montrer qu'on peut définir le langage des mots de longueur supérieure à 4 dans $\text{FO}(S)$.
4. Montrer qu'on peut définir le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ dans $\text{FO}(+)$.

Logique monadique du second ordre sur les mots (in)finis

► Exercice 4.

Donner les langages sur $\Sigma = \{a, b\}$ associés à chacune des formules suivantes :

1. $\exists X \exists Y (\forall x (X(x) \leftrightarrow \neg Y(x)) \wedge \forall z ((X(z) \rightarrow a(z)) \wedge (Y(z) \rightarrow b(z))))$,
2. $\exists X \forall x ((X(x) \leftrightarrow X(x+1)) \wedge (a(x) \leftrightarrow X(x)))$.

► Exercice 5.

Donner une formule MSO pour les langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

1. $\{u \in \Sigma^* \mid u \text{ ne contient pas le facteur } aa\}$,
2. $\{u \in \Sigma^* \mid \text{dans } u \text{ le nombre de } a \text{ entre deux } b \text{ est un multiple de } 3\}$