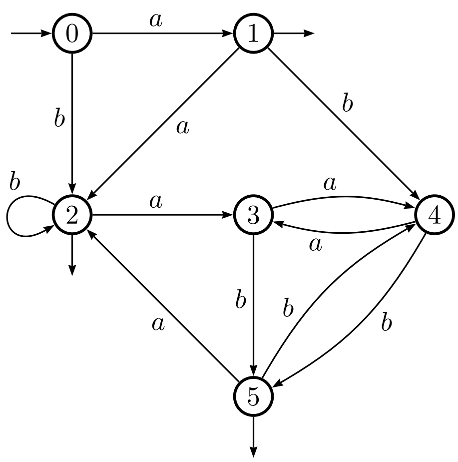
 Peter Habermehl `<Peter.Habermehl@liafa.jussieu.fr>`

Automates Avancés
Travaux Dirigés n°3

Rappel :
Lemme d'itération pour les langages hors-contexte : Si L est un langage hors-contexte (algébrique) alors il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout mot w de L avec $|w| \geq N$ il existe une factorisation $w = uvzxy$ où:

- $|vx| \geq 1$
- $|vzx| \leq N$
- Pour tout entier $i \geq 0$ on a $uv^izx^iy \in L$.

▸ Exercice 1.
Considérez l'automate suivant:



- Donnez une grammaire linéaire droite qui génère le même langage que l'automate
- Donnez une grammaire linéaire gauche qui génère le même langage que l'automate
- Quel est le langage généré par la grammaire linéaire $G = (\{S, A\}, \{c, d\}, \{S \to cA, A \to Sd, S \to \epsilon\}, S)$?
- Donnez une grammaire linéaire pour le langage $\{a^n b^m c^m d^n : m, n \geq 0\}$

▸ Exercice 2.
Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$ n'est pas hors-contexte. Indication: Choisissez $w = a^{N^2}$ et montrez une contradiction.

▸ **Exercice 3.**
Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage $L = \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$ n'est pas hors-contexte. Indication: Choisissez $w = a^p$ avec un p premier et $p > N$ et $i = p + 1$ et montrez une contradiction.

▸ **Exercice 4.**
Montrez en utilisant le lemme d'itération pour les langages hors-contextes que le langage $L = \{ww \mid w \in a, b^*\}$ n'est pas hors-contexte.

▸ **Exercice 5.**
Donnez une grammaire hors-contexte pour le langage $L = \{a, b\}^* - \{ww \mid w \in a, b^*\}$. Idée: Montrez d'abord que dans L il y a exactement tous les mots de taille impaire ainsi que tous les mots de la forme $xayubv$ ou $ubvxay$ avec $|x| = |y|$ et $|u| = |v|$. Donnez un automate à pile pour L.

▸ **Exercice 6.**
Soit $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F, \delta)$ un automate à pile avec
$Q = \{q_0\}$, $\Gamma = \{Z_0, A, B\}$, $F = \emptyset$ et
$\delta = \{(q_0, Z_0, \epsilon, q_0, \epsilon), (q_0, Z_0, a, q_0, AZ_0), (q_0, Z_0, b, q_0, BZ_0), (q_0, A, a, q_0, AA), (q_0, A, b, q_0, \epsilon),$
$(q_0, B, a, q_0, \epsilon), (q_0, B, b, q_0, BB)\}$.
Remarque: On pourrait aussi définir δ comme une fonction:
$\delta(q_0, Z_0, \epsilon) = \{(q_0, \epsilon)\}$
$\delta(q_0, Z_0, a) = \{(q_0, AZ_0)\}$
$\delta(q_0, Z_0, b) = \{(q_0, BZ_0)\}$
$\delta(q_0, A, a) = \{(q_0, AA)\}$
$\delta(q_0, A, b) = \{(q_0, \epsilon)\}$
$\delta(q_0, B, a) = \{(q_0, \epsilon)\}$
$\delta(q_0, B, b) = \{(q_0, BB)\}$

- Est-ce que cet automate est déterministe ?
- Donnez une suite de configuration de l'automate à pile qui montre qu'il accepte le mot *abbbaa*.
- Donnez une suite de configuration de l'automate à pile qui montre qu'il accepte le mot *bbaaaabb*.
- Quel est le langage accepté par l'automate à pile ?

▸ **Exercice 7.**
Donnez un automate à pile qui reconnaît à pile vide le langage
$\{a^m b^n \mid m \leq n \leq 2m\}$.

▸ **Exercice 8.**
Soit M un automate à pile donné par $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F, \delta)$ avec $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, Z_0\}$, $F = \{\}$ et

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0)\}, \delta(q_0, b, A) = \{(q_1, AAA)\}$$
$$\delta(q_0, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}, \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \epsilon)\}, \delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

- Construisez directement une grammaire hors-contexte qui engendre le langage accepté par M par pile vide.