M1/2011-2012 **Peter Habermehl** <Peter.Habermehl@liafa.jussieu.fr>

Automates Avancés
Travaux Dirigés n°6

▸ Exercice 1. ***Arithmétique de Presburger***
Décrivez la signification des formules suivantes (sur les entiers positifs ou nuls), dites si elles sont satisfaisables ou valide, et le cas échéant donnez l'ensemble des solutions :

1. $x + z = y$
2. $\exists z.x + z = y$
3. $\exists y.\exists z.(x = y + z) \wedge (z = y + y)$
4. $\exists y.\exists z.\exists t.(x = y + z) \wedge (z = y + y) \wedge (x = t + t)$
5. $\forall x \exists y.(x = 2y) \vee (x = 2y + 1)$
6. $\forall z.(P(0) \wedge \forall x.\forall y.P(x) \wedge y = x + 1 \implies P(y)) \implies P(z)$ où P est une formule quelconque à une variable libre

▸ Exercice 2. ***D'une formule à un automate***
On suppose qu'on lit les entiers en binaire de droite à gauche (les chiffres les plus faibles d'abord). Donnez des automates correspondant aux formules de Presburger suivantes :

1. $x + z = y$
2. $\exists z.x + z = y$
3. $\exists y.\exists z.((x = y + z) \wedge (z = y + y))$

▸ Exercice 3. ***Démonstration d'une formule***
Montrez que la formule $\forall x \exists y.(x = 2y \vee x = 2y + 1)$ est vraie en passant par les automates.

▸ Exercice 4. ***Automate d'une équation***
On considère l'équation satisfaisable $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, où $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$. On construit l'automate reconnaissant les solutions de cette formule en partant de l'unique état initial q_b et en ajoutant des états et des transitions de la façon suivante, si q_c est un état précédemment obtenu :
Soient $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \{0,1\}^n$ une solution de l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c \mod 2$ et $d = \frac{c-(a_1\theta_1+\cdots+a_n\theta_n)}{2}$. On crée l'état q_d et ajoute la transition $q_c \xrightarrow{\theta} q_d$. L'unique état final est q_0.

1. Appliquez cette construction sur l'égalité $x - 2y = 2$.
2. Appliquez cette construction sur l'égalité $x + 2y = 3z + 1$.
3. Montrez que l'automate obtenu par cette construction reconnaît exactement les solutions de l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ et que sa taille (i.e. son nombre d'états) est majorée par $2 * \max(|b|, |a_1| + \cdots |a_n|) + 1$.

▸ Exercice 5. ***Automate d'une inéquation***
En s'inspirant de la construction de l'exercice 4, donnez la construction d'un automate qui reconnaît l'ensemble des solutions de $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b$. Donnez une majoration de la taille de cet automate.