Université Paris 7 - Master 1 Informatique - Programmation logique par contraintes

Examen du 15 janvier 2010 - Durée : 2 heures

Informations : Tous les documents reliés sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié.

Exercice 1 (**3 points**)
Considérez la contrainte $X \neq 5 \wedge X \neq Y \wedge X = 2*Y+1$ avec les domaines $D(X) = [3..8]$ et $D(Y) = [2..7]$. Les points suivants sont à faire **indépendamment**.

- Rendez la contrainte nœud-consistante. Donnez uniquement les nouveaux domaines.
  $\boxed{D(X) = \{3, 4, 6, 7, 8\} \text{ et } D(Y) = [2..7]}$
- Rendez la contrainte nœud **et** arc-consistante. Donnez uniquement les nouveaux domaines.
  $\boxed{D(X) = \{7\} \text{ et } D(Y) = \{3\}}$
- Rendez la contrainte borne-consistante. Détaillez.

> Considérons d'abord $X = 2Y + 1$. On a $X \geq 2 * min(Y) + 1 = 2 * 2 + 1 = 5$ et $X \leq 2 * max(Y) + 1 = 15$. Donc, $D(X) = [5..8]$. On a $Y = (X - 1)/2$. D'où $Y \geq (min(X) - 1)/2 = (5 - 1)/2 = 2$ et $Y \leq (max(X) - 1)/2 = (8 - 1)/2 < 4$. Donc $D(Y) = [2..3]$. Aussi, $X \leq 2 * max(Y) + 1 = 7$. Donc, $D(X) = [5..7]$.
> Considérons ensuite $X \neq 5$. Donc, $D(X) = [6..7]$.
> Reconsidérons ensuite $X = 2Y + 1$. $Y \geq (min(X) - 1)/2 = (6 - 1)/2 > 2$. Donc $D(Y) = [3..3] = \{3\}$ et $X \geq 2 * min(Y) + 1 = 2 * 3 + 1 = 7$. Donc $D(X) = [7..7] = \{7\}$.

Exercice 2 (**3 points**)
Considérez le problème suivant :
Minimiser $2 * X$ par rapport à $X \geq -1$

Il est évident que la solution de ce problème est -2.

- Donnez les détails de la résolution de ce problème par la méthode simplex. **Indication :** Pour cela, il faut entre autres mettre le problème en forme simplex, trouver une solution de base, etc.

> On écrit $X \geq -1$ comme $X = -1 + S$ avec une nouvelle variable S et on remplace X par $X_1 - X_2$. Cela donne le problème en forme simplex :
> Minimiser $2X_1 - 2X_2$ par rapport à $X_1 - X_2 = -1 + S$ et $X_1, X_2, S \geq 0$
>
> On obtient une forme resolue de base en le transformant :
> Minimiser $2X_1 - 2X_2$ par rapport à $S = 1 + X_1 - X_2$ et $X_1, X_2, S \geq 0$
>
> On choisit X_2 et on pivote :
> Minimiser $-2 + 2S$ par rapport à $X_2 = 1 + X_1 - S$ et $X_1, X_2, S \geq 0$
>
> La solution est donc -2 atteint par exemple pour $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ et $S = 0$. La solution pour le problème original est donc -2 aussi.

Exercice 3 (**3 points**) On considère l'addition suivante :

```
  EAR
+ EAR
+ EAR
-----
 DEER
```

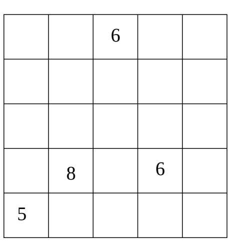
où chaque lettre représente un chiffre (**pas forcément différent**, compris entre 0 et 9). On souhaite connaître la valeur de chaque lettre, sachant que la première lettre de chaque mot représente un chiffre différent de 0 (donc D et E sont différents de 0). Le problème peut être décrit avec la contrainte $1000*D+100*E+10*E+R = 300*E+30*A+3*R$. Rendre borne consistante cette contrainte simple suffit pour trouver une solution ! Rendez la contrainte borne consistante.

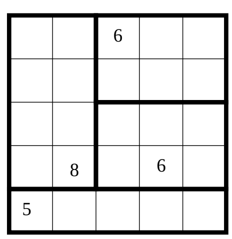
La contrainte s'écrit comme $1000D - 190E - 30A - 2R = 0$. Les domaines initiaux sont : $D(D) = D(E) = [1..9]$ et $D(A) = D(R) = [0..9]$.

- Pour D on obtient $D = (190E + 30A + 2R)/1000 \leq (190 * max(E) + 30 * max(A) + 2 * max(R))/1000 = (190 * 9 + 30 * 9 + 2 * 9)/1000 = 1998/1000 < 2$. Donc $D = [1..1]$. La nouvelle contrainte est donc $190E + 30A + 2R = 1000$.
- Pour E on obtient $E = (1000 - 30A - 2R)/190$. Donc $E \leq (1000 - 30 * min(A) - 2 * min(A))/190 = (1000-30*0-2*0)/190 = 1000/190 < 6$ et $E \leq (1000-30*max(A)-2 * max(A))/190 = (1000 - 30 * 9 - 2 * 9)/190 = 712/190 > 3$. Donc $D(E) = [4..5]$
- Pour A on obtient $A = (1000 - 190E - 2R)/30 \leq (1000 - 190 * 4 - 2 * 0)/30 = 8$ et $A \geq (1000 - 190 * 5 - 2 * 9)/30 = 32/30 > 1$. Donc $D(A) = [2..8]$.
- Pour E on obtient $E \leq (1000-30*2-30*0)/190 = 940/190 < 5$. Donc $D(E) = [4..4]$. Nouvelle contrainte : $30A + 2R = 240$.
- Pour A on obtient $A = (240-2R)/30 \leq 240/30 = 8$ et $A \geq (240-2*9)/30 = 222/30 > 7$. Donc $D(A) = [8..8]$. Nouvelle contrainte : $2R = 0$. Donc $R = 0$.

Exercice 4 (5 points)

Le Sikaku est un jeu logique. Il faut placer des **rectangles** de sorte que chaque rectangle contient le nombre de cases indiquées. Les rectangles ne doivent pas se chevaucher. Voici un exemple d'un Sikaku et sa solution :





- Modéliser le problème **de l'exemple** comme un problème de satisfaction de contraintes (Quelles sont les variables, leur domaines et les contraintes ?)
- Donnez un programme en GPROLOG qui résout le Sikaku **de l'exemple**.
- Donnez un programme en GPROLOG qui résout un Sikaku quelconque. Décrivez votre façon de modéliser le problème. Indication : On peut utiliser comme entrée une liste de triplets avec les coordonnées et la taille (par exemple pour la figure `[(1,1,5),(2,2,8),(3,5,6),(4,2,6)]`).

Exercice 5 (4 points)

Une entreprise fabrique trois types de téléviseur : A, B et C. Les coûts de production de ces téléviseurs et le profit obtenu sont différents pour chaque téléviseur. L'entreprise veut faire le maximum de profit sans violer les contraintes imposées par la direction de l'entreprise. Les coûts et profits sont donnés dans le tableau 1. Le coût de production d'un téléviseur n'est pas le même et est plus élevé pour les trois premiers téléviseurs produits. Par exemple, fabriquer trois téléviseurs de type A coûte $100 + 70 + 50 = 220$ tandis que fabriquer quatre téléviseurs de ce type coûte 255. Le profit par téléviseur produit est indépendant du nombre de téléviseurs fabriquées et est donné dans le tableau (par exemple avec 4 téléviseurs de type B on fait un profit de 160).

Voiture	coût de prod. de n télé.				Profit
	1	2	3	$n > 3$	
A	100	70	50	35	30
B	200	140	65	50	40
C	450	300	200	100	70

TAB. 1 – Coût de production et profit pour chaque type de téléviseur

L'entreprise doit fabriquer au moins un téléviseur de chaque type et a 2000 à investir dans la production. L'entreprise veut **maximiser** son profit.

- Écrivez un programme en GNU Prolog (GPROLOG, avec contraintes sur un domaine fini) pour résoudre ce problème. Entre autres, vous devez pour cela
  - définir les variables et leur domaines,
  - donner les contraintes (On peut utiliser des prédicats auxiliaires).

Exercice 6 (3 points)

Considérez le problème suivant :
Minimiser $2 * X - 3 * Y + 1$ par rapport à
$U = 6 + 2 * X - 4 * Y$ et
$Z = 4 + 3 * X - 3 * Y$ et
$X \geq 0$ et $Y \geq 0$ et $Z \geq 0$ et $U \geq 0$

Appliquez l'algorithme simplex. Détaillez. Pour quelles valeurs des variables le minimum est atteint ?

Le problème est en forme résolue de base. On doit choisir Y et la deuxième équation pour pivoter. On obtient :

Minimiser $-3 - X + Z$ par rapport à
$U = 2/3 - 2X + (4/3)Z$ et
$Y = 4/3 + X - (1/3)Z$ et
$X \geq 0$ et $Y \geq 0$ et $Z \geq 0$ et $U \geq 0$

On choisit X et la première équation. On obtient :

Minimiser $-(10/3) + (1/3)Z + (1/2)U$ par rapport à
$X = 1/3 + (2/3)Z - (1/2)U$ et
$Y = 5/3 + (1/3)Z - (1/2)U$ et
$X \geq 0$ et $Y \geq 0$ et $Z \geq 0$ et $U \geq 0$

Le minimum est donc $-(10/3)$ et il est atteint pour $X = 1/3, Y = 5/3, Z = 0$ et $U = 0$.