TD de Logique n^o 8

Calcul des prédicats : Résolution et Théorème de Herbrand

Exercice 1 (Résolution)

1. En utilisant le système de preuve par résolution, montrez que l'ensemble de formules suivantes, où a est une constante, est insatisfaisable :

$$\begin{array}{ll} \{ & \exists z\ (q(f(z)) \wedge s(f(z), a)), \\ & \forall x \forall y \neg \exists z\ (p(x, y) \wedge s(x, z)), \\ & [q(x) \wedge \exists y (s(x, y))] \rightarrow [\exists y (r(y) \wedge p(x, y))]\} \end{array}$$

2. Montrez, toujours avec la résolution, que la formule suivante, où a est une constante, est valide :

$$[\forall x (p(a) \wedge (p(x) \rightarrow p(f(x))))] \rightarrow [\exists x\ p(f(f(x)))]$$

Exercice 2 (Test d'occurrence, renommage et factorisation)

(a) Nécessité du test d'occurrence dans l'unification (*occur check*) :

(i) Donnez un modèle de la formule $(\forall x\ p(x, x)) \wedge (\forall y\ \neg p(y, f(y)))$.

(ii) Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :
En unifiant $p(x, x)$ avec $p(y, f(y))$, on trouve l'unificateur principal $\{x/y,\ y/f(y)\}$. Donc c'est unifiable, et on obtient la clause vide par résolution.

(b) Nécessité du renommage :

Soit la formule $\forall x\ (p(x) \wedge \neg p(f(x)))$. Sa forme clausale est $\{p(x),\ \neg p(f(x))\}$. Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :
Puisqu'on ne peut pas unifier $p(x)$ et $p(f(x))$ à cause du test d'occurrence, on ne peut pas déduire la clause vide par résolution à partir de $\{p(x), \neg p(f(x))\}$ et donc l'ensemble de formules est satisfaisable.

(c) Nécessité de la factorisation :

1. Que peut-on dire de la formule suivante ?

$$[(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x'\ p(x'))] \ \wedge\ [(\forall y\ \neg p(y)) \vee (\forall y'\ \neg p(y'))]$$

2. Peut-on à partir des deux clauses $\{p(x) \vee p(x'),\ \neg p(y) \vee \neg p(y')\}$ dériver la clause vide en utilisant la méthode de résolution sans utiliser la règle de factorisation ?

Exercice 3 (Herbrand)

1. Nous allons montrer que la formule F suivante n'est pas valide

$$F = [\forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow p(y,x))] \rightarrow [\forall x p(a,x)]$$

(où a est un symbole de constante) Pour cela,

   (a) Mettez $\neg F$ en forme clausale,

   (b) Calculez l'univers et la base de Herbrand associé

   (c) Calculez l'arbre sémantique associé.

2. De la même manière montrez que la formule de l'exercice 1.2 est valide. (Attention ici l'arbre sémantique est potentiellement infini !)