TD de Logique n° 2

Système de Hilbert
Déduction Naturelle

Les énoncés des TD sont disponibles sur `http://www.liafa.jussieu.fr/~haberm/cours/logique/`

Système de Hilbert

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication « $\rightarrow$ » est associative à droite ; par exemple, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ signifie $\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$.

Exercice 1

1. Montrez que $\vdash_{H_\rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$.
2. Montrez que $\vdash_{H_\rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$.
3. Montrez que $\vdash_{H_\rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$

Exercice 2

1. Soit $H_\rightarrow^+$ le système $H_\rightarrow$ augmenté de la règle suivante :
$$\frac{A \rightarrow B \rightarrow C}{B \rightarrow A \rightarrow C}$$
Montrez que $\Delta \vdash_{H_\rightarrow} P$ si et seulement si $\Delta \vdash_{H_\rightarrow^+} P$.
2. Déduisez-en que $\vdash_{H_\rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$.
3. Montrez aussi que $\vdash_{H_\rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$.

Exercice 3

1. Montrez que $\vdash_{H_{\mathrm{prop}}} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?
2. Montrez que $\vdash_{H_{\mathrm{prop}}} \mathbf{p} \rightarrow \neg\neg\mathbf{p}$.
3. Montrez que $\vdash_{H_{\mathrm{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?

Déduction Naturelle

Exercice 4 En utilisant $\vdash_{DN_{\mathrm{prop}}}$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. $\vdash ((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \rightarrow \neg\mathbf{q})) \rightarrow \neg\mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$
5. $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$

Exercice 5 En déduction naturelle, Une *coupure* est une démonstration dont la dernière règle est une règle d'élimination d'un symbole, dont la prémisse principale (c'est-à-dire la prémisse dans laquelle ce symbole apparaît) est démontrée par une règle d'introduction de ce symbole.

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Delta \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Delta \vdash B}}{\Delta \vdash A \wedge B}\,\wedge\text{-intro}}{\Delta \vdash A}\,\wedge\text{-elim}$$

Dans cet exemple, il va de soi que, si notre but est de démontrer A, il est inutile de démontrer A et B pour en déduire $A \wedge B$ puis A.
On peut donc éliminer cette coupure et donner la preuve plus simple du même séquent

$$\dfrac{\pi_1}{\Delta \vdash A}$$

1. Éliminer les coupures de ces deux dérivations :
   - $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Delta, A \vdash B}}{\Delta \vdash A \to B}\,\to\text{-intro} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Delta \vdash A}}{\Delta \vdash B}\,\to\text{-elim}$$
   - $$\dfrac{\dfrac{A, A \to B, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B \to B}\,\to\text{-intro} \qquad \dfrac{A, A \to B \vdash A \quad A, A \to B \vdash A \to B}{A, A \to B \vdash B}}{A, A \to B \vdash B}\,\to\text{-elim}$$
2. Donner une transformation similaire pour chacun des connecteurs.