TD de Logique n° 3

Calcul des sequents de Gentzen

Exercice 1 Montrer dans $\mathcal{G}$ les séquents suivants :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
2. $(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}) \vdash$
3. $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
4. $\vdash \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r} \to \mathbf{s} \to \mathbf{p}$

Exercice 2

1. Montrer que pour chaque règle du système $\mathcal{G}$, une interprétation satisfait la formule associée au séquent conclusion si et seulement si elle satisfait toutes les (formules associées aux) prémisses.
2. Déduire une méthode automatique de démonstration, qui retourne soit une démonstration du séquent soit une interprétation qui falsifie la formule associée. L'ordre d'application des règles a-t-il une importance ?
3. En utilisant cet algorithme, dites si les formules suivantes sont valides ou non.
   (a) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
   (b) $\vdash (\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}),\ \mathbf{q}$
   (c) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
   (d) $(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}) \vdash$
   (e) $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
   (f) $\vdash ((\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \to (\neg\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$
   (g) $\vdash \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r} \to \mathbf{s} \to \mathbf{m}$
   (h) $\vdash \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r} \to \mathbf{s} \to \mathbf{p}$

Exercice 3 Considerez une variation du système $\mathcal{G}$ où les axiomes sont de le forme $A \vdash A$. Ce système est-il complet ? Trouvez des formules dont la preuve nécessite des axiomes dans leur forme plus génerale.

Exercice 4

1. Rajouter au calcul des séquents $\mathcal{G}$ une règle droite et une règle gauche pour le connecteur $\leftrightarrow$. Montrer qu'elles sont correctes.
2. Démontrer maintenant l'équivalence logique $\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \equiv \neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}$ à l'aide de la nouvelle version du calcul contenant ces nouvelles règles.

Exercice 5 Soient F et G deux formules propositionnelles quelconques. Soit $\mathbf{p}$ une variable propositionnelle de F et soit F' la formule obtenue en remplaçant dans F la variable $\mathbf{p}$ par la formule G de façon uniforme. Prouver que si F est une tautologie, alors F' est aussi une tautologie. Raisonner sur la preuve de la formule F dans le calcul $\mathcal{G}$.

Exercice 6 Soient M, N deux formules quelconques.

1. Montrer que s'il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash M \wedge N,\ \Delta$, alors il existe une preuve des séquents $\Gamma \vdash M,\ \Delta$ et $\Gamma \vdash N,\ \Delta$.
2. Montrer que s'il existe une preuve du séquent $\Gamma,\ M \wedge N \vdash \Delta$, alors il existe une preuve du séquent $\Gamma,\ M,\ N \vdash \Delta$.