TD de Logique n° 5

Calcul des prédicats. Sémantique

Exercice 1. (Modélisation)
On considère deux "univers parallèles" M_1 et M_2. Dans l'univers M_1 on trouve le chien *Rantanplan*, les chats *Garfield* et *Félix*, le poussin *Saturnin*, et les personnes : *Jeanne* (sympathique), aimée par *Jules* (saoûl) et *Jim* (méchant). Toutes les personnes aiment Félix. Dans l'univers M_2, on trouve seulement *Félix* et *Jim*.
(a) La phrase P : « tous les hommes sont méchants » est-elle vraie dans M_1 et M_2 ?
On considère aussi le langage $\mathcal{L}$, où l'ensemble de symboles de fonction F est vide et où les symboles de prédicats sont :

$$homme/1,\quad méchant/1,\quad femme/1,\quad chat/1,\quad chien/1,\quad personne/1,\quad sympa/1,\quad saoûl/1,\quad aime/2$$

où p/n signifie que le prédicat p est d'arité n.
(b) Modélisez formellement M_1 et M_2 par des interprétations $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ de $\mathcal{L}$.
Finalement, on considère les formules suivantes :
- $\varphi_1 = \forall x\ (homme(x) \wedge méchant(x))$,
- $\varphi_2 = \forall x\ (homme(x) \rightarrow méchant(x))$
- $\varphi_3 = \forall x\ (chat(x) \vee méchant(x))$,
- $\varphi_4 = \exists x\ saoûl(x)$,
- $\varphi_5 = \forall x \exists y\ aime(x, y)$,
- $\varphi_6 = \forall x \exists y\ (chat(x) \rightarrow aime(y, x))$

(c) Evaluez ces formules dans $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ avec une valuation σ quelconque.

Exercice 2. (Satisfiabilité, Validité, Modèle) Pour chacune des formules suivantes dites quelles sont celles qui sont satisfiables, valides, contradictoires et celles qui ont un modèle :

(1) $\forall x\ (p(x) \vee \neg p(x))$	(3) $\forall x\ \forall y\ (p(x) \leftrightarrow \neg p(y))$	(5) $\neg p(x) \wedge (\exists x\ p(x))$
(2) $\forall x\ (p(x) \rightarrow p(z))$	(4) $\forall x\ (p(x) \vee q(x))$	(6) $\exists x\ (p(x) \rightarrow p(a) \wedge p(b))$

Pour chaque formule qui n'est ni valide ni contradictoire, donnez une interprétation qui la satisfait et une qui ne la satifait pas.

Exercice 3. (Indépendance) Soient les formules :

1. $F_1 = \forall x\ p(x, x)$
2. $F_2 = \forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
3. $F_3 = \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$

Montrez qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?

Exercice 4. (Validité) Montrez que :

1. $\exists y \, \forall x \, p(y,x) \quad \models \quad \forall x \, \exists y \, p(y,x)$
2. $\forall x \, \exists y \, p(y,x) \quad \not\models \quad \exists y \, \forall x \, p(y,x)$
3. $p(x) \quad \models \quad \forall x \, p(x)$.
4. $\neg(\forall x \, A) \quad \equiv \quad \exists x \, (\neg A)$
5. $(\exists x \, A) \vee B \quad \equiv \quad \exists x \, (A \vee B)$ si $x \notin \mathit{VI}(B)$.
6. $\forall x \, (A \vee B) \quad \not\equiv \quad (\forall x \, A) \vee (\forall x \, B), \qquad \exists x \, (A \wedge B) \quad \not\equiv \quad (\exists x \, A) \wedge (\exists x \, B)$

Exercice 5. (Symboles de fonction et égalité) Soit un langage $\mathcal{L}$ avec le prédicat d'égalité $\doteq$ et un symbole de fonction binaire f. Pour chacune des formule suivantes, characterisez les interprétations qui la satisfont :

1. $\forall x \forall y \forall z \forall w \; f(x,y) \doteq f(z,w)$
2. $\forall x \forall y \forall z \; f(x,z) \doteq f(y,z)$
3. $\forall x \forall y \; f(x,y) \doteq f(y,y)$
4. $\forall x \forall y \exists z \; f(x,y) \doteq f(z,y)$
5. $\forall x \forall y \forall z \; f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z)$

Exercice 6. Soit Σ la signature avec $\Sigma_P = \{ p/2, q/1 \}$ et $\Sigma_F = \{ a/0, f/1, g/2 \}$.
Soit $\mathcal{I}$ une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(f)(n) := n+1$, $\mathcal{I}(p)(n,m) :\Leftrightarrow (n = m)$. Pour chacun des ensemble de formules T suivants, complétez $\mathcal{I}$ en deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de T.

1. $T_1 = \{ \forall x \forall y (p(g(x,y), g(y,x))) \}$;
2. $T_2 = \{ \exists x (q(x)), \exists x (\neg q(x)), \forall x (q(x) \rightarrow q(f(f(x)))) \}$;
3. $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{ \forall x \forall y (q(x) \wedge \neg q(y) \rightarrow q(g(x,y)) \}$;
4. $T_4 = T_1 \cup \big\{ \forall x \big[q(x) \leftrightarrow \big(\neg p(x,a) \wedge \neg p(x, f(a)) \wedge \forall y \forall z (p(x, g(y,z)) \rightarrow (p(x,y) \vee p(x,z))) \big) \big] \big\}$.