TD de Logique n° 6

Calcul des prédicats de Gentzen

Exercice 1. (Quelques dérivations dans $\mathcal{G}$)
Prouver les séquents suivants dans $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{rcl}
\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) & \vdash & Q(a) \\
\forall x P(x) & \vdash & \exists x P(x) \\
\exists x(P(x) \wedge Q(x)) & \vdash & \exists x P(x) \\
\exists x \forall y P(x,y) & \vdash & \forall y \exists x P(x,y) \\
 & \vdash & \exists x(P(x) \to (P(f(x)) \wedge P(g(x)))) \\
 & \vdash & (\forall x(P \vee Q(x))) \to (P \vee \forall x Q(x)) \\
\forall x \forall y P(x,y) & \vdash & \forall x \forall y P(y,x)
\end{array}$$

Quelles réciproques vous paraissent valides ? Lesquelles sont seulement satisfiables ?

Exercice 2. (Dérivations supplémentaires dans $\mathcal{G}$)
Essayer de dériver les séquents suivants :

$$\begin{array}{rcl}
 & \vdash & \exists x(P(f(x)) \to P(x)) \\
 & \vdash & \exists x \exists y(P(x,f(y)) \to P(f(x),y)) \\
P(0), \forall x(P(x) \to I(s(x))), \forall x(I(x) \to P(s(x))) & \vdash & I(s(s(s(0)))) \\
\forall x P(0,x,x), \forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(x,s(y),s(z))), & & \\
\forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(y,x,z)) & \vdash & \forall x P(x,0,x) \\
 & \vdash & \exists x((P(x) \to P(f(x))) \to P(g(x)))
\end{array}$$

Pour les séquents qui ne paraissent pas dérivables, la méthode de recherche de preuve s'arrête-t-elle ? Pouvez vous définir un contre-modèle de la formule associée au séquent ?
(*nota* : un contre-modèle de A n'est pas un modèle de $\neg A$, mais une interpretation qui n'est pas un modèle de A, c.a.d. que $\mathcal{I}$ *satisfait* $\neg A$)

Exercice 3. L'ordre des règles est-il important dans le système $\mathcal{G}$ des prédicats ? Trouver un exemple de séquent justifiant ce fait. Quelles sont les règles à appliquer en premier ? En dernier ?

Exercice 4. (Lemme de Kleene)

1. Montrer par induction que si on peut dériver le séquent

   $$\Delta \vdash \forall x A[x], \Gamma$$

   alors on peut obtenir une dérivation du séquent

   $$\Delta \vdash A[x], \Gamma$$

   en supposant que x est une variable fraîche. (On note $A[x]$ la formule A, où l'on distingue toutes les occurences libres de x. Ainsi $A[t] = \{x/t\}A[x]$).

2. Essayer de prouver que si on a une dérivation du séquent

$$\Delta, \forall x A[x] \vdash \Gamma$$

alors on peut obtenir une dérivation du séquent

$$\Delta, A[t] \vdash \Gamma$$

pour un certain terme t. Quel(s) est (sont) les cas qui posent problème ?