TD de Logique n° 2

Système de Hilbert
Déduction Naturelle

Les énoncés des TD sont disponibles sur `http://www.liafa.jussieu.fr/~haberm/cours/logique/`

Système de Hilbert

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication « $\rightarrow$ » est associative à droite ; par exemple, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ signifie $\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$.

Exercice 1

1. Montrez que $\vdash_{H_\rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$.
2. Montrez que $\vdash_{H_\rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$.
3. Montrez que $\vdash_{H_\rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$

Exercice 2

1. Soit $H_\rightarrow^+$ le système $H_\rightarrow$ augmenté de la règle suivante :
$$\frac{A \rightarrow B \rightarrow C}{B \rightarrow A \rightarrow C}$$
Montrez que $\Delta \vdash_{H_\rightarrow} P$ si et seulement si $\Delta \vdash_{H_\rightarrow^+} P$.
2. Déduisez-en que $\vdash_{H_\rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$.
3. Montrez aussi que $\vdash_{H_\rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$.

Exercice 3

1. Montrez que $\vdash_{H_{\mathrm{prop}}} ((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?
2. Montrez que $\vdash_{H_{\mathrm{prop}}} \mathbf{p} \rightarrow \neg\neg\mathbf{p}$.
3. Montrez que $\vdash_{H_{\mathrm{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?

Déduction Naturelle

Exercice 4 En utilisant $\vdash_{DN_{\mathrm{prop}}}$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. $\vdash ((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \rightarrow \neg\mathbf{q})) \rightarrow \neg\mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$
5. $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$

Équivalence entre déduction naturelle et système de Hilbert

Dans l'exercice suivant, on considère l'ensemble de formules $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$ et les systèmes $DN_{\neg,\vee}$ et H_{prop} où :

- $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$ est l'ensemble des formules propositionnelles construites à partir des seuls connecteurs $\neg$ et $\vee$.
- $DN_{\neg,\vee}$ est un sous-système de DN_{prop} pour l'ensemble $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$.

Exercice 5

1. Donnez une dérivation du séquent $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vdash_{DN_{\neg,\vee}} \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$.
2. Transformez cette dérivation en une dérivation dans le système H_{prop}.
3. Donnez une dérivation du séquent $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \vdash_{DN_{\neg,\vee}} \mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.
4. Transformez cette dérivation en une dérivation dans le système H_{prop}.
5. Montrez que pour toute formule $A \in \mathbf{F}_{\neg,\vee}$ et tout ensemble fini Δ de formules de $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$: si $\Delta \vdash_{DN_{\neg,\vee}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
6. Donnez une dérivation du séquent $\vdash_{DN_{\neg,\vee}} \neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}$.
7. (*À faire chez vous*) Montrez l'équivalence des systèmes DN_{prop} et H_{prop}, *i.e.* montrez que pour toute formule A et tout ensemble de formule Δ, on a :
   - si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
   - si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.