

TD de Logique n° 4

Calcul des prédicats. Syntaxe

Exercice 1 (Syntaxe) Soient :

- p, q deux symboles de prédicats binaires,
- r un symbole de prédicat unaire,
- f, h deux symboles de fonctions unaires,
- a un symbole de fonction 0-aire et
- g un symbole de fonction ternaire.

Soit la formule du calcul des prédicats suivante :

$$F = \exists x p(x, f(y)) \vee \neg \forall y q(y, g(a, z, h(z)))$$

1. Donnez tous les termes apparaissant dans F
2. Donnez tous les atomes apparaissant dans F
3. Donnez toutes les sous-formules de F .

Exercice 2 (Formalisation 1)

En utilisant les symboles de prédicat suivants

$C(x)$ « x est un champignon »

$R(x)$ « x est rose »

$V(x)$ « x est vénéréux »

$Eq(x, y)$ « x est égal à y »

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. Tous les champignons roses sont vénéréux.
2. Aucun champignon rose n'est vénéréux.
3. Tout champignon est rose ou vénéréux.
4. Tout champignon est soit rose soit vénéréux, mais pas les deux ("ou" exclusif).
5. Tous les champignons roses, sauf un, sont vénéréux.
6. Il existe exactement deux champignons roses.

Exercice 3 (Formalisation 2)

En utilisant les symboles de prédicat suivants

$A(x)$ « x est anglais »

$H(x, y)$ « x hait y »

$C(x, y)$ « x connaît y »

et les symboles de fonction suivants

$e(x)$ dénote le pire ennemi de x

n dénote Napoléon

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. Tout anglais hait son pire ennemi.
2. Napoléon connaît son pire ennemi.
3. Celui qui connaît son pire ennemi ne le hait pas.
4. Personne ne connaît le pire ennemi de Napoléon.
5. Le pire ennemi de Napoléon est anglais.
6. Quiconque hait quelqu'un, ne hait pas son pire ennemi.

Exercice 4 (Substitutions)

1. Soit $t = p(x, y)$. On considère les substitutions $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a)\}$ et $\sigma_2 = \{y \mapsto f(x)\}$.
 - Calculez : $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_1(\sigma_2(t))$ et $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
 - Calculez : $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$. (Rappel : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour toute variable x).
 - Est-ce que la définition de la composition s'étend à tous les termes, en particulier au terme t : est-ce vrai que $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(t) = \sigma_1(\sigma_2(t))$?
2. Soit $\sigma_1 = \{x \mapsto y\}$ et soit $\sigma_2 = \{y \mapsto x\}$. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
3. Soit s le terme $r(x, y, z)$ et les substitutions

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(x), z \mapsto b\} \\ \sigma_2 &= \{x \mapsto f(z), y \mapsto f(b), z \mapsto b\} \\ \sigma_3 &= \{w \mapsto z, z \mapsto b\} \circ \{x \mapsto f(w), y \mapsto a\}\end{aligned}$$

Calculer $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ et $\sigma_3(s)$.

Exercice 5 (Variables libres, liées)

- Dans la formule suivante, indiquez pour chaque variable, si elle est libre ou liée, et le cas échéant à quel connecteur elle est liée.

$$F = \forall x [\exists y (p(x, y)) \wedge \exists x (q(y, x) \wedge \forall y r(y, y))]$$

- Appliquez à F la substitution $\sigma = \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(f(a))\}$.
- Transformez F pour la rendre plus lisible.