TD de Logique n° 5

Calcul des prédicats. Sémantique

Exercice 1 (Formalisation) Si tous les enfants du monde, ...
On prend comme domaine l'ensemble des enfants qui font une ronde. On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{ g/1, k/0 \}$ où :

$g(x)$	dénote l'enfant à gauche de x ;
k	dénote l'enfant Kikujiro ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{ R/0, T/1, C/2 \}$ où :

R	“ la ronde tourne rond ” ;
$T(x)$	“ x trébuche ” ;
$C(x, y)$	“ x connaît y ”.

Exprimez en français les formules suivantes

1. $\exists x.\ T(x) \to \neg R$
2. $\forall x.\ (C(x, k) \vee C(x, g(k)))$
3. $\forall x.\ (\exists y.(t(y) \wedge C(x, y)) \to C(g(g(x)), x))$
4. $\neg \exists x.\ C(k, x) \to \neg \forall x.\ t(x)$
5. $(R \wedge \exists x.\ C(x, x)) \to \forall x.\ C(k, x)$

Exercice 2 (Modélisation)
On considère deux “univers parallèles” M_1 et M_2. Dans l'univers M_1 on trouve le chien *Rantanplan*, les chats *Garfield* et *Félix*, le poussin *Saturnin*, et les personnes : *Jeanne* (sympathique), aimée par *Jules* (saoul) et *Jim* (méchant). Toutes les personnes aiment Félix. Dans l'univers M_2, on trouve seulement *Félix* et *Jim*.
(a) La phrase P : « tous les hommes sont méchants » est-elle vraie dans M_1 et M_2 ?
On considère aussi le langage $\mathcal{L}$, où l'ensemble de symboles de fonction F est vide et où les symboles de prédicats sont :

homme/1, *méchant*/1, *femme*/1, *chat*/1, *chien*/1, *personne*/1, *sympa*/1, *saoul*/1, *aime*/2

où p/n signifie que le prédicat p est d'arité n.
(b) Modélisez formellement M_1 et M_2 par des interprétations $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ de $\mathcal{L}$.
Finalement, on considère les formules suivantes :

- $\varphi_1 = \forall x.\ (\mathit{homme}(x) \wedge \mathit{méchant}(x))$,
- $\varphi_2 = \forall x.\ (\mathit{homme}(x) \to \mathit{méchant}(x))$
- $\varphi_3 = \forall x.\ (\mathit{chat}(x) \vee \mathit{méchant}(x))$,
- $\varphi_4 = \exists x.\ \mathit{saoul}(x)$,
- $\varphi_5 = \forall x.\exists y.\ \mathit{aime}(x, y)$,
- $\varphi_6 = \forall x.\exists y.\ (\mathit{chat}(x) \to \mathit{aime}(y, x))$

(c) Évaluez ces formules dans $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ avec une valuation σ quelconque.

Exercice 3 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacune des formules suivantes dites quelles sont celles qui sont satisfaisables, valides, contradictoires (i.e. non satisfaisables) et celles qui ont un modèle :

(1)	$\forall x.\ (p(x) \vee \neg p(x))$	(3)	$\forall x.\ \forall y.\ (p(x) \leftrightarrow \neg p(y))$	(5)	$\neg p(x) \wedge (\exists x.\ p(x))$
(2)	$\forall x.\ (p(x) \rightarrow p(z))$	(4)	$\forall x.\ (p(x) \vee q(x))$	(6)	$\exists x.\ (p(x) \rightarrow p(a) \wedge p(b))$

Pour chaque formule qui n'est ni valide ni contradictoire, prouvez-le.

Exercice 4 (Indépendance) Soient les formules :

1. $F_1 \;=\; \forall x.\ p(x,x)$
2. $F_2 \;=\; \forall x.\ \forall y.\ (p(x,y) \rightarrow p(y,x))$
3. $F_3 \;=\; \forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$

Montrez qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?