

## TD de Logique n° 8

## Unification

**Exercice 1** Les lettres  $a, b, f, g, h, k, p, q$  sont des symboles de fonction, les autres sont des variables. Appliquez l'algorithme d'unification aux problèmes suivants :

1.  $p(a, x, f(g(y))) \doteq p(z, f(z), f(u))$
2.  $q(f(a), g(x)) \doteq q(y, y)$
3.  $p(x, f(x), f(f(x))) \doteq p(f(f(y)), y, f(y))$
4.  $p(x, f(y, z)) \doteq p(x, g(h(k(x))))$
5.  $p(x, f(u, x)) \doteq p(f(y, a), f(z, f(b, z)))$
6.  $p(x, f(x), g(f(x), x)) \doteq p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
7.  $p(f(g(x, y)), g(v, w), y) \doteq p(f(z), x, f(x))$
8.  $p(f(y), f(z), f(t), f(x)) \doteq p(g(z), g(x), g(y), g(z))$

**Exercice 2**

1. Montrez que  $\sigma_1 = \{x/f(y), y/a, z/t\}$  et  $\sigma_2 = \{x/f(t), y/a, z/y, t/y\}$  sont égales à un renommage près, i.e. que  $\sigma_1 \sim \sigma_2$ .
2. Soient les substitutions  $\sigma_1 = \{y/f(x), z/t, u/w\}$  et  $\sigma_2 = \{x/z, y/f(z), t/z, w/u\}$ . A-t-on  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  ? A-t-on  $\sigma_2 \leq \sigma_1$  ? A-t-on  $\sigma_2 \sim \sigma_1$  ?

**Exercice 3 (Correction)**

1. Montrez la correction de l'algorithme d'unification. Pour cela
  - (a) montrez que si on transforme un problème  $\mathcal{P}$  en un problème  $\mathcal{S}$ , les unificateurs de  $\mathcal{P}$  sont les mêmes que ceux de  $\mathcal{S}$ . Vous raisonnerez par induction.
  - (b) Montrez également que si le problème  $\mathcal{P}$  est en forme résolue, c'est bien l'unificateur principal de  $\mathcal{P}$  qui est obtenu.
2. La condition de bord de la règle « orienter » est-elle nécessaire pour assurer la correction ?
3. Même question pour chacune des deux conditions de bord de la règle « remplacer ».

**Exercice 4 (Terminaison)**

1. Montrez la terminaison de l'algorithme d'unification. Pour cela, on considérera l'ordre lexicographique sur le triplet :

$$\langle \text{nb. de variables non résolues, taille du problème, nb. d'équations } t = s \rangle$$

où

- *nb. de variables non résolues* désigne le nombre de variables non résolues qui apparaissent dans le problème. Une variable  $x$  est résolue dans un problème si elle apparaît dans une équation  $x \doteq t$  de ce problème, sans apparaître ni dans  $t$  ni dans aucune autre équation du problème.

- *taille du problème* désigne le nombre total de variables et de symboles de fonctions qui apparaissent dans le problème. (Chaque occurrence d'un même symbole compte pour 1).
  - *nb. d'équations  $t \doteq s$*  désigne le nombre d'équations de la forme  $t \doteq s$  où  $t$  n'est pas une variable qui figure dans le problème,  $s$  pouvant être une variable.
2. La condition de bord de la règle « orienter » (qui impose que le membre gauche de l'équation à orienter n'est pas une variable) est-elle nécessaire pour assurer la terminaison ?
  3. Même question pour chacune des deux conditions de bord de la règle « remplacer ».