Logique – Partiel (durée : 3 heures)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de ***lire*** *le sujet.*

Pour la rédaction, utilisez une feuille pour les exercices 1 et 2, une autre pour les exercices 2 et 3 et enfin une troisième pour les exercices 4 et 5.

Exercice 1 [Sémantique du calcul propositionnel] Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? contradictoires ? Justifiez. Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, donner une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait.

- $(p \to \neg q) \vee p$
- $\neg q \to (p \vee r) \vee (p \wedge q)$
- $(p \to (\neg p \vee q)) \to q$
- $p \to ((\neg p \vee q) \to q)$
- $((p \vee q) \to \neg r) \wedge (\neg r \vee q \vee p)$

Exercice 2 [Sémantique du calcul propositionnel] Considérez la table de vérité suivante pour une formule inconnue A :

p	q	r	A
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

- Donnez une formule A avec **le moins** de connecteurs logiques possible qui a cette table de vérité.
- Donnez une formule A avec uniquement le connecteur $\to$.

Exercice 3 [Formalisation]

On prend comme domaine l'ensemble des employés d'une entreprise de restauration dans cet entreprise, à chaque employé est attribué un remplaçant.

On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{\, e/1, a/0 \,\}$ où :

$r(x)$ dénote le remplaçant x ;
a dénote l'employé Albert ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{\, S/1, C/1, O/2 \,\}$ où :

$S(x)$	" x sert en salle " ;
$C(x)$	" x sait faire le café " ;
$O(x, y)$	" x est sous les ordres de y ".

1. Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :
   (a) Le remplaçant d'Albert ne sait pas faire le café.
   (b) Tous les employés qui savent faire le café sont sous les ordres d'Albert.
   (c) Aucun des employés qui ne servent pas en salle ne sont sous les ordres de quelqu'un qui sait faire le café.
   (d) Au moins un employé est sous les ordres du remplaçant d'un employé qui sert en salle.
2. Exprimez en français les formules suivantes
   (a) $\forall x.(O(x, r(a)) \to S(x))$
   (b) $\exists x.\ (C(x) \vee \neg C(r(x)))$
   (c) $\forall x.\ (\exists y.(O(y, x) \wedge C(y)) \to C(x))$
   (d) $\neg\exists x.\ (\forall y.\ (C(y) \wedge S(y)) \to O(y, x)))$

Exercice 4 [Théorie de la démonstration]

- Donner une dérivation en déduction naturelle propositionnelle (DN_{prop}) des séquents suivants :
  - $\vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{r}) \to ((\mathbf{q} \to \mathbf{r}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r}))$
  - $\vdash (\mathbf{p} \to (\mathbf{q} \to \mathbf{r})) \to ((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\mathbf{p} \to \mathbf{r}))$
- Pour chacun des séquents suivants, déterminer s'ils sont valides en donnant une dérivation dans le système $\mathcal{G}$ ou en donnant une interprétation qui falsifie le séquent :
  - $\vdash \neg\mathbf{p} \wedge (\neg\mathbf{q} \vee \neg\mathbf{r}),\ (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
  - $\vdash \mathbf{p} \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}),\ \mathbf{p} \to \mathbf{q},\ \mathbf{r}$

Exercice 5 [Théorie de la démonstration]

On considère le système de calcul des séquents $\mathcal{G}'$ qui est obtenu à partir du système $\mathcal{G}$ dans lequel la règle $\wedge$d a été remplacée par la suivante :

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \vdash A \wedge B,\ \Delta_1,\ \Delta_2}\wedge\text{d'}$$

où les contextes des deux séquents prémisses peuvent être différents (Γ_1 et Γ_2 peuvent être différents, idem pour Δ_1 et Δ_2). On remarque que dans le cas où les contextes sont identiques, ils se retrouvent dupliqués dans le séquent conclusion.

Exemple La dérivation suivante utilise une instance de la règle $\wedge$d' :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{ax}}{A \vdash A \vee B}\vee\text{d}}{A,\ A \vdash A \wedge (A \vee B)}\wedge\text{d'}}{A \vdash A \to (A \wedge (A \vee B))}\to\text{d} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{ax}}{A \vdash A \vee C}\vee\text{d} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\text{ax}}{B \vdash B \vee C}\vee\text{d}}{A,\ B \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)}\wedge\text{d'}$$

Remarque : Toutes les autres règles du système $\mathcal{G}'$ sont les mêmes que celles du système $\mathcal{G}$.q

Théorème de l'affaiblissement (rappel) : *Si le séquent* $\Gamma \vdash \Delta$ *est dérivable dans le système* $\mathcal{G}$*, alors pour toute formule* A *les séquents* $\Gamma \vdash A, \Delta$ *et* $\Gamma, A \vdash \Delta$ *sont aussi dérivables dans* $\mathcal{G}$*.*

Théorème de la contraction (rappel) : *Si le séquent* $\Gamma \vdash A, A, \Delta$ *est dérivable dans le système* $\mathcal{G}$*, alors le séquent* $\Gamma \vdash A, \Delta$ *est aussi dérivable dans* $\mathcal{G}$*. De même, si* $\Gamma, A, A \vdash \Delta$ *est dérivable dans* $\mathcal{G}$*, alors le séquent* $\Gamma, A \vdash \Delta$ *est aussi dérivable dans* $\mathcal{G}$*.*

- Montrez que s'il existe une dérivation du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}'$, alors il existe une dérivation du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dans le système $\mathcal{G}$.
- Quelle propriété doit satisfaire le système $\mathcal{G}'$ pour obtenir la réciproque (à savoir : s'il existe une dérivation du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$, alors il existe une dérivation du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dans le système $\mathcal{G}'$) ?