Logique – Partiel (durée : 3 heures)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de ***lire*** *le sujet.*

Pour la rédaction, utilisez une feuille pour l'exercice 1, une autre pour les exercices 2 et 3 et enfin une troisième pour les exercices 4 et 5.

Exercice 1 [Sémantique du calcul propositionnel] Soit β un nouveau connecteur logique et soit $\mathcal{FB}_\beta$ la fonction booléenne binaire qui interprète le symbole β et qui est définie par la table suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{FB}_\beta(V,V) &= F \\
\mathcal{FB}_\beta(V,F) &= V \\
\mathcal{FB}_\beta(F,V) &= F \\
\mathcal{FB}_\beta(F,F) &= F
\end{aligned}$$

1. Donnez une table de vérité pour la formule $p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$. Est-ce que cette formule est valide ? satisfaisable ? Est-elle conséquence logique de $p \wedge r$?
   Correction:
   Table verité :

p	q	r	$q\ \beta\ r$	$p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$	$p \wedge r$
F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F
V	V	V	F	V	V

   La formule $p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$ n'est pas valide car l'interprétation I_1 avec $I_1(p) = I_1(q) = I_1(r) = F$ ne la satisfait pas. Par contre, elle est satisfaisable car l'interprétation I_2 avec $I_2(p) = I_2(q) = I_2(r) = V$ la satisfait. Elle est conséquence logique de $p \wedge r$, parce que d'après la table de verité toute interprétation I qui satisfait $p \wedge r$ satisfait aussi $p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$.

2. Indiquez une formule A telle que $A \equiv p\ \beta\ q$ et telle que les seules connecteurs de A soient $\neg$ et $\vee$.

   Correction: Par exemple $\neg(\neg p \vee q)$. On peut le vérifier en utilisant des tables de verité.

3. Indiquez une formule B telle que $B \equiv p \wedge q$ et telle que les seules connecteurs de B soient $\neg$ et β .

   Correction: Par exemple $p \ \beta \ \neg q$ où $p \ \beta \ (p \ \beta \ q)$. On peut le vérifier en utilisant des tables de verité.

Exercice 2 **[Déduction Naturelle]**

1. Montrez que $A \wedge B \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge (B \vee C)$ et $A \wedge C \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge (B \vee C)$.
2. Déduisez-en que $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge (B \vee C)$.
3. Montrez que $A \wedge (B \vee C), B \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge B$.
4. Montrez que $A \wedge (B \vee C) \vdash_{DN_{\text{prop}}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
5. Montrez enfin que $\vdash_{DN_{\text{prop}}} (A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Correction:

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \wedge B$}
\RightLabel{$\wedge e$}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \wedge B$}
\RightLabel{$\wedge e$}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash B$}
\RightLabel{$\vee i$}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash B \vee C$}
\RightLabel{$\wedge i$}
\BinaryInfC{$A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)$}
\end{prooftree}
$$

   L'autre est symétrique.

2.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \wedge C \vdash A \wedge (B \vee C)$}
\RightLabel{$\vee e$}
\TrinaryInfC{$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$}
\end{prooftree}
$$

3.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge (B \vee C)$}
\RightLabel{$\wedge e$}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), B \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), B \vdash B$}
\RightLabel{$\wedge i$}
\BinaryInfC{$A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

4. Similairement au point précédant, on obtient $A \wedge (B \vee C), C \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge C$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge (B \vee C)$}
\RightLabel{$\wedge e$}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C) \vdash B \vee C$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge B$}
\RightLabel{$\vee i$}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), C \vdash A \wedge C$}
\RightLabel{$\vee i$}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C), C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$}
\RightLabel{$\vee e$}
\TrinaryInfC{$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$}
\end{prooftree}
$$

5.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\, 4$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$}
\RightLabel{$\to i$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3 **[Système $\mathcal{G}$]**

1. Pour chacun des séquents suivants, utiliser les règles du système $\mathcal{G}$ pour en trouver une dérivation.
   (a) $\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \neg\mathbf{r} \vdash \neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$.
   (b) $\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \vdash (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \vee \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})$.
2. Utiliser les règles du système $\mathcal{G}$ pour trouver une interprétation qui falsifie chacun des séquents suivants.
   (a) $\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}$.
   (b) $(\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to \mathbf{r} \vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{r}) \vee (\mathbf{q} \to \mathbf{r})$.
3. Donner toutes les dérivations des séquents suivants dans le système $\mathcal{G}$.
   (a) $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}$.

Correction:

1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{q},\neg\mathbf{r},\mathbf{p}\vdash\mathbf{q}}\,ax\qquad\dfrac{}{\neg\mathbf{r},\mathbf{p}\vdash\mathbf{p},\mathbf{q}}\,ax}{\mathbf{p}\to\mathbf{q},\neg\mathbf{r},\mathbf{p}\vdash\mathbf{q}}\to g}{\mathbf{p}\to\mathbf{q},\neg\mathbf{r}\vdash\neg\mathbf{p},\mathbf{q}}\,\neg d}{\mathbf{p}\to\mathbf{q},\neg\mathbf{r}\vdash\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q}}\,\vee d$$

   (b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash\mathbf{q}}\,ax\qquad\dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash\mathbf{r}}\,ax}{\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}}\,\wedge d}{\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}),\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash}\,\neg g\qquad\dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash\mathbf{p}}\,ax}{\mathbf{p}\to\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}),\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash}\to g}{\mathbf{p}\to\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}),\mathbf{p}\wedge\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash}\,\wedge g}{\mathbf{p}\to\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}),\mathbf{p}\wedge\mathbf{r},\mathbf{p}\vdash\neg\mathbf{q}}\,\neg d}{\mathbf{p}\to\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}),\mathbf{p}\wedge\mathbf{r}\vdash\mathbf{p}\to\neg\mathbf{q}}\to d}{\mathbf{p}\to\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})\vdash\mathbf{p}\to\neg\mathbf{q},\neg(\mathbf{p}\wedge\mathbf{r})}\,\neg d}{\mathbf{p}\to\neg(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})\vdash(\mathbf{p}\to\neg\mathbf{q})\vee\neg(\mathbf{p}\wedge\mathbf{r})}\,\vee d$$

2. (a) En reversant les regles, on arrive à

$$\dfrac{\mathbf{q}\vdash\mathbf{p},\mathbf{p}\qquad\mathbf{q},\mathbf{q}\vdash\mathbf{p}}{\mathbf{p}\to\mathbf{q},\mathbf{q}\vdash\mathbf{p}}\to g$$

   Pour exemple $\mathbf{q}\mapsto\mathbf{V},\mathbf{p}\mapsto\mathbf{F}$ falsifie le séquent.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{r}, \mathbf{r}}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{r}, \mathbf{r}}{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{p} \vdash \neg\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{r}}\,\neg d}{\mathbf{q}, \mathbf{p} \vdash \neg\mathbf{p}, \neg\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{r}}\,\neg d}{\mathbf{q}, \mathbf{p} \vdash \neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{r}}\,\vee d}{(\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to \mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{r}, \mathbf{r}}\,\to g}{(\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to \mathbf{r}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p} \to \mathbf{r}, \mathbf{r}}\,\to d}{\dfrac{(\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{p} \to \mathbf{r}, \mathbf{q} \to \mathbf{r}}{(\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to \mathbf{r} \vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{r}) \vee (\mathbf{q} \to \mathbf{r})}\,\vee d}\,\to d$$

Alors $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{V}, \mathbf{q} \mapsto \mathbf{V}, \mathbf{r} \mapsto \mathbf{F}$ falsifie le séquent.

3. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}, \mathbf{r}}\,ax \qquad \dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \vdash \mathbf{r}}\,ax}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{r}}\,\to g \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}, \mathbf{q}}\,ax \qquad \dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \vdash \mathbf{q}}\,ax}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{q}}\,\to g}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}}\,\wedge d}{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}}\,\wedge g$$

et d'autres... avec un peu de raisonnement, on arrive a 10 preuves différentes (si on admet que des axiomes avec que des variables propositionelles). En fait si on commence par la seule règle unaire ($\wedge d$), le seule choix restant c'est l'ordre des autres deux (donc 2 choix). Si on commence par une règle binaire, on a *pour chacun des deux branchements* 2 choix, donc ce sont 4 choix différents. Donc : $2 + 4 + 4 = 10$.

Exercice 4 [Calcul des Prédicats - Substitutions] Soit Σ une signature dont

- les symboles de prédicats sont $\Sigma_P = \{ A/2, C/2, K/1 \}$;
- les symboles de fonctions sont $\Sigma_F = \{ g/2, f/1, a/0 \}$.

Soit la formule

$$\varphi = \forall x\ [A(x, y) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y), a) \wedge K(g(x, f(z)))) \vee A(y, z)].$$

Pour chacune des substitutions σ_i suivantes, évaluez $\sigma_i(\varphi)$:

1. $\sigma_1 = \{y/g(f(a), a), z/f(x)\}$;
2. $\sigma_2 = \{x/f(a), z/x\} \circ \{x/g(x, y), z/f(z)\}$.

Correction:

1. On doit renommer x dans la formule (sinon x est libre dans un des termes substitué, ce qui n'est pas autorisé). Après renommage on obtient,

$$\forall u\ [A(u, y) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y), a) \wedge K(g(u, f(z)))) \vee A(y, z)].$$

   En appliquant la substitution on obtient

$$\forall u\ [A(u, g(f(a), a)) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y), a) \wedge K(g(u, f(f(x))))) \vee A((g(f(a), a), f(x))].$$

2. Comme précédemment on doit renommer, ensuite on obtient :

$$\forall u\ [A(u, y) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y), a) \wedge K(g(u, f(f(x))))) \vee A(y, f(x))].$$

Exercice 5 [Calcul des Prédicats - Formalisation] On prend comme domaine l'ensemble des robots de la planète Schtark, dans cette planète tout robot a un "jumeau". On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{ j/1, r/0 \}$ où :

$j(x)$	dénote le jumeau de x ;
r	dénote le robot R56 ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{ P/1, R/1, C/2 \}$ où :

$P(x)$	" x est en panne " ;
$R(x)$	" x a des roues " ;
$C(x, y)$	" x comprend le langage de y ".

Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. le jumeau de R56 est en panne ;
2. les jumeaux de tous les robots qui ont des roues sont en panne ;
3. tous les robots sans roue qui comprennent au moins un robot qui a des roues sont en panne ;
4. R56 ne comprend pas tous les robots en panne.

Correction:

1. $P(j(r))$
2. $\forall x \ (R(x) \Rightarrow P(j(x))$
3. $\forall x \ \{[\neg R(x) \wedge (\exists y \ R(x) \Rightarrow C(x, y))] \Rightarrow P(x)\}$
4. $\neg \forall x \ (P(x) \Rightarrow C(r, x))$

Exprimez en français les formules suivantes

1. $\forall x \ (R(x) \Rightarrow P(x))$
2. $\exists x \ (R(x) \wedge C(x, r))$
3. $\forall x \ (C(x, j(x)) \Rightarrow C(x, r)$
4. $\neg \exists x \ C(x, j(r))$

Correction:

1. tous les robots à roues sont en panne
2. il existe un robot à roue qui comprend R56
3. les robots qui comprennent leur propre jumeau comprennent R56
4. il n'existe aucun robot qui comprenne le jumeau de R56