TD de Logique n^o 1

Rappels : induction et logique propositionnelle

Exercice 1 – **Échauffement** Lesquels des raisonements suivants sont formalisables en logique propositionnelle ? Si c'est le cas, donnez une formalisation et vérifiez s'il est effectivement valide.

1. Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ;
   je serai heureux et sage ;
   donc j'étudie la logique.
2. Napoléon était allemand ;
   les allemands sont européens ;
   donc Napoléon était européen.
3. Napoléon était allemand ;
   les allemands sont asiatiques ;
   donc Napoléon était asiatique.
4. Napoléon était français ;
   tous les français sont européens ;
   donc Hitler était Autrichien.
5. Si Napoléon avait été chinois, alors il aurait été asiatique ;
   Napoléon n'était pas asiatique ;
   donc il n'était pas chinois.
6. S'il pleut, on annulera le pique-nique.
   S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage et le pique-nique sera annulé.
   Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas.
   Donc le pique-nique sera annulé.

Exercice 2 – **Interprétation** Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? contradictoires ? Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, on donnera une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait. On essayera de raisonner sans écrire la table de vérité.

1.	$p \wedge \neg p$	7.	$p \to (p \wedge q)$	13 ∗ .	$p \vee \neg p$
2.	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	8.	$p \vee (p \to q)$	14.	$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
3.	$(p \wedge \neg p) \to q$	9 ∗ .	$q \vee (p \to q)$	15 ∗ .	$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$
4 ∗ .	$(p \wedge q) \to p$	10 ∗ .	$p \wedge (p \to q)$	16.	$(\neg p \to p) \to p$
5 ∗ .	$(p \vee q) \to q$	11 ∗ .	$q \wedge (p \to q)$	17 ∗ .	$(\neg p \to p) \to \neg p$
6 ∗ .	$p \to (p \vee q)$	12 ∗ .	$p \vee q$	18 ∗ .	$((p \to q) \to p) \to p$

(* Les exercices marqués d'une étoile sont à faire chez vous.)

Exercice 3 – Mots bien parenthésés. (A faire chez vous) Dans cet exercice, on travaille avec un alphabet Σ dans lequel on distingue deux lettres particulières $\texttt{[} \in \Sigma$ ("crochet ouvrant") et $\texttt{]} \in \Sigma$ ("crochet fermant"), les autres éléments de Σ étant arbitraires. L'ensemble E des mots *bien parenthésés* est défini inductivement à partir des règles suivantes :

- $\varepsilon \in E$ (ε désigne le mot vide) ;
- si $x \in \Sigma$ est une lettre différente de $\texttt{[}$ et de $\texttt{]}$, alors $x \in E$;
- si $u \in E$, alors $\texttt{[}u\texttt{]} \in E$;
- si $u, v \in E$, et si u et v sont non nuls, alors $uv \in E$.

À toute lettre $x \in \Sigma$, on associe un *poids* $p(x) \in \mathbb{N}$ défini par :

$$p(\texttt{[}) = 1, \qquad p(\texttt{]}) = -1, \qquad p(x) = 0 \quad \text{si } x \in \Sigma \setminus \{\texttt{[};\texttt{]}\}.$$

On étend cette fonction de poids à tous les mots sur l'alphabet Σ en posant

$$p(x_1 x_2 \cdots x_n) \;=\; p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

pour tout mot $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^*$. En particulier, $p(\varepsilon) = 0$.

1. Montrez que tout mot bien parenthésé $u \in E$ satisfait les deux propriétés suivantes :
   (a) $p(u) = 0$.
   (b) pour tout préfixe v de u, on a $p(v) \geq 0$;
2. Montrez réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait les propriétés (a) et (b) de la question précédente, alors u est bien parenthésé.
3. Déduisez-en un algorithme qui permet de tester si un mot est bien parenthésé ou non.

Exercice 4 On considère l'ensemble d'expressions E défini par la grammaire

$$S \to a \;\mid\; f(S,S) \;\mid\; g(S,S,S)$$

où seul l'axiome S est un non terminal. Autrement dit, E est le plus petit ensemble tel que

- $a \in E$
- si $e_1, e_2 \in E$, alors $f(e_1, e_2) \in E$
- si $e_1, e_2, e_3 \in E$, alors $g(e_1, e_2, e_3) \in E$

On note $|e|_a$, $|e|_f$ et $|e|_g$ le nombre de symboles 'a', 'f' et 'g' respectivement dans une expression $e \in E$. Montrez par récurrence sur la structure de l'expression que

$$\forall e \in E, 2|e|_g + |e|_f + 1 = |e|_a$$

Exercice 5 On considère la fonction Z définie inductivement sur les arbres binaires comme suit :

$$\begin{cases} Z(vide, A) & := \quad A \\ Z(node(A_1, A_2), A) & := \quad Z(A_1, node(A, A_2)) \end{cases}$$

1. Soit A l'arbre ci-contre (dont les nœuds ont été numérotés pour plus de clarté). Calculez $B = Z(A, vide)$.
2. Montrez que cette fonction est bien définie.
3. Calculez $Z(B, vide)$. Que remarquez-vous ?
4. Montrez que pour tout arbre A, $Z(Z(A, vide), vide) = A$.
   Indication : on pourra commencer par montrer (par induction) que pour tous A, B, $\quad Z(Z(A,B), vide) = Z(B, A)$.