Les systèmes de preuves syntaxiques

Systèmes de preuves syntaxiques

- Systèmes "à la Hilbert"
- Calculs des séquents :
  - Déduction naturelle
  - Calcul de Gentzen
- Systèmes de réfutation :
  - Résolution
  - Tableaux

La méthode axiomatique de Hilbert

David Hilbert: mathématicien allemand (1862 - 1943)

Systèmes logiques axiomatiques

- Un ensemble de formules.
- Un sous-ensemble de formules distinguées appelées axiomes.
- Un ensemble de règles d'inférence de la forme:

$$\frac{\texttt{Hyp1} \quad \texttt{Hypn}}{\texttt{Concl}}$$

Exemple : système $H_\rightarrow$

- Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire $\rightarrow$.
- Axiome 1 : toutes les formules de la forme $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- Axiome 2 : toutes les formules de la forme $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- Règle de dérivation :

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}\,(\text{Modus Ponens})$$

Dérivation sous forme de séquence (premier exemple)

(a) Axiome 2 : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
(b) Axiome 1 : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$
(c) Modus ponens sur a et b : $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
(d) Axiome 1 : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
(e) Modus ponens sur c et d : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\emptyset \vdash_{H_\rightarrow} (p \rightarrow p)$ ou $\vdash_{H_\rightarrow} (p \rightarrow p)$

Dérivation sous forme de séquence (deuxième exemple)

On fixe un ensemble d'hypothèses. Par exemple $\Delta = \{p\}$.

(a) Axiome 1 : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
(b) Formule dans Δ : p
(c) Modus ponens sur a et b : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\{p\} \vdash_{H_\rightarrow} (p \rightarrow p)$ ou $p \vdash_{H_\rightarrow} (p \rightarrow p)$

Notion de dérivation sous forme de séquence

Une dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est une séquence de formules $F_1, \ldots, F_n$ telle que pour chaque i :

- F_i est une hypothèse de Δ, ou
- F_i est une instance d'axiome, ou
- F_i est obtenue par une règle d'inférence à partir de $F_{e_1}, \ldots, F_{e_k}$ avec $e_1, \ldots, e_k < i$ et
- la dernière formule de la séquence est A.

Notation : S'il y a une dérivation de A à partir de Δ, nous écrivons $\Delta \vdash_{H_\rightarrow} A$. Nous écrivons $\Delta, B \vdash_{H_\rightarrow} A$ pour $\Delta \cup \{B\} \vdash_{H_\rightarrow} A$.

Dérivation sous forme d'arbre

$$\cfrac{\cfrac{(p \rightarrow (p \rightarrow p))\;(ax1) \quad p \in \Delta}{(p \rightarrow p)} \qquad\qquad p \in \Delta}{p}$$

Nous avons $p \vdash_{H_\rightarrow} p$.

Notion de dérivation sous forme d'arbre

Définition : La dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est un arbre fini de *formules* tel que

- chaque feuille est soit une hypothèse de Δ soit un axiome
- si B est le père des $B_1 \ldots B_n$, alors B est obtenu par l'application d'une règle d'inférence sur les formules $B_1 \ldots B_n$.
- la formule A est la racine de l'arbre.

La notion de *théorème*

La formule A est un théorème ssi il existe une dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses vide.

Exemple : La formule $p \rightarrow p$ est un théorème dans le système $H_\rightarrow$.

Théorème de la déduction

Théorème : Soit H un système de Hilbert quelconque tel que

- l'ensemble d'axiomes de H contient au moins Axiome 1 + Axiome 2
- la seule règle d'inférence de H est le Modus Ponens.

Alors, $\Delta \vdash_H A \rightarrow B$ ssi $\Delta, A \vdash_H B$.

Preuve : au tableau

Exemple : Montrer que $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ est un théorème : par la propriété précédante, on démontre que r est dérivable à partir de $\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), q, p\}$.

Dérivation comme séquence

$\Delta = \{p \to (q \to r), p, q\}$

(a) Élement dans Δ : $p \to (q \to r)$

(b) Élement dans Δ : p

(c) Modus Ponens sur a et b : $q \to r$

(d) Élement dans Δ : q

(e) Modus Ponens sur c et d : r

Dérivation comme arbre

$\Delta = \{p \to (q \to r), p, q\}$

$$\dfrac{\dfrac{p \to (q \to r) \in \Delta \qquad p \in \Delta}{(q \to r)} \qquad q \in \Delta}{r}$$

Un autre exemple : système H_{prop}

- Axiome 1 : $A \to (B \to A)$
- Axiome 2 : $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- Axiome 3 : $A \to (B \to (A \wedge B))$
- Axiome 4 : $A \to (A \vee B)$
- Axiome 5 : $B \to (A \vee B)$
- Axiome 6 : $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
- Axiome 7 : $(A \wedge B) \to A$
- Axiome 8 : $(A \wedge B) \to B$
- Axiome 9 : $(A \to B) \to ((C \to B) \to ((A \vee C) \to B))$
- Axiome 10 : $\neg\neg A \to A$
- Règle de dérivation : Modus Ponens

Exemple de dérivation

Soit $D = A \vee \neg A$ et $\Delta = \{\neg D\}$.

(a) Axiome 4 : $A \to (A \vee \neg A)$ (i.e. $A \to D$)

(b) Axiome 1 : $\neg D \to (A \to \neg D)$

(c) Δ : $\neg D$

(d) Modus ponens b et c : $A \to \neg D$

(e) Axiome 6 : $(A \to D) \to ((A \to \neg D) \to \neg A)$

(f) Modus ponens a,e :$(A \to \neg D) \to \neg A$

(g) Modus ponens d,f : $\neg A$

(h) Axiome 5 : $\neg A \to (A \vee \neg A)$

(i) Modus ponens g, h : $(A \vee \neg A)$

Donc, $\neg D \vdash_{H_{prop}} D$

Exemple de dérivation

Par le théorème de la déduction nous avons une dérivation de $\neg D \to D$ à partir de l'ensemble vide. Pareil pour $\neg D \to \neg D$. On construit maintenant une nouvelle dérivation comme suit :

(a) Obs prec : $\neg D \to D$

(b) Obs prec : $\neg D \to \neg D$

(c) Axiome 6 : $(\neg D \to D) \to ((\neg D \to \neg D) \to \neg\neg D)$

(d) Modus ponens, c, a, b : $\neg\neg D$

(e) Axiome 10 : $\neg\neg D \to D$

(f) Modus ponens e, d : D

Enfin, nous avons une dérivation de D à partir de l'ensemble vide, donc $D = A \vee \neg A$ est un théorème dans H_{prop}.

Théorème de l'affaiblissement

Théorème : Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système H_{prop}, alors le séquent $\Delta, B \vdash A$ est aussi dérivable dans le système H_{prop} pour toute formule B.

Dit autrement,
Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta, B \vdash_{H_{prop}} A$ pour toute formule B.

Propriétés du système H_{prop}

Théorème : Le système H_{prop} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \models A$.

Preuve : Par induction sur l'arbre de derivation de $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Théorème : Le système H_{prop} est complet, i.e., si $\Delta \models A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Dans la suite du cours.

Les séquents en logique

Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Définition : Un séquent est un couple de la forme $\Delta \vdash \Gamma$, où Δ et Γ sont des *multi-ensembles* de formules.

La formule associée à un séquent de la forme $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est donnée par :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_k$$

Rappel : une conjonction vide est vraie, une disjonction vide est fausse.

Sémantique d'un séquent

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ est valide.

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents :

- On fixe des séquents axiomes (des séquents particuliers)
- On fixe des règles d'inférence de la forme $\dfrac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n}{\Delta \vdash \Gamma}$

Systèmes avec séquents

Définition : La dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système $\mathcal{S}$ quelconque, ou $\mathcal{S}$-dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$, est un arbre fini de *séquents* tel que

- chaque feuille est un axiome de $\mathcal{S}$.
- si $\Lambda \vdash \Phi$ est le père de n séquents $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et ... et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$, alors $\Lambda \vdash \Phi$ est obtenu par l'application d'une règle d'inférence de $\mathcal{S}$ sur ses enfants $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et ... et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$.
- la racine de l'arbre est le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.

Notation : On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$ pour dire que le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est $\mathcal{S}$-dérivable et on écrit simplement $\Delta \vdash \Gamma$ pour parler du séquent en tant qu'objet.

Preuves et théorèmes

Définition : Soit $\mathcal{S}$ un système avec séquents. Une preuve d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$ est une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$. Un théorème de $\mathcal{S}$ est un séquent de la forme $\emptyset \vdash \Gamma$ ayant une preuve dans $\mathcal{S}$.

Remarque

Un système axiomatique peut aussi se voir comme un calcul avec séquents. Ainsi par exemple, pour $H_{\rightarrow}$:

- Les séquents axiomes sont de la forme

$$\begin{array}{ll} \Delta \vdash & A \text{ (si } A \in \Delta) \\ \Delta \vdash & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \Delta \vdash & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \end{array}$$

- La règles d'inférence est de la forme

$$\frac{\Delta \vdash A \rightarrow B \qquad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$$

Système $DN_{\rightarrow}$: déduction naturelle pour $\rightarrow$

Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire $\rightarrow$.
Axiome : $\Delta, A \vdash A$
Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B}\ (\rightarrow\ e)$$

Exemple de dérivation dans $DN_{\rightarrow}$

$$\cfrac{\cfrac{A, B \vdash A \quad (axiome)}{A \vdash B \rightarrow A}\ (\rightarrow\ i)}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)}\ (\rightarrow\ i)$$

Notation : $\emptyset \vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ou $\vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Nous avons démontré l'axiome 1 de $H_{\rightarrow}$ dans le système $DN_{\rightarrow}$.
De manière similaire on peut démontrer $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ pour tout Δ.

Un autre exemple de dérivation dans $DN_{\rightarrow}$

Soit $\Gamma = A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \rightarrow C}(\rightarrow e) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}(\rightarrow e)}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B), A \vdash C}}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow C}}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)}}{\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))}$$

Nous avons démontré l'axiome 2 de $H_{\rightarrow}$ dans $DN_{\rightarrow}$.
De manière similaire on peut démontrer
$\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ pour tout Δ.

Équivalence entre $H_{\rightarrow}$ et $DN_{\rightarrow}$ (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système $H_{\rightarrow}$.

Équivalence entre $H_{\rightarrow}$ et $DN_{\rightarrow}$ (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$.

Preuve : Par induction sur la $DN_{\rightarrow}$-dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si axiome dans $DN_{\rightarrow}$, alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow$ i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow$ e, alors on utilise modus ponens.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

Axiome : $\Delta, A \vdash A$
Règles d'inférence :

$$\dfrac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B}(\rightarrow i) \qquad \dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B}(\rightarrow e)$$

$$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}(\wedge i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\ e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \qquad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\ (\neg e)$$

La dernière règle $\neg e$ est connue sous le nom de raisonnement par l'absurde.

Exemple de dérivation dans DN_{prop}

Tiers exclu
$B = A \vee \neg A$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg B, A \vdash B}\ (\vee i) \qquad \neg B, A \vdash \neg B}{\neg B \vdash \neg A}\ (\neg i)}{\neg B \vdash B}\ (\vee i) \qquad \neg B \vdash \neg B}{\vdash \neg\neg B}\ (\neg i)}{\vdash B}\ (\neg e)$$

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce
$G = (H \rightarrow A) \rightarrow A$, $H = A \rightarrow B$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G, H \rightarrow A \vdash H \rightarrow A \qquad \neg G, H \rightarrow A \vdash H}{\neg G, H \rightarrow A \vdash A}\ (\rightarrow\ e)}{\neg G \vdash G}\ (\rightarrow\ i) \qquad \neg G \vdash \neg G}{\vdash \neg\neg G}\ (\neg e)}{\vdash G}\ (\neg e)$$

$G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G, H \to A, A, H \to A \vdash A}{\neg G, H \to A, A \vdash G}\,(\to i) \qquad \neg G, H \to A, A \vdash \neg G}{\neg G, H \to A, A \vdash B}\,(\neg e)}{\neg G, H \to A \vdash H}\,(\to i)$$

Comment transformer des dérivations dans DN_{prop}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Observations

Le raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce.
Mais, aussi

- Le tiers exclu entraîne la loi de Peirce.
  Soit $F = (A \to B) \to A$.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee \neg A \qquad \dfrac{\Gamma, F, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash F \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, F \vdash F \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, F, A \vdash A \qquad \Gamma, \neg A, F, A \vdash \neg A}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A \to B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A}}{\Gamma, \neg A \vdash F \to A}}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$

Observations

- La loi de Peirce entraîne le raisonnement par l'absurde.
  On considère $\neg A = A \to \bot$.

$$\dfrac{\Delta \vdash ((A \to \bot) \to A) \to A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta, \neg A \vdash \neg\neg A}\,(\text{Affaibl.}) \qquad \Delta, \neg A \vdash \neg A}{\Delta, \neg A \vdash A}}{\Delta \vdash \neg A \to A}}{\Delta \vdash A}$$

Équivalence entre H_{prop} et DN_{prop} (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système H_{prop}.

Équivalence H_{prop} et DN_{prop} (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la DN_{prop}-dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si axiome dans DN_{prop}, alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow$ i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow$ e, alors on utilise modus ponens.
- Si l'arbre se termine par $\wedge$ i, alors on utilise l'axiome 3.
- Si l'arbre se termine par $\wedge$ e, alors on utilise les axiomes 7 et 8.
- Si l'arbre se termine par $\vee$ i, alors on utilise les axiomes 4 et 5.
- Si l'arbre se termine par $\vee$ e, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 9.

Suite de la preuve

- Si l'arbre se termine par $\neg$ i, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 6.
- Si l'arbre se termine par la seconde règle de $\neg$ e, alors on utilise l'axiome 10.
- Si l'arbre se termine par la première règle de $\neg$ e, alors on raisonne comme suit. Si on dérive A et $\neg A$, alors avec deux instances de l'axiome 1 $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A))$ et $(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ on obtient $\neg B \rightarrow A$ et $\neg B \rightarrow \neg A$. Avec l'axiome 6 $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B)$, on obtient $\neg\neg B$, et avec l'axiome 10 $\neg\neg B \rightarrow B$ on obtient B.

Propriétés du système DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{prop} est complet, i.e, si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Calcul de Gentzen LK

Axiome : $A \vdash A$

Règles d'inférence structurelles :

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (contraction\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (contraction\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (affaiblissement\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (affaiblissement\ d)$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \rightarrow B \vdash \Gamma, \Lambda}\ (\rightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma}\ (\rightarrow\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d) \qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles d'inférence coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans LK

On note $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK.

Premier exemple de dérivation dans LK

Modus Ponens

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax) \qquad q \vdash q\ (ax)}{p, (p \to q) \vdash q}(\to\ g)}{p \wedge (p \to q) \vdash q}(\wedge\ g)}{\vdash (p \wedge (p \to q)) \to q}(\to\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans LK

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax)}{\vdash p, \neg p}(\neg\ d)}{\vdash p, p \vee \neg p}(\vee\ d)}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}(\vee\ d)}{\vdash p \vee \neg p}(cont\ d)$$

Troisième exemple de dérivation dans LK

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A\ (ax)}{A \vdash B, A}(aff\ d)}{\vdash A \to B, A}(\to\ d) \qquad A \vdash A\ (ax)}{(A \to B) \to A \vdash A, A}(\to\ g)}{(A \to B) \to A \vdash A}(cont\ d)}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}(\to\ d)$$

Propriétés du système LK

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans LK qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre la Déduction naturelle et LK

Remarque : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Propriétés du système de Gentzen LK

Théorème : Le système LK est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système LK est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$.

Automatisation : le système $\mathcal{G}$

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax)}{\vdash p, \neg p}\ (\neg\ d)}{\vdash p \vee \neg p}\ (\vee\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q, p\ (ax)}{\vdash p \to q, p}\ (\to\ d) \qquad p \vdash p\ (ax)}{(p \to q) \to p \vdash p}\ (\to\ g)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\ (\to\ d)$$

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ et $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A, \Gamma$.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$. Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A, A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A$ l'est aussi.

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$.

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK.

Équivalence entre DN et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Toute règle de $\mathcal{G}$ de la forme $\dfrac{S_1 \dots S_n}{S}$ est réversible, i.e., $S_1 \wedge \dots \wedge S_n$ est valide ssi S est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.

Preuve : On va construire un arbre de dérivation pour le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ sans coupures, ceci en appliquant les règles du système "du bas vers le haut" aussi longtemps que possible. Ce processus s'arrête nécessairement car tout séquent "hypothèse" est plus petit que le séquent "conclusion" (propriété de sous-formule).
En plus, comme le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d'après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome. On raisonne par l'absurde. Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille. Alors, si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, c'est qu'il est de la forme $p_1, \dots, p_m \vdash q_1, \dots q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout i, j. L'interprétation qui donne **V** à toutes les lettres p_i et **F** à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent, ceci est une contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

La résolution en calcul propositionnel

Résolution

John Alan Robinson: philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1930 -)

Résolution

Méthode par réfutation :

$$\Delta \models A \text{ ssi } A \text{ s'obtient à partir de } \Delta \text{ par résolution}$$

$$\Delta \models A \text{ ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ insatisfaisable ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ est réfutable}$$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La clause vide ($n = 0$) s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.La conjonction élémentaire vide ($n = 0$) s'écrit $\top$.
- Une formule est en forme normal disjonctive ssi elle est de la forme $C_1 \vee \ldots \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $FNC_\Delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i. Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}\}$. Soit $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors Δ est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

$$\begin{aligned}
A \equiv \quad & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
\neg A \equiv \quad & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
A \equiv \quad & (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \\
& (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)
\end{aligned}$$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun
Règles d'inférence :
(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \qquad C \vee \neg p}{D \vee C}\ (\mathit{coupure}) \qquad \frac{p \qquad \neg p}{\perp}\ (\text{cas particulier})$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p}\ (\mathit{factorisation})$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \lor r \lor s \qquad r \lor \neg s}{p \lor r \lor r}}{p \lor r} \qquad \neg r}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \lor r \lor s, r \lor \neg s, \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \lor r \lor s, r \lor \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est réfutable ssi $\Delta \vdash_R \bot$.

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \lor r \lor s \qquad r \lor \neg s}{p \lor r \lor r}}{p \lor r} \qquad \neg r}{p} \qquad \neg p}{\bot}$$

$$\{p \lor r \lor s, r \lor \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \bot$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \bot$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète pour la refutation, i.e., si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \bot$.