Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Calcul de Gentzen
  2. Résolution
     - ★ Théorie de l'unification
     - ★ Règles de résolution
     - ★ Propriétés de la résolution

Syntaxe: alphabet

- Les connecteurs $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$
- Les quantificateurs $\exists$, $\forall$
- Un ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ de variables $x, y, z, \ldots$
- Une signature Σ contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \ldots\}$, chacun ayant une arité.
  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicat $\Sigma_P = \{p, q, r, \ldots\}$, chacun ayant une arité.

On écrit f/n (ou p/n) pour dire que le symbole de fonction f (ou de prédicat p) est d'arité n.

Les termes

L'ensemble des termes par rapport à un ensemble de variable $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque variable x dans $\mathcal{X}$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et $f \in \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

L'ensemble des atomes sur un ensemble de variable $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition : Un atome est de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0/0, S/1\}$ et $\Sigma_P = \{inf/2\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont des termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont des termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

L'ensemble des formules sur un ensemble de variable $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque atome de $\mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ est une formule dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, alors $\neg A$ est une formule dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A et B sont dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, et $(A \vee B)$ sont des formules dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ et x est une variable, alors $\forall x.\ (A)$ et $\exists x.\ (A)$ sont des formules dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Remarque :

- Nous omettons les parenthèses quand cela n'entraîne pas des ambiguités.

Exemple : $\forall x.\ (enfant(x) \rightarrow \exists y.\ mere(y, x))$

Un cas particulier

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.

- l'ensemble Σ_F est vide,
- l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont jamais utilisés.

Variables libres et liées

Les variables libres (Vl) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $Vl(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = \emptyset$.
- Si $A = \neg B$, $Vl(A) = Vl(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $Vl(A) = Vl(B) \cup Vl(C)$ et $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$.
- Si $A = \forall x.\ B$ ou $A = \exists x.\ B$, $Vl(A) = Vl(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$.

Exemple : Si $A = \forall x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.
Si $B = r(x) \vee \forall x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x.\ \exists x.\ A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent des noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule B précédante.

Exemple de renommage

La formule $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ peut se renommer en $\forall z\ \exists y\ p(z, y)$
$\forall x\ \exists z\ p(x, z)$ ou $\forall z\ \exists w\ p(z, w)$.
La formule $(\forall x\ p(x)) \vee p(x)$ peut se renommer en $(\forall z\ p(z)) \vee p(x)$.
La formule $\forall x\ \exists x\ p(x)$ peut se renommer en $\forall y\ \exists x\ p(x)$ ou $\forall x\ \exists y\ p(y)$
(mais pas en $\forall y\ \exists x\ p(y)$!!!).

À partir de maintenant on peut assumer qu'une formule est rectifiée si cela est nécessaire. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Les substitutions

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$. On note $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\sigma(x) = x$ sinon.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitutions. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit Σ une signature et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de x_i dans A par t_i. Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t'_1, \ldots, t'_n)) = r(\sigma(t'_1), \ldots, \sigma(t'_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B\#C) = \sigma(B)\#\sigma(C)$
- $A = \forall x.\ B$, où l'on suppose (grâce au renommage) $x \notin Vl(t_i)$ et $x \neq x_i$ pour $i = 1 \ldots n$. Alors $\sigma(\forall x.\ B) = \forall x.\ \sigma(B)$.
- Pareil pour $\sigma(\exists x.\ B)$

Formalisation du langage naturel

- Tous les humains sont méchants.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Seulement les humains sont méchants.

$$\forall x.\ (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un humain méchant.

$$\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

- Il n'existe pas d'humain méchant.

$$\neg\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un humain qui aime tous les chats.
  $\exists x.\ (H(x) \wedge Aimetousleschats(x))$
  $Aimetousleschats(x) \equiv \forall y.\ (Chat(y) \rightarrow Aime(x, y))$
- Chaque humain sait qui le déteste.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow Connaitdeteste(x))$$

$$Connaitdeteste(x) \equiv \forall y.\ (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

- Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$
$$aimetoutlemonde(x) \equiv \forall y.\ Aime(x, y)$$
$$aimepersonne(x) \equiv \forall y.\ \neg Aime(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x.\ (H(x) \rightarrow \exists y.\ Aime(x, y))$$
$$B_1 \equiv \neg\exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$A_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$B_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimepersonne(x))$$

Sémantique du calcul des prédicats

Définition : L'interprétation d'une signature Σ est un triplet $\langle \mathcal{D}, F_{\mathcal{D}}, P_{\mathcal{D}} \rangle$ t.q.

- Le domaine $\mathcal{D}$ est non vide.
- Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n, il y a une fonction totale $\mathcal{I}(f) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$ dans $F_{\mathcal{D}}$.
- Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n, il y a une relation $\mathcal{I}(p) \subseteq \mathcal{D}^n$ dans $P_{\mathcal{D}}$. Cette relation peut aussi se voir comme fonction booléene totale $\mathcal{I}(p) : \mathcal{D}^n \to \mathbf{BOOL}$.

Les valuations

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation pour Σ ayant $\mathcal{D}$ comme domaine et soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. Une assignation ou valuation dans $\mathcal{I}$ est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$.

Notation : Si σ est une assignation, alors l'assignation $\sigma[x := d]$ vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Valeur d'un terme

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation de domaine $\mathcal{D}$ et soit σ une assignation dans $\mathcal{I}$. Alors la valeur d'un terme dans $\mathcal{I}$ pour σ est une fonction $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto \mathcal{D}$ définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(f)$ est une fonction constante.

Des opérations sur l'ensemble BOOL

On définit sur l'ensemble $\mathbf{BOOL} = \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ les opérations suivantes:

$$\begin{array}{llcll}
\mathbf{V}+\mathbf{V} & := \mathbf{V} & \quad & \mathbf{V}\cdot\mathbf{V} & := \mathbf{V} \\
\mathbf{V}+\mathbf{F} & := \mathbf{V} & & \mathbf{V}\cdot\mathbf{F} & := \mathbf{F} \\
\mathbf{F}+\mathbf{V} & := \mathbf{V} & & \mathbf{F}\cdot\mathbf{V} & := \mathbf{F} \\
\mathbf{F}+\mathbf{F} & := \mathbf{F} & & \mathbf{F}\cdot\mathbf{F} & := \mathbf{F}
\end{array}$$

Valeur d'une formule

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation de domaine $\mathcal{D}$ et soit σ une assignation dans $\mathcal{I}$. La valeur d'une formule dans $\mathcal{I}$ pour σ est une opération $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto$ **BOOL** définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{FB}_\neg([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{FB}_\#([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\exists x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Sigma_{d\in\mathcal{D}}[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$
- $[\forall x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Pi_{d\in\mathcal{D}}[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(p)$ est **V** ou **F**.

Exemple

Soit $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{I}_F(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$,
$\mathcal{I}_F(b) = 2$, $\mathcal{I}_P(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$, $\mathcal{I}_P(q) = D$ et
$\mathcal{I}_P(r) = \{(2, 2)\}$.
Interpréter les formules suivantes :
$(\forall x\ \forall y\ r(x, y)) \wedge (\exists z\ r(z, z)))$
$(\exists x\ p(x, x, x)) \vee (\forall y\ \forall z\ r(y, z))$
$(\forall x\ \forall y\ r(b, b)) \rightarrow r(b, c(b))$
$\forall x\ (q(x) \rightarrow r(x, x))$
$\exists x\ \neg(q(x) \wedge r(x, x))$

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- $\mathcal{I}$ satisfait une formule B s'il existe une valuation σ dans $\mathcal{I}$ t.q. $[B]_{\mathcal{I},\sigma} =$ **V**.
- Une formule B est satisfaisable s'il existe $\mathcal{I}$ qui satisfait B.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Modèle et validité

Définition :

- L' interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle d'une formule B ssi $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$.
- L' interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle d'un ensemble de formules Δ ssi $\mathcal{I}$ est un modèle de toutes les formules de Δ.
- La formule B est valide ssi toute interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle de B.

Conséquence logique

Définition :

- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models B$, si tout modèle de Δ est aussi un modèle de B.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$
\begin{array}{lcl}
\exists y.\, \forall x.\, A & \models & \forall x.\, \exists y.\, A \\
\exists x.\, (A \wedge B) & \models & \exists x.\, A \wedge \exists x.\, B \\
\forall x.\, A \vee \forall x.\, B & \models & \forall x.\, (A \vee B)
\end{array}
$$

Quelques exemples d'équivalence

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\, A & \equiv & \neg\exists x.\, \neg A \\
\neg\forall x.\, A & \equiv & \exists x.\, \neg A \\
\exists x.\, A & \equiv & \neg\forall x.\, \neg A \\
\neg\exists x.\, A & \equiv & \forall x.\, \neg A \\
\forall x.\, (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\, A \wedge \forall x.\, B \\
\exists x.\, (A \vee B) & \equiv & \exists x.\, A \vee \exists x.\, B \\
\exists x.\, (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x.\, A \rightarrow \exists x.\, B \\
\forall x.\, \forall y.\, A & \equiv & \forall y.\, \forall x.\, A \\
\exists x.\, \exists y.\, A & \equiv & \exists y.\, \exists x.\, A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \to B) & \equiv & A \to \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \to B) & \equiv & A \to \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \to A) & \equiv & \forall x.\ B \to A & \\
\forall x.\ (B \to A) & \equiv & \exists x.\ B \to A &
\end{array}
$$