Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2013-2014

Devoir Maison de Logique n$^{\text{o}}$ 2

Différents systèmes de preuve

Toutes les questions de toutes les exercices sont indépendantes les unes des autres.

Exercice 1
Vous avez vu en cours les systèmes de preuve suivants qui utilisent les séquents : DN_{prop}, LK et $\mathcal{G}$. Donnez, pour chacun, une *instance* d'une règle d'inférence qui n'est possible que dans ce système-là (c'est-à-dire, qui ne peut être vue comme instance d'aucune des règles d'inférence des deux autres systèmes).

Instructions supplémentaires :

- Donnez les instances en indiquant bien la règle utilisée et le système, dans l'ordre donné ci-dessus.
- Vos instances ne doivent contenir que des lettres propositionnelles et des connecteurs (pas de "A, B" ou de "Γ, Δ").
- La règle utilisée ne doit pas être un axiome.
- Pour chaque instance de règle donnée dans un système, justifiez pourquoi elle n'est pas possible dans les autres systèmes.

Exercice 2
Dans le TD3, nous avions ajouté une règle d'inférence à $H_{\to}$; le nouveau système, $H_{\to}^{+}$ était tel que, pour toute formule A (construite à partir des lettres propositionnelles et du connecteur $\to$),

$$\vdash_{H_{\to}} A \quad \text{ssi} \quad \vdash_{H_{\to}^{+}} A\,. \tag{1}$$

Sans changer de langage, ajoutez une autre règle d'inférence au système $H_{\to}$, pour laquelle l'équivalence (1) ne soit pas vraie. Plus précisément, quelle implication de l'équivalence (1) est fausse ? Quelle implication est vraie ? Pourquoi ?

Remarque : La justification peut être courte (quelques lignes), mais doit être propre, et notamment bien citer le ou les résultats du cours utilisés.

Suggestion : Le système étendu avec cette nouvelle règle ne doit pas forcement être correct...

Exercice 3

1. Montrez que $\vdash_{H_{prop}} r \to (\neg r \to s)$.
   Suggestion : Pour se simplifier un peu la vie, rappelez-vous de certains théorèmes vus en cours (et si vous le ou les utilisez, justifiez votre réponse). En effet, ici on ne demande pas de donner une preuve dans H_{prop} de la formule en question, mais juste de démontrer que telle formule est prouvable dans H_{prop}.
2. Étant donnée une preuve π dans H_{prop} de la formule $r \to (\neg r \to s)$, donnez une preuve dans H_{prop} de la formule $(r \vee s) \to (\neg r \to s)$ (sans expliciter π).
3. Donnez une preuve du séquent $\vdash (r \vee s) \to (\neg r \to s)$ dans chacun des systèmes suivants : DN_{prop}, LK et $\mathcal{G}$