
Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
 - ① Deduction naturelle
 - ② Calcul de Gentzen
 - ③ Résolution
 - ★ Théorie de l'unification
 - ★ Règles de résolution
 - ★ Propriétés de la résolution

Syntaxe: alphabet

- Les **connecteurs** $\rightarrow, \neg, \wedge, \vee$
- Les **quantificateurs** \exists, \forall
- Un ensemble dénombrable \mathcal{X} de **variables** x, y, z, \dots
- Une **signature** Σ contenant :
 - ▶ Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \dots\}$, chacun ayant une arité.
 - ▶ Un ensemble dénombrable de symboles de prédicat $\Sigma_P = \{p, q, r, \dots\}$, chacun ayant une arité.

On écrit f/n (ou p/n) pour dire que le symbole de fonction f (ou de prédicat p) est d'arité n .

Les termes

L'ensemble des termes par rapport à un ensemble de variable \mathcal{X} et une signature Σ est noté $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque variable x dans \mathcal{X} est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Si t_1, \dots, t_n sont des termes et $f \in \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n , alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.

Un terme est **clos** s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

L'ensemble des atomes sur un ensemble de variable \mathcal{X} et une signature Σ est noté $\mathcal{A}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.

Définition : Un **atome** est de la forme $p(t_1, \dots, t_n)$, où p est un **symbole de prédicat d'arité n** et t_1, \dots, t_n sont des termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0/0, S/1\}$ et $\Sigma_P = \{inf/2\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont des termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont des termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

L'ensemble des formules sur un ensemble de variable \mathcal{X} et une signature Σ est noté $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque **atome** de $\mathcal{A}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ est une formule dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Si A est dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$, alors $\neg A$ est une formule dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Si A et B sont dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, et $(A \vee B)$ sont des formules dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Si A est dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ et x est une variable, alors $\forall x. (A)$ et $\exists x. (A)$ sont des formules dans $\mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.

Remarque :

- Nous omettons les parenthèses quand cela n'entraîne pas des ambiguïtés. Nous écrivons aussi $\forall x_1, \dots, x_n. A$ pour $\forall x_1. \forall x_2. \dots \forall x_n. A$

Exemple : $\forall x. (\text{enfant}(x) \rightarrow \exists y. \text{mere}(y, x))$

Un cas particulier

Le **calcul propositionnel** peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.

- l'ensemble Σ_F est vide,
- l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont jamais utilisés.

Variables libres et liées

Les variables libres (VI) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A , et $VE(A) = \emptyset$.
- Si $A = \neg B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $VI(A) = VI(B) \cup VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$.
- Si $A = \forall x. B$ ou $A = \exists x. B$, $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$.

Variables libres et liées

Exemple : Si $A = \forall x. q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.
Si $B = r(x) \vee \forall x. q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut **toujours renommer** les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme **rectifiée** :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x. \exists x. A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent des noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule B précédente.

Définition : La **clotûre universelle** d'une formule A est donnée par $\forall x_1, \dots, x_n. A$, où x_1, \dots, x_n sont les variables libres de A .

Exemple de renommage

La formule $\forall x \exists y p(x, y)$ peut se renommer en $\forall z \exists y p(z, y)$

$\forall x \exists z p(x, z)$ ou $\forall z \exists w p(z, w)$.

La formule $(\forall x p(x)) \vee p(x)$ peut se renommer en $(\forall z p(z)) \vee p(x)$.

La formule $\forall x \exists x p(x)$ peut se renommer en $\forall y \exists x p(x)$ ou $\forall x \exists y p(y)$
(mais pas en $\forall y \exists x p(y)$!!!).

À partir de maintenant on peut assumer qu'une formule est rectifiée si cela est nécessaire. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Définition :

- Une **substitution** est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$. On note $\{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\sigma(x) = x$ sinon.
- L'application d'une **substitution** à un terme est l'**extension** de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitutions. La **composition** de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit Σ une signature et \mathcal{X} un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence **libre** de x_i dans A par t_i . Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t'_1, \dots, t'_n)) = r(\sigma(t'_1), \dots, \sigma(t'_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B\#C) = \sigma(B)\#\sigma(C)$
- $A = \forall x. B$, où l'on suppose (grâce au renommage) $x \notin VI(t_i)$ et $x \neq x_j$ pour $i = 1 \dots n$. Alors $\sigma(\forall x. B) = \forall x. \sigma(B)$.
- Pareil pour $\sigma(\exists x. B)$

Formalisation du langage naturel

- Tous les humains sont méchants.

$$\forall x. (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Que veut dire

$$\forall x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Seulement les humains sont méchants.

$$\forall x. (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un humain méchant.

$$\exists x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Il n'existe pas d'humain méchant.

$$\neg \exists x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un humain qui aime tous les chats.

$$\exists x. (H(x) \wedge \textit{Aimetousleschats}(x))$$

$$\textit{Aimetousleschats}(x) \equiv \forall y. (\textit{Chat}(y) \rightarrow \textit{Aime}(x, y))$$

- Chaque humain sait qui le déteste.

$$\forall x. (H(x) \rightarrow \textit{Connaitdeteste}(x))$$

$$\textit{Connaitdeteste}(x) \equiv \forall y. (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

- Chaque personne aime quelqu'un **et** personne n'aime tout le monde **ou bien** quelqu'un aime tout le monde **et** quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$

$$\text{aimetoutlemonde}(x) \equiv \forall y. \text{Aime}(x, y)$$

$$\text{aimepersonne}(x) \equiv \forall y. \neg \text{Aime}(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x. (H(x) \rightarrow \exists y. \text{Aime}(x, y))$$

$$B_1 \equiv \neg \exists x. (H(x) \wedge \text{aimetoutlemonde}(x))$$

$$A_2 \equiv \exists x. (H(x) \wedge \text{aimetoutlemonde}(x))$$

$$B_2 \equiv \exists x. (H(x) \wedge \text{aimepersonne}(x))$$

Sémantique du calcul des prédicats

Définition : L'interprétation \mathcal{I} d'une signature Σ est un triplet $\langle \mathcal{D}, F_{\mathcal{D}}, P_{\mathcal{D}} \rangle$ t.q.

- Le domaine \mathcal{D} est non vide.
- Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n , il y a une fonction totale $\mathcal{I}(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ dans $F_{\mathcal{D}}$.

Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(f)$ est une fonction constante.

- Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n , il y a une relation $\mathcal{I}(p) \subseteq \mathcal{D}^n$ dans $P_{\mathcal{D}}$. Cette relation peut aussi se voir comme fonction booléenne totale $\mathcal{I}(p) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathbf{BOOL}$.

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(p)$ est \mathbf{V} ou \mathbf{F} .

Définition : Soit \mathcal{I} une interprétation pour Σ ayant \mathcal{D} comme domaine et soit \mathcal{X} un ensemble de variables. Une **assignation** ou **valuation** dans \mathcal{I} est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$.

Notation : Si σ est une assignation, alors l'assignation $\sigma[x := d]$ vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Valeur d'un terme

Définition : Soit \mathcal{I} une interprétation de domaine \mathcal{D} et soit σ une assignation dans \mathcal{I} . Alors la **valeur d'un terme** dans \mathcal{I} pour σ est une fonction $[_]_{\mathcal{I},\sigma} : \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto \mathcal{D}$ définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \dots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Des opérations sur l'ensemble **BOOL**

On définit sur l'ensemble **BOOL** = {**F**, **V**} les opérations suivantes:

$$\mathbf{V + V := V}$$

$$\mathbf{V \cdot V := V}$$

$$\mathbf{V + F := V}$$

$$\mathbf{V \cdot F := F}$$

$$\mathbf{F + V := V}$$

$$\mathbf{F \cdot V := F}$$

$$\mathbf{F + F := F}$$

$$\mathbf{F \cdot F := F}$$

Valeur d'une formule

Définition : Soit \mathcal{I} une interprétation de domaine \mathcal{D} et soit σ une assignation dans \mathcal{I} . La **valeur d'une formule** dans \mathcal{I} pour σ est une opération $[_]_{\mathcal{I},\sigma} : \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto \mathbf{BOOL}$ définie par récurrence comme suit :

- $[\rho(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(\rho)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \dots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{FB}_{\neg}([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{FB}_{\#}([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\exists x. A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Sigma_{d \in \mathcal{D}} [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$ (somme)
- $[\forall x. A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Pi_{d \in \mathcal{D}} [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$ (produit)

Exemple

Soit $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{I}_F(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$,
 $\mathcal{I}_F(b) = 2$, $\mathcal{I}_P(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$, $\mathcal{I}_P(q) = D$ et
 $\mathcal{I}_P(r) = \{(2, 2)\}$.

Interpréter les formules suivantes :

$$(\forall x \forall y r(x, y) \wedge (\exists z r(z, z)))$$

$$(\exists x p(x, x, x)) \vee (\forall y \forall z r(y, z))$$

$$(\forall x \forall y r(b, b)) \rightarrow r(b, c(b))$$

$$\forall x (q(x) \rightarrow r(x, x))$$

$$\exists x \neg(q(x) \wedge r(x, x))$$

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- \mathcal{I} **satisfait** une **formule** B s'il existe une valuation σ dans \mathcal{I} t.q.
 $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Une **formule** B est **satisfaisable** s'il existe \mathcal{I} qui satisfait B .

On verra plus tard que pour étudier la satisfiabilité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Définition :

- L'interprétation \mathcal{I} est un **modèle** d'une **formule** B ssi $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ dans \mathcal{I} .
- L'interprétation \mathcal{I} est un **modèle** d'un **ensemble de formules** Δ ssi \mathcal{I} est un modèle de toutes les formules de Δ .
- La **formule** B est **valide** ssi toute interprétation \mathcal{I} est un modèle de B .

Soit B' la clotûre universelle de B . Une interprétation \mathcal{I} est un modèle pour une formule B ssi $[B']_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour n'importe quelle σ .

Définition :

- Une **formule** B est **conséquence logique** d'un **ensemble de formules** Δ , noté $\Delta \models B$, si pour toute interprétation \mathcal{I} et toute valuation σ dans \mathcal{I} on a : si pour toute formule A dans Δ on a $[A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, alors cela implique $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Deux formules A et B sont **équivalentes**, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$\begin{array}{lcl} \exists y. \forall x. A & \models & \forall x. \exists y. A \\ \exists x. (A \wedge B) & \models & \exists x. A \wedge \exists x. B \\ \forall x. A \vee \forall x. B & \models & \forall x. (A \vee B) \end{array}$$

Quelques exemples d'équivalence

$\forall x. A$	\equiv	$\neg \exists x. \neg A$
$\neg \forall x. A$	\equiv	$\exists x. \neg A$
$\exists x. A$	\equiv	$\neg \forall x. \neg A$
$\neg \exists x. A$	\equiv	$\forall x. \neg A$
$\forall x. (A \wedge B)$	\equiv	$\forall x. A \wedge \forall x. B$
$\exists x. (A \vee B)$	\equiv	$\exists x. A \vee \exists x. B$
$\exists x. (A \rightarrow B)$	\equiv	$(\forall x. A) \rightarrow \exists x. B$
$\forall x. \forall y. A$	\equiv	$\forall y. \forall x. A$
$\exists x. \exists y. A$	\equiv	$\exists y. \exists x. A$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\begin{aligned}\forall x. A &\equiv \exists x. A && \equiv A \\ \forall x. (A \wedge B) &\equiv A \wedge \forall x. B \\ \exists x. (A \wedge B) &\equiv A \wedge \exists x. B \\ \forall x. (A \vee B) &\equiv A \vee \forall x. B \\ \exists x. (A \vee B) &\equiv A \vee \exists x. B \\ \exists x. (A \rightarrow B) &\equiv A \rightarrow \exists x. B \\ \forall x. (A \rightarrow B) &\equiv A \rightarrow \forall x. B \\ \exists x. (B \rightarrow A) &\equiv \forall x. B \rightarrow A \\ \forall x. (B \rightarrow A) &\equiv \exists x. B \rightarrow A\end{aligned}$$

La deduction naturelle pour le calcul des prédicats

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Axiome : $\Delta, A \vdash A$

Règles d'inférence (Rappel) :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow i) \quad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B} (\rightarrow e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B} (\wedge i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A} (\wedge e) \quad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B} (\wedge e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B} (\vee i) \quad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B} (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C} (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A} (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B} (\neg e) \quad \frac{\Delta \vdash \neg \neg A}{\Delta \vdash A} (\neg e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)} \quad (\forall x e)$$

L'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash \forall x.A} \quad (\forall x i)$$

x n'est pas libre dans Δ

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)}{\Delta \vdash \exists x.A} \quad (\exists x i)$$

L'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\Delta \vdash \exists x.A \quad \Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B} \quad (\exists x e)$$

x n'est pas libre dans Δ et B

Exemples de dérivations: au tableau

Propriétés du système DN_{pred} pour le calcul des prédicats

Définition : (Rappel) Un **séquent** $A_1, \dots, A_n \vdash B$ est **valide** ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ est valide.

Théorème : Le système DN_{pred} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{pred} est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$.

Le système de Gentzen pour le calcul des prédicats

Le système \mathcal{G} pour le calcul des prédicats

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$ (A est une formule du calcul des prédicats)

Règles d'inférence logiques (rappel) :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} (\neg d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d)$$

Le système \mathcal{G} pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta, \{x \leftarrow t\}(A), \forall x.A \vdash \Gamma}{\Delta, \forall x.A \vdash \Gamma} (\forall g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash \forall x.A, \Gamma} (\forall d)$$
$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta, \exists x.A \vdash \Gamma} (\exists g) \quad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A), \exists x.A, \Gamma}{\Delta \vdash \exists x.A, \Gamma} (\exists d)$$

Dans les règles $(\forall d)$ et $(\exists g)$ x n'est pas libre dans Δ et Γ .

Dans les règles $(\forall g)$ et $(\exists d)$ l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

Dérivation dans \mathcal{G}

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} .

Premier exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{\frac{p(x) \vdash p(x), \exists y \neg p(y)}{\vdash p(x), \neg p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash \forall x.p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash (\forall x.p(x)) \vee (\exists y \neg p(y))}$$

Deuxième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{p(a) \vdash p(a), \exists x.p(x)}{p(a) \vdash \exists x.p(x)} \quad \frac{p(b) \vdash p(b), \exists x.p(x)}{p(b) \vdash \exists x.p(x)}}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)}$$

Troisième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{\frac{p \vdash p, \exists z.q(z) \quad \frac{p, q(x) \vdash q(x), \exists z.q(z)}{p, q(x) \vdash \exists z.q(z)}}{p \rightarrow q(x), p \vdash \exists z.q(z)}}{p \rightarrow q(x) \vdash p \rightarrow \exists z.q(z)}}{\exists x.(p \rightarrow q(x)) \vdash p \rightarrow \exists z.q(z)}}{\vdash \exists x.(p \rightarrow q(x)) \rightarrow (p \rightarrow \exists z.q(z))}$$

Quatrième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{\frac{p(a), p(f(a)) \vdash p(f(a)), p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \rightarrow p(f(x)))}{p(a) \vdash p(f(a)), p(f(a)) \rightarrow p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \rightarrow p(f(x)))}}{p(a) \vdash p(f(a)), \exists x.(p(x) \rightarrow p(f(x)))}}{\vdash p(a) \rightarrow p(f(a)), \exists x.(p(x) \rightarrow p(f(x)))}}{\vdash \exists x.(p(x) \rightarrow p(f(x)))}$$

Cinquième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{\frac{\frac{p(x), p(y) \vdash p(y), p(y'), \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}{p(x) \vdash p(y), p(y) \rightarrow p(y'), \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}{p(x) \vdash p(y), \forall y'. (p(y) \rightarrow p(y')), \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}{p(x) \vdash p(y), \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}{\vdash p(x) \rightarrow p(y), \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}{\vdash \forall y. (p(x) \rightarrow p(y)), \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}{\vdash \exists x. \forall y. (p(x) \rightarrow p(y))}$$

Sixième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

Soit $A = \exists x \neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))$, $B = \forall x p(x)$ et $C = \forall x q(x)$.

$$\begin{array}{c} \frac{p(y), B, \neg q(y) \vdash p(y), A}{p(y), B, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A} \quad \frac{q(y), C, \neg p(y) \vdash q(y), A}{q(y), C, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A} \\ \frac{\forall x p(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A \quad \forall x q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}{\forall x p(x) \vee \forall x q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A} \\ \frac{\forall x p(x) \vee \forall x q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}{\forall x p(x) \vee \forall x q(x), \neg p(y) \wedge \neg q(y) \vdash A} \\ \frac{\forall x p(x) \vee \forall x q(x), \neg p(y) \wedge \neg q(y) \vdash A}{\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \vdash \neg(\neg p(y) \wedge \neg q(y)), A} \\ \frac{\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \vdash \neg(\neg p(y) \wedge \neg q(y)), A}{\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \vdash \exists x \neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))} \end{array}$$

Remarques

- Retarder au maximum le choix des témoins (règles $\forall g$ et $\exists d$).
- Renommer des variables (si nécessaire) pour éviter la capture de variables.

Comment transformer quelques dérivations dans \mathcal{G}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ et $\Delta \vdash A, \Gamma$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \vdash \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta \vdash \Gamma, A$ l'est aussi.

Rappel

Définition : Un séquent $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ est **valide** ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_m)$ est valide.

Propriétés du système \mathcal{G} pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système \mathcal{G} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système \mathcal{G} est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.