Définitions inductives et preuves par induction

Définitions inductives en informatique

- Syntaxe concrete
- Syntaxe abstraite
- Règles de typage
- Règles d'évaluation
- etc.

Le principe

Une définition inductive est caracterisée par :

- Une ou plusieures assertions
- Un ensemble de règles d'inférence pour dériver ces assertions

Exemple :

- Assertion : "`X est naturel`" ou "`X nat`"
- Règles d'inférence :

  R1: `0 est naturel`
  R2: Si `n est naturel`, alors `succ(n) est naturel`.

Notation

Les règles d'inférence sont notées

$$\frac{\texttt{Hyp-Ind}_1 \quad \ldots \quad \texttt{Hyp-Ind}_n \quad \texttt{Hyp-Supp}}{\texttt{Conclusion}}\ \text{(Nom de la règle)}$$

- `Conclusion` est une assertion
- $\texttt{Hyp-Ind}_1 \ldots \texttt{Hyp-Ind}_n$ sont des assertions
- `Hyp-Supp` est une formule supplémentaire, ne portant pas sur la même assertion que celle de la conclusion, et elle est éventuellement vide.
- En général $n \geq 0$. Si $n = 0$ la règle est un axiome

Exemple (règle unaire)

Les entiers naturels

$$\frac{}{0 \texttt{ est naturel}}(Nat0) \qquad \frac{n \texttt{ est naturel}}{succ(n) \texttt{ est naturel}}(Nat+)$$

Les mots sur un alphabet $\mathcal{A}$

$$\frac{}{\epsilon \texttt{ mot}}(Mv) \qquad \frac{a \in \mathcal{A} \quad n \texttt{ mot}}{a.n \texttt{ mot}}(Mnv)$$

Dans la règle

$$\frac{a \in \mathcal{A} \quad n \texttt{ mot}}{a.n \texttt{ mot}}(Mnv)$$

- La conclusion est: $a.n$ `mot`
- L'hypothèse inductive (une seule) est: n `mot`
- L'hypothèse supplémentaire est: $a \in \mathcal{A}$
- Le nom de la règle est: Mnv

Exemple (règle binaire)

Les arbres binaires

$$\frac{}{vide \texttt{ est un arbre binaire}}(\text{Abin-nil})$$

$$\frac{A_1 \texttt{ est un arbre binaire} \qquad A_2 \texttt{ est un arbre binaire}}{ab(A_1, A_2) \texttt{ est un arbre binaire}}(\text{Abin-ind})$$

Exemple (plusieurs axiomes, règles unaires et binaires)

Les expressions de la logique propositionnelle sur l'alphabet $\mathcal{A}$

$$\frac{p \in \mathcal{A}}{p \texttt{ expr}}$$

$$\frac{A_1 \texttt{ expr} \qquad A_2 \texttt{ expr}}{A_1 \vee A_2 \texttt{ expr}} \qquad \frac{A_1 \texttt{ expr} \qquad A_2 \texttt{ expr}}{A_1 \wedge A_2 \texttt{ expr}}$$

$$\frac{A_1 \texttt{ expr} \qquad A_2 \texttt{ expr}}{A_1 \rightarrow A_2 \texttt{ expr}} \qquad \frac{A \texttt{ expr}}{\neg A \texttt{ expr}}$$

Exemple (plusieures assertions simultanées)

Les forêts de type T et les arbres de type T

$$\frac{}{avide \in \texttt{ arbre T}} \qquad \frac{}{fvide \in \texttt{ foret T}}$$

$$\frac{t \in \texttt{T} \quad f \in \texttt{ foret T}}{node(t,f) \in \texttt{ arbre T}} \qquad \frac{A \in \texttt{ arbre T} \quad f \in \texttt{ foret T}}{add(A,f) \in \texttt{ foret T}}$$

Dans la règle

$$\frac{t \in \texttt{T} \quad f \in \texttt{ foret T}}{node(t,f) \in \texttt{ arbre T}}$$

- La conclusion est: $node(t,f) \in$ `arbre T`
- L'hypothèse inductive (une seule) est: $f \in$ `foret T`
- L'hypothèse supplémentaire est: $t \in \texttt{T}$

Dérivation d'une assertion

Une assertion A est dérivable ssi

- A est un axiome

$$\frac{}{A}$$

- ou il y a une règle de la forme

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{A}$$

telle que $A_1, \ldots, A_n$ sont dérivables

Dérivation d'une assertion

Exercice :

- Montrer que $succ(succ(0))$ `est naturel` est dérivable.
- Donner l'expression formelle qui dénote la forêt suivante, et montrer comment dériver cette expression avec les règles inductives précédentes:

```
 3          6
 |        / | \
44       8  9  7
               /\
              1  2
```

Ensemble inductif

Un ensemble inductif est le plus petit ensemble engendré par un système de règles d'inférence.

Preuves par induction (récurrence)

- Induction sur les entiers
  - Induction mathématique
  - Induction complète
  - Équivalence des deux principes
- Induction bien fondée
- Induction structurelle
- Induction sur un ensemble inductif

Induction sur les entiers I (induction mathématique)

Théorème : Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble des entiers naturels dont m est son élément minimal. Soit P une propriété sur $\mathcal{X}$.
Si

1. $P(m)$ est vrai,
2. le fait que $P(x)$ soit vrai implique que $P(x+1)$ est vrai,

alors
pour tout $n \in \mathcal{X}$ on a que $P(n)$ est vrai

Remarques

Pour prouver la conclusion $\forall n \in \mathcal{X}.P(n)$ (la propriété P est vraie sur tous les entiers de l'ensemble $\mathcal{X}$) il faut prouver:

- Le cas de base $P(m)$, sans utiliser d'hypothèse supplémentaire,
- Le cas inductif $P(x+1)$, en utilisant l'hypothèse d'induction $P(x)$ (une seule hypothèse d'induction).

Exemple 1: preuve par induction mathématique

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n * (n+1)}{2}$$

Preuve :

- Le cas de base. L'élément minimal est $n = 1$. Nous avons

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 * (1+1)}{2}$$

- Le cas inductif. Soit n pas minimal, *i.e.* $n = k + 1$.

$$HI : \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k * (k+1)}{2}$$

Montrons la propriété pour $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) =_{HI} \frac{k*(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Mais comment prouver

1. "Tout entier admet une décomposition en produit de nombres premiers"
2. "Si n est divisible par 3, alors $fib(n)$ est pair, sinon $fib(n)$ est impair".

Induction sur les entiers II (induction complète)

Théorème : Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble des entiers naturels dont m est son élément minimal. Soit P une propriété sur $\mathcal{X}$.
Si

1. $P(m)$ est vrai,
2. le fait que $P(k)$ soit vérifiée pour tout élément $k{<}x$ implique $P(x)$,

alors
pour tout $n \in \mathcal{X}$ on a que $P(n)$ est vrai

Remarques

Pour prouver la conclusion $\forall n \in \mathcal{X}.P(n)$ (la propriété P est vraie sur tous les entiers de l'ensemble $\mathcal{X}$) il faut prouver:

- Le cas de base $P(m)$, sans utiliser d'hypothèse supplémentaire,
- Le cas inductif $P(x)$, en utilisant les hypothèses d'induction (plusieurs) $\{P(k) \mid k \in \mathcal{X} \text{ et } k < x\}$.

Exemple 2: preuve par induction complète

Théorème : Tout entier positif admet une décomposable en produit de nombres premiers

Preuve :

- Le cas de base. L'élément minimal est $n = 1$, pour qui la décomposition (nulle) en nombres premiers est triviale.
- Le cas inductif. Soit n un élément qui n'est pas minimal.

  HI: Tout entier $k < n$ admet une décomposition en produit de nombres premiers

  Maintenant il y a deux cas pour n:
  - Si n est premier, alors sa décomposition en nombres premiers est triviale.
  - Si n n'est pas premier, alors $n = n_1 \cdot n_2$, où $n_i < n$. Par l'HI n_i admet une décomposition en produit de nombres premiers donc le produit de ces deux produits donne le résultat final.

Équivalence des deux principes

Malgré l'apparente supériorité du deuxième principe, on prouve

Théorème : Induction mathématique et complète sont équivalentes.

Les subtilités de l'induction

Théorème : Tous les français sont d'accord avec le Président de la République.

Preuve : On montre, par induction sur le nombre de français, que tout groupe de n personnes contenant le Président est d'accord avec lui.
Cas de base: il y a seulement le Président, trivial.
Cas inductif: on suppose l'énoncé vrai pour tout groupe de n personnes, et on le prouve pour tout groupe de $n+1$.
Numérotons de 1 à $n+1$ les personnes en question, de façon que le Président soit le numéro n, et considérons le groupe A des premières n et le groupe B des dernières n personnes.
Les deux groupes contiennent le Président et sont de taille $n < n+1$. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction et en déduire qu'ils sont tous d'accord avec le Président (qui est dans les deux), ce qui nous permet de conclure.

vrai ou faux?

Généralisation de l'induction mathématique

- Pour des objets d'un ensemble inductif.
  - Cas particulier: induction structurelle.
  - Exemples: les entiers, les mots, les listes, les arbres, les formules logiques, les forêts, etc.
- Pour des objets d'un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque (pas nécessairement les entiers).

Ingrédient principal: un ordre strict $\sqsubset$ sur les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ (qui généralise l'ordre $<$ sur les entiers).

Les ordres stricts

- Un ordre ou ordre partiel $\sqsubseteq$ est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive.
- Réflexivité: pour tout élément e, $e \sqsubseteq e$.
- Anti-symétrie: pour tout élément e, tout élément f, si $e \sqsubseteq f$ et $f \sqsubseteq e$ alors $e = f$.
- Transitivité: pour tout élément e, tout élément f, tout élément g, si $e \sqsubseteq f$ et $f \sqsubseteq g$ alors $e \sqsubseteq g$.
- Un ordre strict $\sqsubset$ est une relation irréflexive et transitive.
- Irréflexivité: pour tout élément e, $e \not\sqsubset e$.

  Exemple : $<$ ou $>$ sur les entiers, $\subset$ ou $\supset$ sur les ensembles.

Les éléments minimaux d'un ensemble

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble muni d'un ordre strict $\sqsubset$. L'élément $x \in \mathcal{A}$ est dit minimal si et seulement s'il n'existe aucun autre élément de cet ensemble qui lui soit inférieur, i.e. pour tout $n \in \mathcal{A}$, $n \leq x$ implique $n = x$.

Exemple : Soit $\sqsubset_S = \{(a, b), (b, c), (a', b), (b, c')\}$ un ordre strict sur $\{a, b, c, a', c'\}$. Nous avons $a \sqsubset_S b$, $b \sqsubset_S c$, $a' \sqsubset_S b$, $b \sqsubset_S c'$.
Alors a et a' sont minimaux.

Principe d'induction bien fondée

Théorème : Soient donnés un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque, un ordre strict $\sqsubset$ sur $\mathcal{A}$ (dont $\mathcal{M}$ est son ensemble d'éléments minimaux), et une propriété P sur $\mathcal{A}$.

Si

1. pour tout élément minimal $m \in \mathcal{M}$ on a $P(m)$
2. le fait que $P(k)$ soit vérifiée pour tout élément $k \sqsubset x$ implique $P(x)$

alors
pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a $P(a)$

Remarques

Pour prouver la conclusion $\forall a \in \mathcal{A}.P(a)$ (la propriété P est vraie sur tous les éléments de $\mathcal{A}$) il faut prouver:

- Chaque cas de base $P(m)$ où $m \in \mathcal{M}$, sans utiliser d'hypothèse supplémentaire,
- Le cas inductif $P(x)$, en utilisant les hypothèses d'induction (plusieurs) $\{P(k) \mid k \in \mathcal{A} \text{ et } k \sqsubset x\}$.

Ce principe est-il toujours bien défini?

Définition :
Une relation $\mathcal{R}$ est bien fondée (ou noethériene) ss'il n'existe aucune chaîne infinie décroissante (i.e., de la forme $a_0 \ \mathcal{R} \ a_1 \ \mathcal{R} \ a_2 \ \mathcal{R} \ \ldots$).

Définition :
La relation $\sqsubset$ est un ordre strict bien fondé (ou noethérien) si $\sqsubset$ est un ordre strict et $\sqsubset$ est bien fondée.

Exemples d'ordres stricts pas bien fondées:

- les entiers, et l'ordre $<$ usuel:
  $4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > \ldots$
- les mots sur un alphabet et l'ordre dictionnaire
  $b > ab > aab > aaab > \ldots$.
- les entiers rationnel et l'ordre $<$ usuel.
  $4.2 > 4.19 > 4.119 > \ldots$

Exemples d'ordres stricts bien fondées:

- les entiers naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$ et l'ordre usuel $<$.
- les entiers positifs $\{1, 2, \ldots\}$ et l'ordre $a < b$ ssi a divise b et $a \neq b$.
- les ensembles *finis* et l'ordre usuel $\subset$.
- les mots sur un alphabet et l'ordre $s < t$ ssi s est un sous-mot strict de t.
- l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et l'ordre $(n1, n2) < (m1, m2)$ ssi $n1 < m1$ et $n2 < m2$.
- l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et l'ordre lexicographique $(n1, n2) < (m1, m2)$ ssi $n1 < m1$ ou $n1 = m1$ et $n2 < m2$.
- les noeuds d'un graphe orienté acyclique et l'ordre aRb ssi il y une arête de a vers b.

Bonne fondation et induction

Théorème :
Si $\sqsubset$ est un ordre strict bien fondé, alors le principe d'induction est correct.

Théorème :
Si le principe d'induction est correct, alors $\sqsubset$ est un ordre strict bien fondé.

Le principe d'induction pour les ensembles inductifs.

Définition : On considère la définition inductive d'un ensemble $\mathcal{X}$ donnée par des règles de la forme, où Op est un opérateur n-aire:

$$\frac{a_1 \in \mathcal{X} \ldots a_n \in \mathcal{X}}{Op(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{X}} \ (r_i)$$

On construit un ordre $\sqsubset$ (strict et bien fondé) en associant à chaque règle r_i les couples $a_1 \ \sqsubset \ Op(a_1, \ldots, a_n), \ldots, a_n \ \sqsubset \ Op(a_1, \ldots, a_n)$.

Exemple :

- Les mots sur un alphabet de longueur paire, où $n \sqsubset \ a.b.n$ pour toutes les lettres a, b et tout mot n. Remarquer que la structure n'est pas calquée sur les règles inductives.

Corollaire : Le principe d'induction pour les ensembles inductifs est correct.

Le principe d'induction structurelle

Définition : On considère la définition inductive d'un ensemble $\mathcal{X}$ donnée par des règles de la forme, où f est un symbole syntaxique n-aire:

$$\frac{a_1 \in \mathcal{X} \ldots a_n \in \mathcal{X}}{f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{X}}\,(f)$$

On construit un ordre $\sqsubset$ (qui est strict et bien fondé) en associant à chaque règle f les couples $a_1 \sqsubset f(a_1, \ldots, a_n), \ldots, a_n \sqsubset f(a_1, \ldots, a_n)$.

Exemple :

- Les mots sur un alphabet, où $n \sqsubset a.n$ pour toute lettre a et tout mot n.
- Les arbres arbres binaires, où $A_i \sqsubset ab(A_1, A_2)$ $(i = 1, 2)$ pour tous les arbres A_1 et A_2.

Corollaire : Le principe d'induction structurelle est correct.

Exemple 3: preuve par induction structurelle

On définit une fonction *concat* sur les mots comme suit:

$$\begin{array}{lcl} concat(\epsilon, k) & := & k \\ concat(a.l, k) & := & a.concat(l, k) \end{array}$$

Soit m un mot et soit P la propriété suivante :

$$P(m) \text{ ssi } concat(concat(m, v_1), v_2) = concat(m, concat(v_1, v_2))$$

Démontrer par induction la propriété P pour tout les mots.

Preuve :

- Le cas de base. L'élément minimal est $m = \epsilon$. Nous avons

$$\begin{array}{lcl} concat(concat(m, v_1), v_2) & = & concat(concat(\epsilon, v_1), v_2) \; = \\ concat(v_1, v_2) & = & concat(\epsilon, concat(v_1, v_2)) \; = \\ concat(m, concat(v_1, v_2)) & & \end{array}$$

- Le cas inductif. Soit m pas minimal, *i.e.* $m = b.m'$.

$$HI : concat(concat(m', v_1), v_2) = concat(m', concat(v_1, v_2))$$

Montrons la propriété pour $m = b.m'$:

$$\begin{array}{ll} concat(concat(m, v_1), v_2) & = \\ concat(concat(b.m', v_1), v_2) & = \\ concat(b.concat(m', v_1), v_2) & = \\ b.concat(concat(m', v_1), v_2) & =_{HI} \\ b.concat(m', concat(v_1, v_2)) & = \\ concat(b.m', concat(v_1, v_2)) & = \\ concat(m, concat(v_1, v_2)) & \end{array}$$

Exemple 4: preuve par induction structurelle

Soit a un arbre binaire et soit P la propriété suivante:

$$P(a) \text{ ssi } feuilles(a) = noeuds\_internes(a) + 1$$

Démontrer par induction la propriété P pour tout les arbres binaires.

Preuve :

- Le cas de base. L'élément minimal est $a = vide$. Nous avons:

$$\begin{array}{l} feuilles(vide) = \\ 1 = 0 + 1 = \\ noeuds\_internes(vide) + 1 \end{array}$$

- Le cas inductif. Soit a pas minimal, *i.e.* $a = ab(a_1, a_2)$.

$$HI_1 : feuilles(a_1) = noeuds\_internes(a_1) + 1$$

$$HI_2 : feuilles(a_2) = noeuds\_internes(a_2) + 1$$

Montrons la propriété pour $a = ab(a_1, a_2)$.

$$\begin{array}{ll} feuilles(ab(a_1, a_2)) & = \\ feuilles(a_1) + feuilles(a_2) & =_{HI_1} \\ noeuds\_internes(a_1) + 1 + feuilles(a_2) & = \\ noeuds\_internes(a_1) + 1 + feuilles(a_2) & =_{HI_2} \\ noeuds\_internes(a_1) + 1 + noeuds\_internes(a_2) + 1 & = \\ noeuds\_internes(ab(a_1, a_2)) + 1 & \end{array}$$

Exemple 5: preuve par induction structurelle

Soit p une expression de la logique propositionnelle, soit $|p|$ le nombre de symboles de p et soit $\mathtt{sf}(p)$ l'ensemble de ses sous-formules donnée par la définition suivante:

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{sf}(x) & := & \{x\} \\ \mathtt{sf}(\neg q) & := & \{\neg q\} \cup \mathtt{sf}(q) \\ \mathtt{sf}(q_1 \wedge q_2) & := & \{q_1 \wedge q_2\} \cup \mathtt{sf}(q_1) \cup \mathtt{sf}(q_2) \\ \mathtt{sf}(q_1 \vee q_2) & := & \{q_1 \vee q_2\} \cup \mathtt{sf}(q_1) \cup \mathtt{sf}(q_2) \\ \mathtt{sf}(q_1 \rightarrow q_2) & := & \{q_1 \rightarrow q_2\} \cup \mathtt{sf}(q_1) \cup \mathtt{sf}(q_2) \end{array}$$

Soit P la propriété suivante:

$$P(p) \text{ ssi } \#\mathtt{sf}(p) \leq |p|$$

Démontrer par induction la propriété P pour toutes les expressions.

Preuve :

- Le cas de base. L'élément minimal est $p = x$. On a

$$\#\mathtt{sf}(x) = 1 \leq 1 = |p|$$

- Les cas inductifs. Soit p pas minimal. Plusieurs cas à considérer.
  - $p = \neg q$.

$$HI : \#\mathtt{sf}(q) \leq |q|$$

$$\#\mathtt{sf}(\neg q) = \#(\{\neg q\} \cup \mathtt{sf}(q)) = 1 + \#\mathtt{sf}(q) \leq_{IH} 1 + |q| = |\neg q|$$

  - $p = q_1 \wedge q_2$.

$$HI_1 : \#\mathtt{sf}(q_1) \leq |q_1| \qquad HI_2 : \#\mathtt{sf}(q_2) \leq |q_2|$$

$$\begin{array}{ll} \#\mathtt{sf}(q_1 \wedge q_2) & = \\ \#(\{q_1 \wedge q_2\} \cup \mathtt{sf}(q_1) \cup \mathtt{sf}(q_2)) & = \\ 1 + \#\mathtt{sf}(q_1) + \#\mathtt{sf}(q_2) & \leq_{IH} 1 + |q_1| + |q_2| = |q_1 \wedge q_2| \end{array}$$

  - ...

Exemple 6: preuve par induction bien fondée

Ackermann(0,n)	=	n+1
Ackermann(m+1,0)	=	Ackermann(m,1)
Ackermann(m+1,n+1)	=	Ackermann(m,Ackermann(m+1,n))

Soit $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et soit P la propriété suivante:

$$P(n, m) : \text{ Ackermann termine sur } (n, m)$$

Démontrer par induction la propriété P sur tous les couples $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

On muni $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec l'ordre lexicographique

$$(x, y) >_{lex} (x', y') \text{ ssi } (x > x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y > y')$$

Preuve :

- Le cas de base. L'élément minimal est $(n, m) = (0, 0)$. Nous avons $Ackermann(0, 0) = 1$, donc $P(0, 0)$.
- Le cas inductif. Soit (n, m) un élément pas minimal.

$$HI : \text{ Ackermann termine sur } (n'm') \text{ pour tout } (n', m') <_{lex} (n, m)$$

Plusieurs cas a considérer:

  - $(n, m) = (0, l)$, $l \neq 0$. Alors $Ackermann(0, l) = l + 1$, donc $P(0, l)$.
  - $(n, m) = (k, 0)$, $k \neq 0$. Alors $Ackermann(k, 0) = Ackermann(k - 1, 1)$. Comme $(k - 1, 1) <_{lex} (k, 0)$ alors $Ackermann(k - 1, 1)$ termine par l'HI, donc $P(k, 0)$.
  - $(n, m) = (k, l)$, $k \neq 0, l \neq 0$. Alors $Ackermann(k, l) = Ackermann(k - 1, Ackermann(k, l - 1))$. Comme $(k, l - 1) <_{lex} (k, l)$, alors $Ackermann(k, l - 1)$ termine par l'HI. Le deuxième appel est de la forme $Ackermann(k - 1, A)$, mais $(k - 1, A) <_{lex} (k, l)$, alors $Ackermann(k - 1, A)$ termine par l'HI. On conclut donc $P(k, l)$.

Exemple 7: preuve par induction structurelle (simultanée)

Considérons les mots de longueur pair et impair sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a\}$:

$$\frac{}{\epsilon \in \texttt{mot-pair}} \qquad \frac{a \in \mathcal{A}}{a.\epsilon \in \texttt{mot-impair}}$$

$$\frac{m \in \texttt{mot-pair}}{a.m \in \texttt{mot-impair}} \qquad \frac{m \in \texttt{mot-impair}}{a.m \in \texttt{mot-pair}}$$

Soit PI la propriété suivante sur les mots impairs:

$$PI(m) : |m|_a = \exists k \text{ tel que } 2.k + 1 (\text{le nombre de a dans m est impair})$$

Démontrer par induction la propriété PI sur tous les mots impairs.

- On commence par définir une propriété similaire pour les mots pairs:

$$PP(m) : |m|_a = \exists k \text{ tel que } 2.k$$

- On démontre de manière simultanée PI sur les mots impairs et PP sur les mots paires.

Preuve :

- Les cas de base.

$$|\epsilon|_a = 0 = 2.0$$
$$|a.\epsilon|_a = 1 = 2.0 + 1$$

- Les cas inductifs. Soit $mi = a.mp'$ un mot impair non minimal et $mp = a.mi'$ un mot pair non minimal.

$$HI_i : \exists k' \text{ tel que } |mi'|_a = 2.k' + 1$$
$$HI_p : \exists k' \text{ tel que } |mp'|_a = 2.k'$$

Montrons $PI(mi)$ et $PP(mp)$.

$$|mi|_a = |a.mp'|_a = 1 + |mp'|_a =_{HI_p} = 1 + 2.k'$$
$$|mp|_a = |a.mi'|_a = 1 + |mi'|_a =_{HI_i} = 1 + 2.k' + 1 = 2.(k' + 1)$$