Université Paris Diderot Année 2018-2019

Questions de cours n$^{\text{o}}$ 5
L3-Logique

Calcul des prédicats : syntaxe et sémantique

Exercice 1 • Complétez la définition d'un *terme* du calcul des prédicats.
Soit une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$. L'ensemble des *termes* par rapport à un ensemble de variables $\mathcal{X}$ et à une signature Σ est noté $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$. Il est le plus petit ensemble engendré par les règles suivantes :

$$\frac{\cdots}{x \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{\cdots \qquad \cdots}{f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

- Donnez la définition d'un *atome* du calcul des prédicats.
  Soient une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$ et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. L'ensemble des *atomes* sur un ensemble de variables $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
  Un *atome* sur Σ et $\mathcal{X}$ est de la forme ...

- Donnez la définition d'une *formule* du calcul des prédicats.
  L'ensemble des *formules* sur un ensemble de variables $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$. Il est le plus petit ensemble engendré par les règles suivantes :

$$\frac{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{\cdots}{\neg A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{\cdots}{A \to B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{\cdots}{A \vee B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{\cdots}{A \wedge B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{\cdots \qquad \cdots}{\forall x.\ A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{\cdots \qquad \cdots}{\exists x A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

- Donnez la définition des *variables libres et liées.*
  Les variables *libres (VI)* et *liées (VE)* d'une formule sont définies comme suit :
  — Si A est un atome $p(t_1, \ldots, t_n)$, $VE(A) = \cdots$ et $VI(A) = \cdots$
  — Si $A = \neg B$, $VI(A) = \cdots$ et $VE(A) = \cdots$
  — Si $A = B\#C$, $VI(A) = \cdots$ et $VE(A) = \cdots$
  — Si $A = \forall x.\ B$ ou $A = \exists x B$, $VI(A) = \cdots$ et $VE(A) = \cdots$

Exercice 2 Soient $\mathcal{X}$ un enesemble de variables contennat x, une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$ et soit ϕ une formule sur sur cette signature. Soient $\mathcal{I}$ une interprétation et σ une valuation sur $\mathcal{X}$.
Que faut-il faire pour montrer que :

- $[\forall x.\ \phi]_{\mathcal{I},\sigma} = V$
- $[\forall x.\ \phi]_{\mathcal{I},\sigma} = F$
- $[\exists x.\ \phi]_{\mathcal{I},\sigma} = V$
- $[\exists x.\ \phi]_{\mathcal{I},\sigma} = F$