Université Paris Diderot - L3 Année 2018–2019

TD de Logique n° 10

# Calcul des prédicats : Résolution

**Résolution pour le calcul des prédicats**
Axiomes :

$$\frac{}{C} \quad (C \in \Delta,\ \text{où } \Delta \text{ un ensemble de clauses}).$$

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \ (coupure)$$

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \vee r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee r(s_1, \ldots, s_n))} \ (factorisation)$$

$$\frac{D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n) \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n))} \ (factorisation)$$

où $\sigma$ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ et les clauses $C$ et $D$ ne partagent pas de variables.

**Les cas particuliers**
Quelques cas particuliers lorsque $r$ est 0-aire :

$$\frac{D \vee r \quad C \vee \neg r}{D \vee C} \ (c) \qquad \frac{r \quad \neg r}{\texttt{False}} \ (c) \qquad \frac{r \vee r}{r} \ (f) \qquad \frac{\neg r \vee \neg r}{\neg r} \ (f)$$

Quelques cas particulier lorsque $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ est unifiable avec une substitution $\sigma$ :

$$\frac{r(s_1, \ldots, s_n) \quad \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\texttt{False}} \ (c)$$

$$\frac{r(s_1, \ldots, s_n) \vee r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma r(s_1, \ldots, s_n)} \ (f) \qquad \frac{\neg r(s_1, \ldots, s_n) \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma \neg r(s_1, \ldots, s_n)} \ (f)$$

**Exercice 1 (Forme Clausale)** Pour chacune des formules suivantes, effectuez la mise sous forme clausale :

1. $\exists z.\ (q(f(z)) \wedge s(f(z), a))$.
2. $\forall x. \forall y. \neg \exists z.\ (p(x, y) \wedge s(x, z))$.
3. $\forall x. \big[[q(x) \wedge \exists y.(s(x, y))] \rightarrow [\exists y.(r(y) \wedge p(x, y))]\big]$.

**Exercice 2 (Résolution et Réfutation)** Soit $\Sigma_F = \{a/0, b/0, 0/0, s/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/1, q/1, r/2\}$.

1. Montrez en utilisant la résolution que si $\Delta = \{p(0), \neg p(x) \vee q(s(x)), \neg q(y) \vee p(s(y))\}$, on a $\Delta \vdash q(s(s(s(0))))$.
2. (*) Montrez en utilisant la réfutation que l'ensemble des clauses suivant est réfutable : $\{r(x, x), \neg r(y, z) \vee \neg r(z, u) \vee r(u, y), r(a, b), \neg r(b, a)\}$

**Exercice 3 (Réfutation)** A l'aide de la réfutation, prouvez la validité des formules :

1. (*) Paradoxe des buveurs :
   *(On peut toujours trouver quelqu'un tel que si il boit tous les autres boivent)*
   $$\exists y.(B(y) \rightarrow \forall x.B(x))$$
2. Paradoxe du barbier :
   *(Dans une ville dont tous les hommes se rasent eux-mêmes si et seulement si le barbier ne les rase pas, le barbier se rase lui-même et il ne se rase pas lui-même.)*
   $b$ est une constante
   $$[\forall y.(R(y, y) \leftrightarrow \neg R(b, y))] \rightarrow [R(b, b) \wedge \neg R(b, b)]$$

**Exercice 4 (Réfutation)**

1. (*) Soit $\Sigma_F = \{a/0, f/1\}$ et $\Sigma_P = \{q/1, r/1, p/2, s/2\}$. En utilisant le système de preuve par réfutation, montrez que l'ensemble de formules $\{H_1, H_1, H_3\}$ est insatisfaisable, où
   - $H_1 = \exists z.\ (q(f(z)) \wedge s(f(z), a))$
   - $H_2 = \forall x. \forall y. \neg \exists z.\ (p(x, y) \wedge s(x, z))$
   - $H_3 = \forall x.[[q(x) \wedge \exists y.s(x, y)] \rightarrow [\exists y.(r(y) \wedge p(x, y))]]$

   On utilisera les clauses calculées dans l'exercice 1.
2. Montrez que la formule $F = (\forall x.(p(a) \wedge (p(x) \rightarrow p(f(x))))) \rightarrow \exists x.p(f(f(x)))$ est valide.

**Exercice 5 (Test d'occurrence, renommage et factorisation)**

**(a) Nécessité du test d'occurrence dans l'unification (*occur-check*) :**
Considérons la formule $A = (\forall x.p(x, x)) \wedge (\forall y. \neg p(y, f(y)))$.

(i) Donnez un modèle de la formule $A$.

(ii) Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :
L'ensemble de clauses associé à la formule $A$ est $\{p(x, x), \neg p(y, f(y))\}$. En unifiant $p(x, x)$ avec $p(y, f(y))$, on trouve l'unificateur principal $\{x \leftarrow y,\ y \leftarrow f(y)\}$. Donc c'est unifiable, et on obtient la clause vide par résolution. On conclut que la formule $A$ est insatisfaisable.

**(b)** (*) **Nécessité du renommage :** Considérons la formule $B = \forall x.(p(x) \wedge \neg p(f(x)))$.

1. Montrer que la formule $B$ est insatisfaisable.
2. Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :
   L'ensemble de clauses associé à la formule $B$ est $\{p(x),\ \neg p(f(x))\}$. Puisqu'on ne peut pas unifier $p(x)$ et $p(f(x))$ à cause du test d'occurrence, on ne peut pas déduire la clause vide par résolution à partir de $\{p(x), \neg p(f(x))\}$ et donc l'ensemble de formules est satisfaisable.

**(c) Nécessité de la factorisation :**

1. Est-ce que la formule suivante est satisfaisable, valide ou insatisfaisable ?

$$[(\forall x.p(x)) \vee (\forall x'.p(x'))] \ \wedge \ [(\forall y.\neg p(y)) \vee (\forall y'.\neg p(y'))]$$

2. Peut-on, à partir des deux clauses $\{p(x) \vee p(x'),\ \neg p(y) \vee \neg p(y')\}$, dériver la clause vide en utilisant la méthode de résolution sans utiliser la règle de factorisation ?
3. Quelle est votre conclusion ?

**(d) Nécessité de prendre un nouveau symbole à chaque fois lors de la skolémisation :**

1. Est-ce que la formule suivante est satisfaisable ?

$$[\forall x.p(x,x) \wedge \exists y.\exists z.\neg p(y,z)]$$

2. Utilisez cet exemple pour montrer qu'il est nécessaire de prendre un nouveau symbole de Skolem à chaque fois.