

TD de Logique n° 12

Théorème de Herbrand et révisions

Exercice 1 (Herbrand)

1. Nous allons montrer que la formule F suivante n'est pas valide

$$F = [\forall x.\forall y.(p(x, y) \rightarrow p(y, x))] \rightarrow [\forall x.p(a, x)]$$

(où a est un symbole de constante) Pour cela,

- (a) Mettez $\neg F$ en forme clausale.
 - (b) Calculez l'univers et la base de Herbrand associés.
 - (c) Calculez l'arbre sémantique associé.
2. De la même manière, montrez que la formule suivante est valide

$$[\forall x(p(a) \wedge (p(x) \rightarrow p(f(x))))] \rightarrow [\exists x p(f(f(x)))]$$

(Attention ici l'arbre sémantique est potentiellement infini !)

Exercice 2 (Révision : modélisation-résolution)

En utilisant les symboles de prédicat suivants

$v(x, y)$ « il existe un vol de la ville x vers la ville y »

$l(x, y)$ « il existe une liaison de la ville x vers la ville y »

et les symboles de fonction suivants

a dénote Amsterdam

b désigne Bruxelles

c désigne Copenhague

1. Donnez des formules qui indiquent
 - qu'il y a une liaison d'une ville vers une autre ville si on peut faire ce trajet en utilisant un ou plusieurs vols.
 - inversement, s'il y a une liaison d'une ville vers une autre ville, alors on peut faire ce trajet en utilisant un ou plusieurs vols.
 - il y a un vol d'Amsterdam à Copenhague, un vol de Bruxelles à Amsterdam et un vol de Copenhague à Amsterdam.
2. Montrez par la résolution qu'il y a une liaison de Bruxelles à Copenhague. On ne mettra sous forme clausale que les formules qui serviront.
3. Montrez-le aussi en utilisant le théorème de Herbrand.

Exercice 3 [Révision : Gentzen] Quels sont les séquents suivants qui sont valides ? S'ils le sont, utilisez Gentzen pour le démontrer et, dans le cas contraire, donnez une interprétation qui les falsifie.

1. $\forall x.P(x, f(x)) \vdash \forall x.\exists y.P(x, y)$
2. $\forall x.\exists y.\neg(P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash \exists x.P(x)$
3. $\neg\forall x.P(x) \vdash \forall x.\neg P(x), \exists x.\neg P(f(x))$