TD de Logique n° 2

Retour sur la logique propositionnelle

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire chez vous.**

Exercice 1 –Améliorez votre intuition. Pour chacune des formules suivantes, essayez dans un premier temps de "deviner" si elle est valide, contradictoire ou si elle est à la fois satisfaisable et falsifiable. Ensuite montrez-le de manière formelle.

Remarques :

- Pour certaines formules, "deviner" est difficile. On peut donc s'aider en utilisant des équivalents ; en se demandant dans quels cas la formule est fausse, dans quels cas elle est vraie ; en dernier recours, en calculant la table de vérité s'il y a peu de variables propositionnelles.
- Plusieurs outils sont disponibles pour les démonstrations selon ce qu'on doit démontrer : raisonnement par équivalence, démonstration directe ou par l'absurde, donner une interprétation qui satisfait et une qui falsifie dans le cas où la formule n'est ni valide ni contradictoire, ...Si possible, évitez les tables de vérités.

1. $(\neg p \to p) \to p$
2. $p \to (p \wedge q)$
∗3. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
∗4. $(p \wedge q) \to p$
∗5. $(p \vee q) \to q$
∗6. $p \to (p \vee q)$
∗7. $p \wedge \neg p$
∗8. $p \vee (p \to q)$
∗9. $q \vee (p \to q)$
∗10. $p \wedge (p \to q)$
∗11. $q \wedge (p \to q)$
∗12. $p \vee q$
∗13. $p \vee \neg p$
∗14. $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
15. $((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$
∗16. $(p \wedge \neg p) \to q$
∗17. $(\neg p \to p) \to \neg p$
∗18. $((p \to q) \to p) \to p$
19. $(p \vee \neg p) \to (q \wedge \neg q)$

Exercice 2 – Équivalence.

1. Montrez que l'équivalence logique est une relation d'équivalence sur les formules logiques.
   Rappel : une relation d'équivalence est une relation réflexive, symétrique et transitive.
2. Montrez que $A \equiv B$ ssi $[A]_I = [B]_I$ pour toute interprétation I.
3. Montrez que l'équivalence logique $\equiv$ est une congruence sur les formules logiques, c'est-à-dire montrez que :
   - si $A \equiv A'$ alors $\neg A \equiv \neg A'$.
   - si $A \equiv A'$ et $B \equiv B'$ alors $A \# B \equiv A' \# B'$.

Exercice 3 – Preuve du lemme de remplacement équivalent.

1. Soient A, B et C des formules logiques. On note $C[\![A \Leftarrow B]\!]$, la fonction qui remplace la sous-formule A par B partout où elle apparaît dans C.
   - Calculez $(p \to (p \to q))[\![(p \to q) \Leftarrow q]\!]$ puis proposez d'autres exemples de remplacement.
   - Donnez une définition inductive de $C[\![A \Leftarrow B]\!]$.
2. Montrez par induction sur les formules logiques que si A et B sont équivalentes, alors C et $C[\![A \Leftarrow B]\!]$ le sont aussi. **Indication :** On utilisera ce qui est démontré à l'exercice 2.

Exercice 4 – Jeu de connecteurs. Montrez par induction structurelle que pour toute formule logique A, il existe une formule logique A', équivalente à A et ne contenant que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

Indications :

- Il faut donner une définition inductive d'une fonction Eq telle que pour toute formule A, $Eq(A) \equiv A$ et $Eq(A)$ ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$. La définition inductive et la preuve de l'équivalence peuvent se faire simultanément ou séparément.
- On utilisera le lemme de remplacement pour montrer l'équivalence

Exercice 5 *– Équivalence et induction. On définit la fonction Neg sur les formules utilisant uniquement les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ par "$Neg(A)$ est obtenue à partir de A en ajoutant un $\neg$ devant chaque symbole de proposition, et en remplaçant les $\wedge$ par des $\vee$ et les $\vee$ par des $\wedge$".

1. Que vaut $Neg(p \wedge (\neg q \vee r)))$?
2. Donnez une définition inductive de $Neg(A)$.
3. Montrez par induction structurelle que pour toute formule A utilisant uniquement les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$, on a $Neg(A) \equiv \neg A$.

Indication : on peut utiliser le lemme de remplacement démontré ci-dessus.