Université Paris Diderot - L3 Année 2018-2019

TD de Logique n° 3

Déduction Naturelle

Rappelons le système de la déduction naturelle :

$$\frac{}{\Delta, A \vdash A}\ (Ax) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\ (\to\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Delta \vdash B}\ (\to\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\ e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\ (\neg e)$$

Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.

Exercice 1 En utilisant la déduction naturelle, montrez les propriétés suivantes :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r}))$
3. $\vdash ((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q})) \to \neg\mathbf{p}$
4. * $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$ *(utilisez entre autres les règles ($\wedge i$) puis ($\neg i$))*
5. * $\vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{p} \to \mathbf{q})$ *(utilisez entre autres les règles ($\vee e$) puis ($\neg e$), celle de gauche)*
6. * $\vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ *(On pourra s'aider du tiers exclus, vu en cours et l'utiliser pour montrer $\mathbf{p} \to \mathbf{q} \vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$. Cette question est plus difficile que les deux autres.)*

Exercice 2 Démontrez la correction des règles suivantes de la déduction naturelle :

1. $\dfrac{}{\Delta, A \vdash A}$
2. * $\dfrac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge\ i)$
3. $\dfrac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i)$
4. * $\dfrac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$

Il faudra donc montrer pour chacune des règles que si les prémisses sont valides alors la conclusion est valide.

Exercice 3 Le but de cet exercice est de démontrer, par induction sur les dérivations, le théorème d'affaiblissement de la déduction naturelle.

Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors pour toute formule B, $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

1. Nous allons déjà regarder ce qui se passe sur un exemple. Soit la preuve ci-dessous de $\vdash \mathbf{p} \to (\neg\neg\mathbf{p})$, comment la transformer en preuve de $\mathbf{q} \vdash \mathbf{p} \to (\neg\neg\mathbf{p})$?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p}, \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{p}}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{\mathbf{p}, \neg\mathbf{p} \vdash \neg\mathbf{p}}\,(\mathrm{Ax})}{\mathbf{p} \vdash \neg\neg\mathbf{p}}\,(\neg i)}{\vdash \mathbf{p} \to (\neg\neg\mathbf{p})}\,(\to i)$$

2. Rappelez la définition inductive des dérivations des séquents de la déduction naturelle. Définissez un ordre sur l'ensemble des dérivations. Donnez le ou les éléments minimaux de l'ensemble des dérivations.
3. Démontrez le théorème sur le cas de base.
4. Démontrez le cas inductif pour les sous-cas correspondant aux règles d'inférences de l'introduction de la négation, de l'élimination de l'implication.

Exercice 4 Dans cet exercice, nous allons démontrer, par induction sur les dérivations, le théorème suivant de contraction de la déduction naturelle.

Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas.)

Les étapes de cet exercice sont les mêmes que pour l'exercice 3 :

1. Nous allons déjà traiter un exemple : transformez la preuve de $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}, \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{r} \vee \mathbf{s}$ ci-dessous en une preuve de $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{r} \vee \mathbf{s}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}, \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}}\,(\mathrm{Ax})}{\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}, \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{p}}\,(\wedge e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}, \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}}\,(\mathrm{Ax})}{\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}, \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \neg\mathbf{p}}\,(\wedge e)}{\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}, \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash \mathbf{r} \vee \mathbf{s}}\,(\neg e)$$

2. Rappelez la définition inductive des dérivations des séquents de la déduction naturelle. Définissez un ordre sur l'ensemble des dérivations. Donnez le ou les éléments minimaux de l'ensemble des dérivations.
3. Démontrez le théorème sur le cas de base.
4. Démontrez le cas inductif pour les sous-cas correspondant aux règles d'inférences de l'élimination du ou, de l'élimination de la double négation (règle $(\neg e)$ de droite).