TD de Logique n° 4

Calcul des séquents de Gentzen

On rappelle d'abord le système LK :

$$\frac{}{A \vdash A}(ax)$$

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}(\text{cont g}) \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A}(\text{cont d}) \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}(\text{aff g}) \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A}(\text{aff d})$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}(\neg\text{g}) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}(\neg\text{d}) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \to B \vdash \Gamma, \Lambda}(\to \text{g}) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}(\to \text{d})$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}(\wedge\text{g}) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi \vdash B, \Lambda}{\Delta, \Pi \vdash A \wedge B, \Gamma, \Lambda}(\wedge\text{d})$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \vee B \vdash \Gamma, \Lambda}(\vee\text{g}) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}(\vee\text{d}) \quad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}(\vee\text{d})$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Pi \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi \vdash \Gamma, \Lambda}(\text{coupure})$$

Ainsi que le système $\mathcal{G}$:

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}(ax)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}(\neg\text{g}) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}(\neg\text{d})$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}(\to \text{g}) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}(\to \text{d})$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}(\wedge\text{g}) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}(\wedge\text{d})$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}(\vee\text{g}) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}(\vee\text{d})$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma}(\text{coupure})$$

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Exercice 1 [Dérivations] Dérivez dans LK et dans $\mathcal{G}$ les séquents suivants :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p}, \neg\mathbf{s}$
2. (*) $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash$
3. (*) $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \rightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
4. $(\mathbf{p} \rightarrow \neg\mathbf{p}) \wedge (\neg\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}) \vdash$

Exercice 2 [Réversibilité] Étant donnée une règle d'inférence de la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash \Delta_n \quad (n \geq 0)}{\Gamma \vdash \Delta}\,(\texttt{nomregle})$$

on dit que la règle (`nomregle`) est *réversible* si la condition suivante est vérifiée :

> Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide ssi pour tout $1 \leq i \leq n$, le séquent $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ est valide.

Toutes les règles du système $\mathcal{G}$ (sauf la coupure) sont réversibles. Montrez formellement la propriété de réversibilité dans le cas de la règle $(\rightarrow\ d)$.

Exercice 3 La réversibilité nous permet de déduire une méthode automatique pour montrer si un séquent est valide ou non. Elle consiste à appliquer de façon itérative les règles du système $\mathcal{G}$ (sauf la coupure) jusqu'à obtenir partout des séquents (dits *finaux*) sans aucune occurrence d'un opérateur logique. Le séquent initial est finalement valide si tous les séquents finaux sont des axiomes, et le séquent initial n'est pas valide dans le cas contraire (autrement dit, dès que l'on rencontre un séquent final qui n'est pas un axiome, la méthode peut s'arrêter car le séquent initial n'est pas valide). Utiliser cette méthode pour dire si les séquents suivants sont valides ou non.

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
2. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
3. $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \rightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
4. $\vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \rightarrow ((\neg\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$

Exercice 4 Montrer le *lemme d'affaiblissement généralisé* : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors pour tout multi-ensemble Δ' et tout multi-ensemble Γ', on a $\Delta, \Delta' \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, \Gamma'$. Suggestion : raisonner par induction sur la taille de Δ' plus la taille de Γ' et appliquer le lemme d'affaiblissement du cours.