Université Paris Diderot - L3 Année 2018-2019

TD de Logique n° 5

Calcul des prédicats - syntaxe

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Exercice 1 (Modélisation)
En utilisant les symboles de prédicat suivants

$B(x)$	« x boit »
$A(x,y)$	« y est l'ami de x »
$R(x,y)$	« x ramène y en voiture »

et les symboles de fonction suivants

$m(x)$	dénote le meilleur ami de x
s	dénote Sam

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre. L'un de ces énoncés est ambigu. Lequel ? Donnez des traductions pour chaque sens possible de cet énoncé.

1. Tout le monde a un ami qui ne boit pas.
2. Sam ramène son meilleur ami en voiture.
3. Celui qui ramène quelqu'un en voiture ne boit pas.
4. Personne ne ramène en voiture le meilleur ami de Sam.
5. Si Sam ramène quelqu'un en voiture, il ramène son meilleur ami.
6. Il y a toujours quelqu'un qui, s'il boit, tout le monde boit.

Exercice 2 (Substitutions)

1. Soit $t = g(x,y)$. On considère les substitutions $\sigma_1 = \{x \leftarrow f(a)\}$ et $\sigma_2 = \{y \leftarrow g(a,x)\}$.
   - Calculez : $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_1(\sigma_2(t))$ et $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
   - Calculez : $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$. (Rappel : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour toute variable x).
2. Soit $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$ et soit $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
3. Soit s le terme $h(x,y,z)$ et les substitutions

$$\begin{array}{rrcl} & \sigma_1 & = & \{x \leftarrow f(a),\ y \leftarrow f(x),\ z \leftarrow b\} \\ (*) & \sigma_2 & = & \{x \leftarrow f(z),\ y \leftarrow f(b),\ z \leftarrow b\} \\ (*) & \sigma_3 & = & \{w \leftarrow z,\ z \leftarrow b\} \circ \{x \leftarrow f(w),\ y \leftarrow a\} \end{array}$$

   Calculer $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ et $\sigma_3(s)$.

Exercice 3 (Variables libres, liées)

- Dans la formule suivante, indiquez pour chaque variable, si elle est libre ou liée, et le cas échéant à quel connecteur elle est liée.

$$F = \forall x.\ \Big[(\forall y. p(x,y)) \vee \exists x.\ p(x,y)\Big] \wedge \exists y.\ r(y,x,y)$$

- Appliquez à F les substitutions $\sigma_1 = \{y \leftarrow f(a)\}$, $\sigma_2 = \{x \leftarrow y\}$, (*) $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
- Transformez F pour la rendre plus lisible.

Exercice 4 (Calcul des prédicats)

Pour cet exercice on rappelle d'abord la syntaxe du calcul des prédicats dans la Figure 1.
On considère un ensemble de variables $\mathcal{X}$. Soit $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, f/1\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{p/0, q/1, r/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. On dénote par $|VI(t)|$ (resp. $|VI(A)|$) le nombre de variables libres du terme t (resp. de la formule A). Pour chaque symbole $\# \in \Sigma$, on dénote par $|t|_\#$ (resp. $|A|_\#$) le nombre de symboles # dans le terme t (resp. la formule A).

1. Donner trois exemples de termes et trois exemples d'atomes de ce langage. Puis dire quels sont *tous* les termes et *tous* les atomes de ce langage.
2. Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de toutes les formules A contenant exactement deux occurrences du symbole p, trois occurrences de q et une seule occurrence de r (pas de restriction pour les autres symboles). Donner deux formules différentes dans l'ensemble $\mathcal{S}$.
3. On change maintenant Σ_F à $\{f/1, g/2\}$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les termes correspondant à cette nouvelle signature. Montrer que pour tout terme t dans $\mathcal{T}$ on a $|VI(t)| \leq |t|_g + 1$. On raisonnera par induction sur la structure des termes.
4. On considère toujours $\Sigma_F = \{f/1, g/2\}$ mais maintenant $\Sigma_P = \{p/0, r/2\}$. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble de toutes les formules correspondant à cette nouvelle signature. Montrer que pour toute formule A dans $\mathcal{U}$ on a $|VI(A)| \leq 2|A|_r \cdot (|A|_g + 1)$. On raisonnera par induction sur la structure des formules.

Variables $\mathcal{X}$, symboles de fonction Σ_F, symboles de prédicats Σ_P, signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$.

Termes :

$$\frac{x \in \mathcal{X}}{x \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad f/n \in \Sigma_F}{f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

Atomes :

$$\frac{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad p/n \in \Sigma_P}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

Formules :

$$\frac{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{\neg A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \rightarrow B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \vee B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \wedge B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\forall x.A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\exists x.A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

FIGURE 1 – La syntaxe du calcul des prédicats