Université Paris Diderot - L3 Année 2018-2019

TD de Logique n$^{\mathrm{o}}$ 6

Calcul des prédicats - sémantique

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Exercice 1 (Interprétation) Soit $\Sigma_F = \{b/0, c/1\}$ et $\Sigma_P = \{q/1, r/2, p/3\}$. Considérons le domaine $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et l'interprétation $\mathcal{I}$ donnée par :

- $\mathcal{I}(b) = 2$,
- $\mathcal{I}(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$,
- $\mathcal{I}(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$,
- $\mathcal{I}(q) = D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $\mathcal{I}(r) = \{(2, 2)\}$.

Interprétez chacune des formules suivantes :

1. $q(x) \to r(x, x)$ avec la valuation $\sigma_1(x) = 1$, puis avec $\sigma_2(x) = 2$.
2. $\forall x.\ \big(q(x) \to r(x, x)\big)$ avec una valuation σ quelconque.
3. $\forall x.\ \neg p(x, c(x), y)$ avec la valuation $\sigma_1(y) = 1$, puis avec $\sigma_2(y) = 4$.
4. $\neg\big(\forall x.\ p(x, c(x), y)\big)$ avec la valuation $\sigma_1(y) = 1$, puis avec $\sigma_2(y) = 4$.
5. (*) $\big(\forall x.\ \forall y.\ r(x, y)\big) \wedge \big(\exists z.\ r(z, z)\big)$ avec une valuation σ quelconque.
6. (*)$\big(\exists x.\ p(x, x, x)\big) \vee \big(\forall y.\ \forall z.\ r(y, z)\big)$ avec une valuation σ quelconque.
7. $\big(\forall x.\ \forall y.\ r(b, b)\big) \to r\big(b, c(b)\big)$ avec une valuation σ quelconque.
8. $\exists x.\ \neg\big(q(x) \wedge r(x, x)\big)$ avec une valuation σ quelconque.
9. (*) $\exists x \left[\neg r(x, x) \wedge \Big(\big(\forall z.\ q(z)\big) \to p(x, c(x), c(c(x)))\Big)\right]$ avec une valuation σ quelconque.

Exercice 2 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacune des formules suivantes déterminez si elles sont satisfaisables, si elles ont un modèle, si elles sont valides ou non satisfaisables : (a et b sont des constantes et x, y et z sont des variables).

	(1)	$\forall x.\big((p(x) \vee \neg p(x)\big)$	$(*)$	(6)	$p(x) \vee q(x)$
$(*)$	(2)	$\forall x.\big(p(x) \to p(z)\big)$		(7)	$\neg p(y) \wedge \big(\exists y.\ p(y)\big)$
	(3)	$\forall x.\ \forall y.\big(p(x) \leftrightarrow \neg p(y)\big)$		(8)	$\exists x.\big(p(x) \to (p(a) \wedge p(b))\big)$
$(*)$	(4)	$p(x, x) \to \exists y.\ p(x, y)$	$(*)$	(9)	$\exists x \forall y.\ \big(\big(p(x) \vee p(y)\big) \to p(y)\big)$
$(*)$	(5)	$\exists y.\ p(x, y) \to p(x, x)$			

Donnez un exemple et un contre-exemple pour les formules qui sont satisfaisables mais n'ont pas de modèle ainsi que pour celles qui ont un modéle mais ne sont pas valides. Donnez une preuve pour les formules valides ou non satisfaisables.

Exercice 3 [*]**(Indépendance)** Soient les formules :

1. $F_1 \; = \; \forall x.p(x,x)$
2. $F_2 \; = \; \forall x.\forall y.\big(p(x,y) \rightarrow p(y,x)\big)$
3. $F_3 \; = \; \forall x.\forall y.\forall z.\Big[\big(p(x,y) \wedge p(y,z)\big) \rightarrow p(x,z)\Big]$

Montrez qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres en proposant une interprétation adéquate. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?

Exercice 4 (Modélisation) On prend comme domaine l'ensemble des robots de la planète Schtark, dans cette planète tout robot a un "juge", éventuellement lui-même qui sanctionne ses mauvaises actions. On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{\, j/1, \mathtt{rt}/0 \,\}$ où :

$j(x)$	dénote le "juge" de x ;
$\mathtt{rt}$	dénote le robot RT ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{\, p/1, r/1, c/2 \,\}$ où :

$p(x)$	" x est en panne " ;
$r(x)$	" x a des roues " ;
$c(x,y)$	" x comprend le langage de y ".

1. Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :
   (a) le juge de RT est en panne ;
   (b) les juges de tous les robots qui ont des roues sont en panne ;
   (c) tous les robots sans roue qui comprennent au moins un robot qui a des roues sont en panne ;
   (d) RT ne comprend pas tous les robots en panne.
2. Exprimez en français les formules suivantes
   (a) $\forall x.\ (r(x) \rightarrow p(x))$
   (b) $\exists x.\ (r(x) \wedge c(x,\mathtt{rt}))$
   (c) $\forall x.\ (c(x,j(x)) \rightarrow c(x,\mathtt{rt}))$
   (d) $\neg\exists.x\ c(x,j(\mathtt{rt}))$
3. On précise maintenant l'interpétation $\mathcal{I} = \langle D, I\rangle$ de l'énoncé de la manière suivante : Le domaine est $D = \{AX, BY, CZ, RT\}$ et la fonction I est donnée par :
   - $I(\mathtt{rt}) = RT$,
   - $I(j) = \{AX \mapsto CZ, BY \mapsto RT, CZ \mapsto CZ, RT \mapsto AX\}$,
   - $I(p) = \{BY\}$,
   - $I(r) = \{BY, CZ\}$,
   - $I(c) = \{(AX,AX),(AX,BY),(BY,CZ),(RT,CZ),(CZ,RT))\}$.

   Interprétez chacune des formules de la question 2. Puis interprétez les deux formules suivantes :

   (a) $\forall x.(r(x) \rightarrow \exists y.\ c(y,x))$
   (b) $\exists x.\ \big(p(x) \wedge (r(y) \rightarrow c(x,j(y))\big)$ avec les valuations pour y, $\sigma_1(y) = AX$ et $\sigma_2(y) = RT$