Université Paris Diderot - L3 Année 2018-2019

TD de Logique n° 7

Calcul des prédicats. Sémantique

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Exercice 1 (Validité) Montrez que :

1. $\exists y.\forall x.p(y,x) \models \forall x.\exists y.p(y,x)$
2. $\forall x.\exists y.p(y,x) \not\models \exists y.\forall x.p(y,x)$
3. (*) $p(x) \models \forall x.p(x)$. (fait en cours)
4. $\exists x.(A \to B) \equiv \forall x.A \to \exists x.B$
5. (*) $(\exists x.A) \vee B \equiv \exists x.(A \vee B)$ si $x \notin VI(B)$.
6. $\forall x.(A \vee B) \not\equiv (\forall x.A) \vee (\forall x.B)$
7. $\forall x.(q(y) \wedge p(x,y)) \equiv q(y) \wedge \forall x.p(x,y)$.

Exercice 2 (Symboles de fonction et égalité) Soit $\Sigma_F = \{f/2, g/1\}$ et $\Sigma_P = \{\doteq/2\}$, où $\doteq$ est le prédicat d'égalité.

- Donnez une interprétation naturelle pour le prédicat d'égalité.
- Pour chacune des formules suivantes, caractérisez les interprétations qui la satisfont :
  1. $\forall x.\forall y.\big((g(x) \doteq g(y)) \to (x \doteq y)\big)$
  2. $\forall y.\exists x.g(x) \doteq y$
  3. $\forall x.\exists y.g(x) \doteq y$
  4. $\forall x.\forall y.\forall z.\forall w.f(x,y) \doteq f(z,w)$
  5. $\forall x.\forall y.f(x,y) \doteq f(y,y)$
  6. $\forall x.\forall y.\exists z.f(x,y) \doteq f(z,y)$
  7. $\forall x.\forall y.\forall z.f(x,f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z)$

Exercice 3 Soit Σ une signature avec $\Sigma_P = \{\, p/2, q/1 \,\}$ et $\Sigma_F = \{\, a/0, f/1, g/2 \,\}$.
Soit $\mathcal{I}$ une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(f)(n) := n+1$, $\mathcal{I}(p)(n,m) :\Leftrightarrow (n = m)$. Pour chacun des ensembles de formules T suivants, complétez $\mathcal{I}$ de deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de T.

1. $T_1 = \{\, \forall x.\forall y.p(g(x,y), g(y,x)) \,\}$;
2. $T_2 = \{\, \exists x.q(x), \exists x.\neg q(x), \forall x.(q(x) \to q(f(f(x)))) \,\}$;
3. $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{\, \forall x.\forall y.\big[(q(x) \vee q(y) \to q(g(x,y))\big] \,\}$;
4. (*) $T_4 = \Big\{\forall x.\Big[q(x) \leftrightarrow \big[(\neg p(x,a) \wedge \neg p(x,f(a)) \wedge \forall y.\big(g(y,x) \to (p(y,f(a)) \vee p(y,x))\big)\big]\Big],$
   $\forall x.\forall y.\forall z.\big((g(x,y) \wedge g(y,z)) \to g(x,z)\big)\Big\}$.

   Indication : Il y a une solution qui utilise la relation de divisibilité.

Exercice 4 (*) (Équivalence) Soit $\Sigma_P = \{p/2\}$. Considérons les formules

$$A = \neg p(x, y) \qquad\qquad B = \neg p(x, z)$$

- Donnez les clôtures universelles A' et B' de A et B respectivement.
- Montrez $A' \equiv B'$.
- Donnez une formule C qui soit la clôture universelle de $A \leftrightarrow B$.
- Montrez que C n'est pas valide.

Exercice 5 (*) Soit A une formule telle que $x \in VI(A)$. On veut démontrer que « A valide implique $\{x \leftarrow u\}A$ valide».
On se donne un ensemble $\mathcal{X}$ de variables, Σ une signature, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $u \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ un terme, $\mathcal{I}$ une interprétation et σ une valuation.

1. Montrez que :

   « Pour tout terme $t \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $[\{x \leftarrow u\}t]_{\mathcal{I},\sigma} = [t]_{\mathcal{I},\sigma'}$ où $\sigma' = \sigma[x := [u]_{\mathcal{I},\sigma}]$.»

   Raisonnez par induction structurelle sur le terme t.
2. Montrez que :

   « Pour toute formule $B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $[\{x \leftarrow u\}B]_{\mathcal{I},\sigma} = [B]_{\mathcal{I},\sigma'}$ où $\sigma' = \sigma[x := [u]_{\mathcal{I},\sigma}]$.»

   Raisonnez par induction structurelle sur la formule B.
3. Déduisez-en le théorème de substitution : «Si $x \in VI(A)$ et A est valide, alors la formule $\{x \leftarrow u\}A$ est aussi valide pour tout terme $u \in T_{\Sigma,\mathcal{X}}$. »

Exercice 6 (* pour les plus motivés) (Validité et conséquence logique)
- Montrez que $\Delta \vdash B$ valide implique $\Delta \models B$.
- Montrez que $\Delta \models B$ n'implique pas $\Delta \vdash B$ valide. (On pourra s'inspirer de l'exercice 4.)