Université Paris Diderot - L3 Année 2018-2019

TD de Logique n$^{\mathrm{o}}$ 8

Déduction pour calcul des prédicats

Sur le cours Logique Informatique de `moodle`, vous trouverez l'application `edukera` qui vous permettra de faire des preuves en déduction naturelle pour le calcul des prédicats.

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Déduction naturelle

Exercice 1 (Quelques dérivations dans DN_{pred})
Pour chacun des séquents suivants, donnez sa dérivation dans DN_{pred} qui montre qu'il est valide.

1. (*) $\forall x.P(x) \vdash \exists x.P(x)$
2. $\vdash \forall x.(P(x) \land Q(x)) \to \forall x.P(x)$
3. $\neg(\exists x.\neg P(x)) \vdash \forall x.P(x)$

Exercice 2 Le raisonnement suivant est faux. Le montrer et expliquez où est l'erreur dans l'application des règles de la déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x.P(x) \vdash \exists x.P(x)}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\exists x.P(x), P(x) \vdash P(x)}\,\text{ax}}{\exists x.P(x), P(x) \vdash \forall x.P(x)}\,\forall\text{ i}}{\exists x.P(x) \vdash \forall x.P(x)}\,\exists\text{ e}$$

Gentzen

Exercice 3 (Quelques dérivations dans $\mathcal{G}$)
Prouvez les séquents suivants dans $\mathcal{G}$. Quelles réciproques vous paraissent valides ? Lesquelles sont seulement satisfaisables ?

1. $\forall x.P(x) \vdash \exists x.P(x)$
2. $\forall x.(P(x) \to Q(x)), P(a) \vdash Q(a)$
3. $\exists x.(P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x.P(x)$
4. $\forall x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall x.\forall y.P(y,x)$
5. $\vdash \exists x.(P(f(x)) \to P(x))$
6. (*) $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\exists x.P(x,y)$
7. (*) $\forall x.(P \lor Q(x)) \vdash P \lor \forall x.Q(x)$
8. (*) $\vdash \exists x.\exists y.(P(x,f(y)) \to P(f(x),y))$
9. $P(0), \forall x.(P(x) \to I(s(x))), \forall x.(I(x) \to P(s(x))) \vdash P(s(s(0)))$

Exercice 4 * Expliquez pourquoi le séquent $\vdash \exists x.((P(x) \to P(f(x))) \to P(g(x)))$ n'est pas dérivable dans le système $\mathcal{G}$. Que se passe-t'il si on essaye de faire une preuve ?

Exercice 5 (Correction) Énoncer et démontrer la correction de la règle $\exists g$ du système $\mathcal{G}$.

Exercice 6 (Réversibilité) Montrez que les règles $\forall g$, $\forall d$ du système $\mathcal{G}$ sont réversibles, i.e. une interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle pour la formule associée au séquent conclusion si et seulement si $\mathcal{I}$ est un modèle pour la formule associée à la prémisse.