Université Paris Diderot - L3 Année 2018–2019

TD de Logique n° 9

Unification

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Les règles de transformation pour l'unification

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \quad \text{(effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \quad \text{(orienter)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \quad \text{(décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \quad \text{(remplacer)}$$

Exercice 1 Soit $\Sigma_F = \{a/0, b/0, f/1, g/1, h/1, k/1, q/2, r/2, p/3\}$. Appliquez l'algorithme d'unification aux problèmes suivants :

1. $p(a, x, f(g(y))) \doteq p(z, f(z), f(u))$
2. $q(f(a), g(x)) \doteq q(y, y)$
3. $p(x, f(x), f(f(x))) \doteq p(f(f(y)), y, f(y))$
4. (*) $q(x, q(y, z)) \doteq q(x, g(h(k(x))))$
5. $q(x, r(u, x)) \doteq q(r(y, a), r(z, r(b, z)))$
6. (*) $p(x, f(x), r(f(x), x)) \doteq p(z, f(f(a)), r(f(r(a, z)), v))$
7. (*) $p(f(r(x, y)), r(v, w), y) \doteq p(f(z), x, f(x))$
8. (*) $p(f(y), f(z), f(t), f(x)) \doteq p(g(z), g(x), g(y), g(z))$

Exercice 2

1. Montrez que $\sigma_1 = \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow a, z \leftarrow t\}$ et $\sigma_2 = \{x \leftarrow f(t), y \leftarrow a, z \leftarrow y, t \leftarrow y\}$ sont égales à renommages près, i.e. que $\sigma_1 \sim \sigma_2$.
2. Soient $\sigma_1 = \{y \leftarrow f(x), z \leftarrow t, u \leftarrow w\}$ et $\sigma_2 = \{x \leftarrow z, y \leftarrow f(z), t \leftarrow z, w \leftarrow u\}$. A-t-on $\sigma_1 \leq \sigma_2$? A-t-on $\sigma_2 \leq \sigma_1$? A-t-on $\sigma_2 \sim \sigma_1$?

Exercice 3 (*) (Correction)

1. Montrez la correction de l'algorithme d'unification. Pour cela
   (a) Montrez que si on transforme un problème $\mathcal{P}$ en un problème $\mathcal{S}$, les unificateurs de $\mathcal{P}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{S}$. Vous raisonnerez par induction sur la longeur de la transformation.

   (b) Montrez également que si le problème $\mathcal{P}$ est en forme résolue, c'est bien l'unificateur principal de $\mathcal{P}$ qui est obtenu.

2. La condition de bord de la règle « orienter » est-elle nécessaire pour assurer la correction ?
3. Même question pour chacune des deux conditions de bord de la règle « remplacer ».

Exercice 4 (Terminaison)

Étant donné un problème d'unification $\mathcal{P}$, on associe à ce problème le triplet d'entiers $\mathrm{Comp}(\mathcal{P})$, décrit comme suit :

$$\langle \textit{nb. de variables non résolues}, \quad \textit{taille du problème}, \quad \textit{nb. d'équations } t \doteq x \rangle$$

où

- *nb. de variables non résolues* désigne le nombre de variables non résolues qui apparaissent dans le problème. Une variable x est résolue dans un problème si elle apparaît dans une équation $x \doteq t$ de ce problème, sans apparaître ni dans t ni dans aucune autre équation du problème.
- *taille du problème* désigne le nombre d'**occurences** total de variables et de symboles de fonctions qui apparaissent dans le problème (chaque occurrence d'un même symbole compte pour 1).
- *nb. d'équations* $t \doteq x$ désigne le nombre d'équations de la forme $t \doteq x$ où t n'est pas une variable, x une variable.

Par exemple, soit le problème $\mathcal{P} = \{x \doteq f(y), h(g(a)) \doteq h(z), z \doteq u\}$, où $\{a/0, f/1, g/1, h/1\}$ sont des symboles de fonctions, alors $\mathrm{Comp}(\mathcal{P}) = (3, 10, 0)$.
Remarquer que seule la variable x est résolue, en effet z apparaît dans l'équation $z \doteq u$ mais apparaît aussi dans la deuxième équation, et u est du mauvais côté de la troisième équation, quant à y il n'est évidemment pas résolu.

1. Soit le problème $\mathcal{P} = \{f(g(a), h(x, y)) \doteq f(x, h(z, g(b)))\}$ résolvez-le, et calculez pour chaque étape la fonction Comp correspondante.
2. On considère l'ordre lexicographique sur de tels triplets.
   (a) Montrez que pour toute transformation d'un problème $\mathcal{P}$ en un problème $\mathcal{S}$ différent, on a $\mathrm{Comp}(\mathcal{S}) < \mathrm{Comp}(\mathcal{P})$. La preuve se fera par induction sur la longueur de la transformation.
   (b) Concluez-en que l'algorithme d'unification termine.
3. La condition de bord de la règle « orienter » (qui impose que le membre gauche de l'équation à orienter n'est pas une variable) est-elle nécessaire pour assurer la terminaison ? Si oui, donnez un contre-exemple qui sans cette condition ne terminerait pas.
4. Même question pour chacune des deux conditions de bord de la règle « remplacer ».