

Preuves assistées par ordinateur – TD n° 10

Système T

Exercice 1 (Système T) On rappelle que le système T de Gödel est l'extension du λ -calcul simplement typé (à un seul type de base Nat) obtenue en ajoutant aux termes¹ :

- Des constantes $0 : \text{Nat}$ et $S : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ (les « constructeurs ») ;
- Pour chaque type simple τ , une constante $\text{rec}^\tau : \tau \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \tau \rightarrow \tau) \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \tau$ (le « récursur » associé au type τ) munie des règles de réduction :

$$\begin{aligned} \text{rec}^\tau x f 0 &\rightsquigarrow x \\ \text{rec}^\tau x f (S n) &\rightsquigarrow f n (\text{rec}^\tau x f n) \end{aligned}$$

1. Implémenter dans le système T l'addition, la multiplication, la fonction prédécesseur, le test de nullité, la fonction puissance et la factorielle.
2. Écrire dans le système T un terme $\text{ack} : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ qui implémente la fonction d'Ackermann définie par les équations :

$$\begin{aligned} \text{ack}(0, m) &= m + 1 && (m \geq 0) \\ \text{ack}(n, 0) &= \text{ack}(n - 1, 1) && (n > 0) \\ \text{ack}(n, m) &= \text{ack}(n - 1, \text{ack}(n, m - 1)) && (n, m > 0) \end{aligned}$$

1. En réalité, le système T comporte également des types produit ($\tau \times \sigma$) et somme ($\tau + \sigma$) munis des constructions associées au niveau des termes, mais nous n'en aurons pas besoin dans le cadre de cet exercice.