

Preuves assistées par ordinateur – TD n° 7

Théories et modèles

Exercice 1 (Indépendance-1) Soit $p(-, -)$ un symbole de prédicat d'arité 2. On considère les formules

$$\begin{aligned} R &\equiv \forall x \, p(x, x) \\ S &\equiv \forall x \, \forall y \, [p(x, y) \Rightarrow p(y, x)] \\ T &\equiv \forall x \, \forall y \, \forall z \, [p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)] \end{aligned}$$

Montrer que les formules R , S et T sont indépendantes, en ce sens qu'aucun des trois séquents $S, T \vdash R$, $R, T \vdash S$ et $R, S \vdash T$ n'est dérivable.

Exercice 2 (Extrait de l'examen de juin 2004)

On considère la théorie $\mathcal{T}$ (du premier ordre) dont la signature est formée par

- deux symboles de constante 0 et 1,
- un symbole de prédicat $<$ d'arité 2,

et dont les axiomes sont :

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & 0 < 1 \\ (A_2) \quad & \forall x \, \neg(x < x) \\ (A_3) \quad & \forall x \, \forall y \, \forall z \, (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z) \\ (A_4) \quad & \forall x \, \forall y \, [x < y \Rightarrow \exists z \, (x < z \wedge z < y)] \end{aligned}$$

1. Donner un modèle de $\mathcal{T}$. En déduire que $\mathcal{T}$ est cohérente.
2. Montrer que tout modèle de $\mathcal{T}$ est infini.
3. Montrer que pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, la théorie $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} - A_i$ (« $\mathcal{T}$ privée de l'axiome A_i ») admet en revanche un modèle fini. On exhibera un tel modèle pour chaque valeur de i .

Exercice 3 (Indépendance-2) Soit la signature formée par le symbole de constante 0, le symbole de fonction unaire s et le symbole de prédicat binaire $=$. Dans la théorie égalitaire induite par cette signature, montrer l'indépendance des axiomes de Peano :

- $\forall x \, \forall y \, [s(x) = s(y) \Rightarrow x = y]$
- $\forall x \, \neg[s(x) = 0]$
- $\forall x_1 \, \dots \, \forall x_n \, [A\{x := 0\} \wedge \forall x \, (A \Rightarrow A\{x := s(x)\}) \Rightarrow \forall x \, A]$
pour toute formule A telle que $FV(A) \subset \{x_1; \dots; x_n; x\}$

(Le principe de récurrence n'est pas réellement un axiome, mais un schéma d'axiomes.)

Exercice 4 (Théories égalitaires) Soit $\mathcal{T}$ une théorie égalitaire. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ est égalitaire lorsque le prédicat binaire d'égalité $=$ est interprété par la relation d'égalité dans le modèle, c'est-à-dire : $\llbracket t = u \rrbracket_\rho^\mathcal{M} = 1$ ssi $\llbracket t \rrbracket_\rho^\mathcal{M} = \llbracket u \rrbracket_\rho^\mathcal{M}$ (pour toute valuation ρ sur $\mathcal{M}$).

Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ d'une théorie égalitaire $\mathcal{T}$ peut être transformé en un modèle égalitaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{T}$. (On justifiera les différentes étapes de la construction de $\mathcal{M}'$.)

Exercice 5 (Isomorphisme de modèles) Soit Σ une signature.

1. Définir une notion d'isomorphisme entre deux Σ -modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.
2. En déduire que si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux Σ -modèles isomorphes, alors pour toute formule close A , on a $\mathcal{M}_1 \models A$ si et seulement si $\mathcal{M}_2 \models A$.

Exercice 6 (Modèles standard de l'arithmétique) À tout modèle égalitaire¹ $\mathcal{M}$ de l'arithmétique, on associe naturellement une application $\phi^\mathcal{M} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par

$$\phi^\mathcal{M}(n) = \llbracket \underbrace{s(\cdots s(0) \cdots)}_n \rrbracket^\mathcal{M}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\phi^\mathcal{M}$ est injective. Est-elle nécessairement surjective ?

On dit d'un modèle $\mathcal{M}$ de l'arithmétique qu'il est *standard* lorsque $\phi^\mathcal{M}$ est bijective.

2. Montrer que tous les modèles standard de l'arithmétique sont isomorphes.

Exercice 7 (Arithmétique non-standard) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_n$ l'extension de l'arithmétique obtenue en introduisant :

- Un nouveau symbole de constante ω ;
- Les n axiomes $\neg[\omega = 0], \neg[\omega = s(0)], \dots, \neg[\omega = \underbrace{s(\cdots s(0) \cdots)}_{n-1}]$

Enfin, on note $\mathcal{T}_\omega$ la théorie limite, obtenue en réunissant les axiomes des théories $\mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que chacune des théories $\mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) est cohérente.
2. Peut-on en déduire que $\mathcal{T}_\omega$ est cohérente ? Pourquoi ?
3. Dédire des deux questions précédentes que l'arithmétique admet un modèle non standard.

Précision : Dans cet exercice, on présuppose la cohérence de l'arithmétique.

1. On ne s'intéresse ici qu'aux modèles égalitaires de l'arithmétique.