Chapitre 1

Introduction

> “ Citons qu'un problème important non encore bien résolu est le problème de *l'étude axiomatique des systèmes de réécriture* indispensable pour ne pas avoir à répéter les constructions et les preuves pour chaque langage particulier. ”
>
> Gérard Berry en 1979, dans sa thèse de doctorat d'Etat.

Point de vue du sens, point de vue des objets

On calcule partout et de toutes les manières. On applique à l'exercice des formes très diverses qui dans leur variété répondent à un principe commun: la constitution d'un appareil de représentation du *sens*, ou réciproquement la proximité d'un sens à ses différentes *formulations*.

Observons par exemple le calcul des entiers au sein duquel le même sens, le même nombre *huit*, est exprimé selon plusieurs formulations: 8, $5+3$, 2^3, $\int_3^5 x\ dx$. Le calcul prend pour objet ces formulations, il instaure entre elles des lois de transformation, de *réécriture*. D'un sens qui lui-même reste identique chaque formulation transcrit une construction possible. Le nombre *huit* est à la fois élément de l'ensemble des entiers (8), la somme de cinq et de trois ($5+3$), le cube de deux (2^3), et le résultat de l'intégration entre trois et cinq de la fonction identité sur les réels ($\int_3^5 x\ dx$). Le signe égalité indique un même sens derrière les formulations multiples:

$$8 = 5+3 = 2^3 = \int_3^5 x\ dx$$

Selon l'occasion, une formulation ou une autre est privilégiée, soit qu'elle apparaisse plus simple, plus pratique, soit qu'elle mette une propriété en valeur. 8 est la formulation immédiate du nombre *huit*, $5+3$ montre qu'il est la somme de deux nombres premiers, 2^3 qu'il est une puissance de deux, $\int_3^5 x\ dx$ l'aire d'un certain trapèze. La forme factorisée du polynôme $(X+2)(X-1)$ en révèle les racines 1 et -2, et on préfère sa forme canonique (X^2+X-2) pour en calculer le polynôme dérivé: $2X+1$. L'objet compte ici avant tout comme médiation, il est la représentation plus ou moins adaptée d'une entité sur laquelle porte toute l'attention. Le point de vue est *sémantique*, il privilégie le sens. Quand on l'applique à des structures symboliques inédites, cette perspective pousse à la construction de modèles mathématiques. On rattache de la sorte chaque objet nouveau à un sens déjà connu, ou mieux accepté.

Le point de vue sémantique est classique, mais partiel. Les formulations d'une même entité ne se valent pas toutes, certaines sont plus utiles que d'autres et il faut savoir les obtenir. Souvent il est possible d'orienter les opérations de réécriture pour qu'une formulation soit transformée par étapes successives en cette meilleure formulation qu'on appelle le résultat du calcul. La flèche $\rightarrow$ de réécriture témoigne dans ce cas d'une approche *dynamique* qui privilégie les formulations et la mécanique de réécriture:

$$(3+1)\times 2 \rightarrow 4 \times 2 \rightarrow 8$$

Ce point de vue dynamique a été proposé par des logiciens qui voulaient démontrer des résultats méta-mathématiques de manière combinatoire. L'informatique l'a depuis repris à son compte, puisqu'il lui importe de calculer efficacement.

Ces deux approches sémantique et syntaxique d'un même sujet: le calcul, entretiennent à coup sûr des rapports encore imprévus, ce que démontre Pierre-Louis Curien [Cur 86] dans son analyse des Combinateurs Catégoriques. Chaque domaine tient néanmoins des positions sûres, comme les deux faces d'une même pièce de monnaie. Nous classons nos recherches sans hésiter dans la deuxième catégorie, le point de vue dynamique.

Point de vue des objets, point de vue des flèches

Le développement de la théorie dynamique de la réécriture est coordonné à l'étude du λ-calcul et des calculs dits du premier ordre. Ces systèmes sont *syntaxiques* : chaque objet du calcul est un assemblage de symboles qu'on peut écrire sur une feuille de papier ou inscrire dans la mémoire d'un ordinateur. Le calcul opère par transformation (*réductions*) sur la syntaxe des objets (*termes*) selon des *règles de réécriture*. Avec cette perspective, obtenir un résultat c'est trouver un objet sur lequel aucune règle ne peut plus être appliquée — objet qu'on déclare être en *forme normale*.

Les objets que nous étudierons ont une dynamique de réécriture complexe. Le λ-calcul permet de construire des *duplicateurs* comme la fonction $\Delta = (\lambda x.xx)$ qui copie son argument P:

$$(\lambda x.xx)P \rightarrow PP$$

Le λ-calcul permet aussi de construire des *effaceurs* comme $(\lambda x.a)$ qui n'utilise pas son argument P et l'efface:

$$(\lambda x.a)P \rightarrow a$$

Mis ensemble deux duplicateurs peuvent constituer des *boucles* comme par exemple:

$$\Delta\Delta = (\lambda x.xx)(\lambda y.yy) \rightarrow (\lambda x.xx)(\lambda y.yy) \rightarrow \ldots$$

Ainsi le λ-calcul contient des procédures qui ne terminent pas. Il arrive bien sûr qu'un effaceur élimine de telles procédures comme dans:

$$M = (\lambda x.\lambda y.x)a(\Delta\Delta) \rightarrow (\lambda x.a)(\Delta\Delta) \rightarrow a \qquad (1)$$

ce qui démontre qu'un objet du λ-calcul peut avoir un résultat sans que tous les calculs qui en dérivent soient finis. Il faut savoir bien calculer! Le calcul (1) de M aboutit alors que le calcul (2) qui réduit perpétuellement $\Delta\Delta$ n'atteind jamais la forme normale:

$$M = (\lambda x.\lambda y.x)a(\Delta\Delta) \rightarrow (\lambda x.\lambda y.x)a(\Delta\Delta) \rightarrow \ldots \qquad (2)$$

Pour bien calculer il faut trouver son chemin dans l'espace des flèches et ne pas naviguer comme (2) dans des calculs intermédiaires et inutiles. Et s'il s'agit de trouver son chemin c'est qu'il faut résoudre certaines questions d'orientation. Il nous faut une direction — c'est-à-dire une *stratégie* de calcul — qui trace le chemin judicieux du terme à sa forme normale (quand celle-ci existe) et nous y accompagne en un nombre fini d'étapes.

Cette direction n'existe pas toujours, mais elle existe parfois. Dans le λ-calcul il vaut mieux réduire à gauche dans la fonction qu'à droite dans l'argument: comme nous l'avons vu dans notre exemple le calcul mené ainsi aboutit. Malheureusement tous les formalismes ne bénéficient pas d'un principe d'orientation aussi clair. Nous qui voulons calculer dans des schémas de réécriture plus généraux devons comprendre quand une telle stratégie peut guider nos calculs. Ce qui pousse à constituer des classes de calcul très étendues — systèmes de réécriture combinatoire [Klo 80], extension avec des opérateurs associatifs commutatifs, systèmes de calcul d'action [Mil 94] — pour leur chercher un traitement uniforme. Le procédé a son avantage: une loi démontrée dans une classe peut être appliquée directement à tout système de réécriture qu'elle contient. En même temps, partir de schémas généraux prépare une spécialisation ultérieure en fonction de critères et d'usages: systèmes orthogonaux, systèmes stables, systèmes séquentiels, systèmes fortement séquentiels, voir [HL 79].

Un défaut de méthode limite pourtant ce type de constructions tentaculaires. Leur approche strictement formaliste de la réécriture veut résoudre des questions d'ordre dynamique (les flèches) à partir de la structure des termes (les objets). Le détour complique la tâche syntaxique et obscurcit les principes dynamiques. La limitation est théorique mais aussi technique: plus les objets sont compliqués, plus l'analyse coordonnée flèche/objet devient hasardeuse. Mieux vaut séparer la tâche théorique en deux et commencer par l'étude directe des réductions (les flèches). C'est à cet effet que les systèmes *abstraits* ont été introduits lorsqu'on a voulu étudier le λ-calcul. On sait décrire grâce à eux les structures de réduction sans faire l'hypothèse préalable d'une classe d'objets particulière. Les liens qu'on établit de la sorte entre les diverses propriétés de réduction sont très utiles: certaines propriétés dynamiques peuvent être démontrées abstraitement à partir de propriétés plus simples — déjà connues ou facilement vérifiables. Cela facilite d'autant le travail ultérieur mené sur les objets tout en dévoilant les mécanismes importants du calcul.

La théorie abstraite de la réécriture prend le point de vue des réductions pour y soumettre celui des objets. On reconnait dans ce renversement le mouvement opéré par la théorie des catégories au sein des mathématiques, [Mac 71][MM 92]. Un mot d'ordre pour cette école: étudier les mathématiques à partir des fonctions et de leurs rapports, regrouper plusieurs constructions et résultats ensemblistes sous les mêmes mécanismes entre morphismes, sous les mêmes diagrammes de flèches. La réussite de cette approche tient à sa capacité d'adaptation exemplaire. De nombreuses préoccupations mathématiques trouvent leur catégorie une fois repéré l'ajout de structure et d'hypothèse convenable. Certains champs mathématiques s'en sont trouvés profondément transformés. L'histoire de la réécriture abstraite est bien sûr moins riche, et plus courte. Nous voulons la retracer maintenant.

1.1 Histoire des systèmes abstraits

Trois étapes importantes ont marqué le développement des systèmes abstraits de réécriture. Vues a posteriori, chacune a été un moment dans la compréhension des mécanismes de confluence des systèmes de réécriture orthogonaux.

Newman: étapes de réduction

Le premier, Newman a eu l'idée de traiter les systèmes de réécriture dans leur généralité au lieu de s'intéresser à un système en particulier. Les calculs partagent certains traits dont il part pour bâtir ses structures et établir ses principes. Ainsi, chaque calcul dispose d'un ensemble d'objets que des procédures de réécriture transforment. En conséquence Newman [New 42] définit les système abstraits comme un ensemble $\mathcal{T}$ d'objets et une relation binaire $\rightarrow$ de réduction entre les objets; si a et b désignent des objets du calcul, $a \rightarrow b$ signifie que a peut être réduit en b en une *étape de réduction*. La présentation est simple et générale. Son introduction a ouvert l'étude des lois fondamentales du calcul: confluence, normalisation, inter-convertibilité — et permit d'établir une première *topographie* de leurs rapports.

Nous donnons un exemple. Un système est fortement normalisant (FN) lorsqu'aucun terme ne peut être réécrit successivement un nombre infini de fois. On écrit $a \rightarrow^+ b$ lorsque a peut être réécrit en b en plusieurs étapes de réduction. Un système est *confluent* (CR) lorsque deux termes b et c quels qu'ils soient qui proviennent d'un terme a par réductions successives: $a \rightarrow^+ b$ et $a \rightarrow^+ c$ peuvent être réécrit en un terme commun d: $b \rightarrow^+ d$, $c \rightarrow^+ d$. Un système est *localement confluent* (LCR) lorsque termes b et c en lesquels un terme a est réécrit en une étape: $a \rightarrow b$ et $a \rightarrow c$ peuvent être réécrit en un terme commun d: $b \rightarrow^+ d$, $c \rightarrow^+ d$. Pour résumer:

$$\begin{array}{ll} \rightarrow^+ \text{ est un ordre bien fondé} & \text{(FN)} \\ \forall a,b,c \in \mathcal{T}, (a \rightarrow^+ b \text{ et } a \rightarrow^+ c \Longrightarrow \exists d \in \mathcal{T},\ b \rightarrow^+ d \text{ et } c \rightarrow^+ d) & \text{(CR)} \\ \forall a,b,c \in \mathcal{T}, (a \rightarrow b \text{ et } a \rightarrow c \Longrightarrow \exists d \in \mathcal{T},\ b \rightarrow^+ d \text{ et } c \rightarrow^+ d) & \text{(LCR)} \end{array}$$

Le lemme de Newman [New 42] établit qu'un système à la fois fortement normalisant et localement confluent est confluent:

$$\text{(FN)+(LCR)} \Longrightarrow \text{(CR)}$$

Par exemple, le λ-calcul simplement typé qui est fortement normalisant FN et localement confluent LCR est aussi confluent CR.

Church: radicaux et résidus

Le lemme de Newman s'applique aux calculs fortement normalisants FN; par contre il n'assure pas la confluence CR du λ-calcul non typé qui n'est pas fortement normalisant comme l'a montré le λ-terme $\Delta\Delta = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ qui se réduit en lui-même:

$$\Delta\Delta \rightarrow \Delta\Delta$$

Church et Rosser font appel aux propriétés de copie du λ-calcul dans leur preuve de confluence [Chu 36]. Qu'entendent-ils par copie? Prenons la fonction identité $I = \lambda x.x$. Lorsque u et v désignent des réductions $IM \stackrel{u}{\rightarrow} M$ et $IM \stackrel{v}{\rightarrow} IN$, la réduction v peut être retardée et effectuée après la réduction u: $IM \stackrel{u}{\rightarrow} M \stackrel{v'}{\rightarrow} N$; symétriquement la réduction u peut être retardée et être effectuée après la réduction v: $IM \stackrel{v}{\rightarrow} IN \stackrel{u'}{\rightarrow} N$.

$$\begin{tikzcd} IM \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & M \arrow[d, "v'"] \\ IN \arrow[r, "u'"] & N \end{tikzcd}$$

En plus de transformer le λ-terme IM en un λ-terme M, la réduction $u : IM \rightarrow M$ associe à la réduction v une réduction v' qui lui correspond au départ de M — selon une procédure de report qu'on appelle *copie* de v par u. Il est possible de formaliser abtraitement cette intuition avec pour chaque étape de réduction $a \xrightarrow{u} b$ une relation de *résidu* $[\![u]\!]$ qui associe réductions à partir de a et réductions correspondantes à partir de b. Dans notre exemple, la réduction v' est résidu par u de la réduction v: $v[\![u]\!]v'$, et symétriquement la réduction u' est résidu par v de la réduction u: $u[\![v]\!]u'$.

Le modèle de Church est indispensable si on veut décrire les opérations de copie du λ-calcul. Le λ-terme $I(Ia)$ par exemple se réécrit en Ia de deux manières: par réduction du I de gauche $I(Ia) \xrightarrow{u} Ia$ ou par réduction du I de droite $I(Ia) \xrightarrow{v} Ia$. Le modèle de Newman identifierait les deux réductions sous une seule flèche $I(Ia) \rightarrow Ia$. On remarque pourtant que lorsque w désigne la réduction $Ia \xrightarrow{w} a$ alors u a pour résidu w par réduction de v, mais aucun par sa propre réduction, et symétriquement, v a pour résidu w par réduction de u, mais aucun par sa propre réduction. Il est donc impossible d'identifier les réductions u et v tout en décrivant les mécanismes de copie de $I(Ia)$. Church découvre donc avec Rosser [Chu 36] la notion de *radical*: les deux auteurs étiquettent les réductions par leur position dans le λ-terme de départ. Les radicaux u et v qui réduisent $I(Ia)$ en Ia sont distingués. La réécriture qui était une relation binaire pour Newman devient pour Church un graphe étiqueté avec loi de résidu.

Dans un calcul fondé sur la duplication comme l'est le λ-calcul le modèle de Church est étonnamment plus précis que celui de Newman. Les informations sur la duplication qu'il véhicule permettent de décomposer une fois encore la propriété de confluence CR en un diagramme local de confluence PERM et une propriété FD de terminaison forte, suivant le principe de Newman. Cette fois le théorème peut être appliqué au λ-calcul non typé car s'il ne termine pas fortement il vérifie néanmoins la propriété des développements finis FD. En effet la propriété de terminaison ne demande pas que le calcul entier termine mais seulement une classe de calculs régionaux, les *développements* d'ensembles de radicaux d'un même terme. Par exemple $\Delta\Delta$ ne contient qu'un seul radical u et le radical v qu'on réduit ensuite dans

$$\Delta\Delta \xrightarrow{u} \Delta\Delta \xrightarrow{v} \Delta\Delta \cdots$$

n'est le résidu par u d'aucun radical du terme initial.

Nous présenterons le diagramme de confluence local sous le nom de *diagramme de permutation* au chapitre 2, voir l'axiome PERM de permutation. D'abord Church et Rosser [Chu 36] implicitement puis Curry et Feys [Cur 58] et Hindley [Hin 78] explicitement montrent qu'un système qui combine le lemme des développements finis et le diagramme de permutation est confluent.

$$(\text{PERM}) + (\text{FD}) \Longrightarrow (\text{CR})$$

Le λ-calcul pur vérifie PERM et FD: les techniques abstraites savent donc expliquer la confluence du λ-calcul *non typé*. En plus de cela, le modèle de Church en précisant celui de Newman inaugure au moyen des résidus la *description* d'une dynamique de réécriture: duplication, création, effacement.

O'Donnell: des structures sur les radicaux

Contrairement à la normalisation forte FN le lemme des développements finis FD est une propriété souvent simple à démontrer. O'Donnell en donne [O'D 77] une démonstration générique dans le cadre des systèmes du premier ordre. Innocemment, il fait appel à une relation $<$ d'emboîtement entre radicaux qui lui permet de décrire les cas de duplication à partir de deux axiomes. Le premier axiome indique que si un radical v a plusieurs résidus par réduction de

u alors u emboite v. Le second assure que si deux résidus v' et w' de v et w sont emboités après réduction de u alors v et w sont eux aussi emboités. Ces deux axiomes sont simples et permettent de démontrer le lemme des développements finis FD dans un modèle de Church. La propriété FD est de la sorte rattachée à un comportement dynamique de l'emboitement particulier aux systèmes du premier ordre.

Mon travail a l'ambition de généraliser cette jolie idée pour démontrer des résultats plus difficiles. Supposons une propriété démontrée par des moyens syntaxiques dans un système particulier. Si on veut la démontrer dans un modèle abstrait il faut imposer aux flèches des contraintes qui sont déjà vérifiées *de fait* dans la syntaxe des termes. Chaque axiome nouveau explicite un peu plus la structure des termes nécessaire à la propriété. Cette reconstition "ex nihilo" soumet la réécriture à un traitement rigoureux de sa dynamique. Son point de vue strictement constructif dégage des propriétés syntaxiques jusque là négligées pour les placer à la source d'une propriété reconnue [1]. Parce qu'elle porte maintenant sur des relations d'emboîtement propres aux termes et non plus sur des propriétés de permutation ou de terminaison propres aux réductions, la théorie abstraite qui était partie des flèches peut revenir aux objets pour en présenter une image dépouillée.

Quelques belles découvertes sont à prévoir de ce retour. Un domaine reste à tracer entre flèches et objets. Un principe nous guidera au cours de cette étude: chaque relation et axiome de départ sera *local*, c'est-à-dire portera sur des radicaux et jamais sur une séquence de calcul. Au contraire les théorèmes que nous allons démontrer portent au contraire sur l'espace des réductions en sa globalité. En conséquence les résultats que nous prśentons aurons d'abord cette forme: la réduction de propriétés *globales* du calcul à une *structure locale* définie par les relations et axiomes importés. Forme sous laquelle se trouve déjà le résultat de O'Donnell:

$$\text{Relation d'emboitement "}<\text{" locale} \; + \; \text{Deux axiomes locaux} \implies \text{(FD)}$$

1.2 Résultats principaux

développements finis

Le lemme des développements finis tient une place privilégiée dans la théorie syntaxique. Hindley [Hin 78] considère qu'il se trouve caché derrière toutes les démonstrations de confluence du λ-calcul. Nous l'utiliserons dans la démonstration des théorèmes de standardisation et de normalisation forte. Il marque la première borne théorique à la puissance de copie des radicaux, puisqu'il interdit de réduire indéfiniment un ensemble fini de radicaux co-initiaux. Les réductions qui ne terminent pas doivent donc créer perpétuellement de nouveaux radicaux.

Le caractère très technique du lemme en avait fait le lieu de tous les exploits syntaxiques, au risque d'en rendre les démonstrations souvent obscures. Cette habitude risquait d'en rendre difficile la généralisation à d'autres systèmes, et il avait fallu la traduction par Jan Willem Klop d'un argument de Nederpelt [Ned 73] pour le démontrer sur les Systèmes à Réduction Combinatoire dans le cas orthogonal. Nous considérions donc le lemme comme un joli thème pour nos outils abstraits, et une épreuve intéressante.

O'Donnell a proposé une démonstration abstraite pour les systèmes du premier ordre, qui utilise l'ordre $<$ d'emboîtement sur les radicaux. La généralisation de sa méthode aux systèmes d'ordre supérieur semblait jusqu'ici difficile. Nous avons pu introduire une nouvelle relation $\ll$ d'*agrippement* sur les radicaux, qui coordonnée à la relation d'emboîtement permet de décrire

[1] Nous en rencontrerons un exemple avec l'axiome d'enclave du chapitre sur la standardisation.

de manière fine les mécanismes d'instantiation d'ordre supérieur. Nous montrons que le lemme des développements finis est la conséquence de ces mécanismes.

théorème de standardisation

Le théorème de standardisation indique que tout calcul $M \to^* N$ peut aussi être effectué d'une manière *standard*. Au départ théorème du λ-calcul, il en révèle l'orientation "gauche-droite": toute dérivation $M \overset{d}{\twoheadrightarrow} N$ à la forme normale N peut être transformée en une dérivation $M \overset{e}{\twoheadrightarrow} N$ standard "la plus exterieure-la plus à gauche" parce qu'elle réduit à chaque étape le radical le plus exterieur et le plus à gauche du λ-terme. Gérard Huet et Jean-Jacques Lévy [HL 79] étendent la propriété aux systèmes du premier ordre orthogonaux, Gérard Boudol [Bou 85] aux systèmes non orthogonaux. Cette fois-ci, l'orientation dépend des règles envisagées.

Le théorème de standardisation détermine une dérivation particulière dans l'espace des calculs. Jean-Jacques Lévy a proposé la permutation de radical pour identifier des dérivations essentiellement identiques: une relation $\equiv$ identifie "par permutation" deux dérivations aux mêmes opérations menées dans un ordre différent. Ces permutations sont toutes de la forme:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[rr, phantom, "\equiv"] & & N \\ & Q \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

où u et v sont des radicaux,
u et v ne forment pas de paire critique : $u \uparrow v$,
f développe les résidus de v par u: $f \propto v[\![u]\!]$
g développe les résidus de v par u: $g \propto u[\![v]\!]$

[Lév 78] démontre dans le cas du λ-calcul l'existence et l'unicité d'une dérivation standard dans chaque classe de permutation $\equiv$. Cette dérivation réduit à chaque étape le radical le plus externe et le plus à gauche parmi les radicaux qu'il reste à réduire. De la sorte, la dérivation

$$I(Ka(\Delta\Delta)) \to I((\lambda y.a)(\Delta\Delta)) \to Ia$$

où $I = \lambda x.x$, $K = \lambda xy.x$ et $\Delta = \lambda x.xx$ est standard. On retrouve la même propriété d'existence et d'unicité dans les systèmes du premier ordre orthogonaux [HL 79] et non orthogonaux [Bou 85].

Nous avons voulu traiter en une fois ces trois résultats de standardisation. Pour cela, nous orientons les permutations à la Lévy, en distinguant parmi ces permutations:

- les permutations *carrées* notées $\diamond$ qui intervertissent deux radicaux u et v disjoints et indépendants
- les permutations *standardisantes* notées $\angle$ qui permutent la réduction d'un radical intérieur v après la réduction du radical exterieur u.

Dans les cas du λ-calcul et des système du premier ordre, "standardiser une dérivation" est alors réinterprété en "la transformer par permutations standardisantes modulo permutations carrées". Chaque classe $\equiv$ hérite ainsi d'un préordre de standardisation $\trianglelefteq$ où les dérivations sont identifiées par permutations carrées et standardisées par permutations standardisantes. Ainsi une dérivation d peut être standardisée en une dérivation e de la même classe $\equiv$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, bend left, "d"] \arrow[r, bend right, "e"'] \arrow[r, phantom, "\triangledown"] & N \end{tikzcd}$$

Plus concrètement, dans le cas du λ-calcul par exemple:

$$\begin{tikzcd}
\Delta(Ia) \arrow[rr, "v"] \arrow[dd, "u"'] & {} \arrow[d, phantom, "\angle"] & \Delta a \arrow[dd, "u'"] \\
& a(Ia) \arrow[dr, "v_2'"] & \\
(Ia)(Ia) \arrow[ur, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & \diamond & aa \\
& (Ia)a \arrow[ur, "v_1'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
\Delta = \lambda x.xx \\
I = \lambda x.x \\
u[\![v]\!]u' \\
v[\![u]\!]v_1,\ v[\![u]\!]v_2 \\
v_1[\![v_2]\!]v_1',\ v_2[\![v_1]\!]v_2'
\end{array}$$

où les dérivations $u \cdot v_1 \cdot v_2'$ et $u \cdot v_2 \cdot v_1'$ sont aussi standards toutes les deux et plus standards que $v \cdot u'$. Nous démontrons — c'est notre théorème de standardisation — l'existence pour toute dérivation d'une forme normale unique (à permutations carrées près) selon ce processus, c'est-à-dire d'une dérivation *standard* qui lui est équivalente par permutations $\equiv$. Dans ce cas, pour $v \cdot u'$: $u \cdot v_1 \cdot v_2'$ ou $u \cdot v_2 \cdot v_1'$

Du point de vue abstrait: la relation $[\![\cdot]\!]$ avait permis de définir la relation $\equiv$ entre dérivations; une relation d'ordre $<$ nous permet de caractériser les permutations standardisantes et carrées. Pour démontrer le théorème nous introduisons quatre axiomes locaux qui régissent les rapports entre la relation de résidu $[\![\cdot]\!]$ et la relation d'emboîtement $<$. Le théorème de standardisation est la conséquence du jeu combinatoire entre $[\![\cdot]\!]$ et $<$ que structurent ces axiomes. Ce résultat n'était pas forcément prévisible: on pouvait croire qu'il faudrait plus d'information syntaxique que n'en procurent les radicaux, les résidus et les emboîtements pour démontrer le théorème de standardisation et réguler ainsi l'espace des dérivations. C'est finalement possible, et il est remarquable que notre quatrième et dernier axiome fasse appel pour cela à une version syntaxique de la notion sémantique de stabilité [Ber 79].

le λ-calcul avec substitutions explicites

Le $\lambda\sigma$-calcul a été introduit [ACCL 90] comme intermédiaire entre le λ-calcul et ses implémentations en machine. La taille d'un λ-terme peut augmenter de manière prodigieuse en quelques étapes de β-réduction, ce que savent éviter les implémentations grâce à un contrôle renforcé des substitutions: les fermetures. Le $\lambda\sigma$-calcul propose de décrire ces contrôles dans un formalisme proche du λ-calcul, où les substitutions apparaissent explicitement. Une *Beta*-règle simule la β-règle du λ-calcul et des σ-règles permettent de propager les substitutions à l'intérieur du terme. Les σ-règles de substitution sont fortement normalisables et confluentes. Un $\lambda\sigma$-terme est interprété par le λ-terme en lequel ces σ-règles le normalise.

Nous avons montré [Mel 95] que le $\lambda\sigma$-calcul simplement typé n'est pas fortement normalisable. Il existe dans le $\lambda\sigma$-calcul des réductions infinies de λ-termes simplement typés, fortement normalisables dans le λ-calcul. Ce résultat signale un écart non trivial entre le comportement du λ-calcul et celui du $\lambda\sigma$-calcul. Nous redonnons notre exemple en français.

Ce résultat nous a poussé à étudier le problème des stratégies de réduction dans le cadre non orthogonal du $\lambda\sigma$-calcul. On sait montrer à partir de Curry [Cur 58] que la stratégie externe est normalisante dans les systèmes orthogonaux. Nous définissons une notion de stratégie externe dans les calculs non-orthogonaux, ce qui nous permet ensuite de généraliser le résultat de Curry. La propriété de terminaison est rapportée à un critère de borne sur déterminisme des calculs — le ω-déterminisme — que vérifie tout calcul confluent pour lequel il n'existe d'un terme à sa forme normale (si elle existe) qu'un nombre fini de dérivations (à permutations $\equiv$ près). Ce nombre est 1 dans le cas du λ-calcul et des calculs orthogonaux. Nous revenos au $\lambda\sigma$-calcul pour démontrer que lui aussi vérifie la propriété qu'il existe au plus un nombre fini de classes de dérivations d'un $\lambda\sigma$-terme à sa forme normale. Une fois ce résultat démontré notre critère de terminaison peut s'appliquer: toutes les stratégies externes (ou nécessaires) du $\lambda\sigma$-calcul sont normalisantes.

théorème de normalisation forte des systèmes simplement typés

Nous exposons sous une forme nouvelle la démonstration combinatoire de normalisation forte du λ-calcul simplement typé due à van Daalen [vDa 77][Lév 78]. Nous suivons un argument de "plus petit contre-exemple" proche de la technique de preuve du théorème de Kruskal. Cette présentation est plus simple que celle de van Daalen et surtout peut être généralisée aux systèmes à étiquettes décroissantes en général. La nouveauté est de pouvoir traiter aussi les systèmes non orthogonaux pour lesquels aucune démonstration générale de normalisation forte n'avait été jusqu'ici proposée. Nous montrons que l'argument classique de décroissance de l'étiquetage sur les radicaux ne suffit pas à démontrer la normalisation forte. Nous montrons en particulier qu'un résultat de ce genre défendu par Jan Willem Klop [Klo 80] dans sa thèse est faux: nous construisons un contre-exemple. Puisque la dynamique des radicaux ne suffit plus à décrire un terme, nous introduisons une nouvelle notion: les *contextes λ-clos*. Ces contextes ont la propriété de ne lier aucune variable des termes qu'on y emboîte. Ils bénéficient d'une dynamique simple proche de celle des radicaux: on peut par exemple leur appliquer des lois de résidu ou d'emboîtement. Nous proposons avec eux un nouveau critère de "décroissance d'étiquetage" qui permet cette fois-ci de déduire la normalisation forte. Nous corrigeons ainsi le résultat de Klop et l'étendons avec un critère plus strict aux systèmes non déterministes.

Chapitre 2

Systèmes abstraits de réécriture

Plan du chapitre:

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes structures qui seront utilisées par la suite. Dans la section 2.1 sera fait un rappel des notions de *terme*, de *radical* et de *résidu*, puis des notions dérivées de *dérivation* et de *développement* d'un ensemble de radicaux coinitiaux, c'est-à-dire du calcul qui permet de réduire ces radicaux exactement. La section 2.2 introduit le premier de nos axiomes, l'axiome FD des *développements finis* qui certifie que tout développement d'un ensemble fini termine.

La section 2.3 caractérise les systèmes abstraits *orthogonaux* sont au moyen d'un deuxième axiome, l'axiome PERM de *confluence locale forte*. Cet axiome PERM rend possible la définition des *permutations* de radicaux et la constitution d'une relation d'équivalence $\equiv$ sur les dérivations. Deux dérivations équivalentes $\equiv$ par permutation effectuent le même calcul mais dans un ordre différent. Avec cette construction proposée par Berry et Lévy [BL 79], on interprète la propriété de confluence Church-Rosser comme une propriété structurelle de sup-treillis dans l'espace des dérivations quotienté par $\equiv$. Cette analyse offre le point de vue le plus élégant sur les mécanismes de confluence dans les systèmes orthogonaux.

La section 2.4 ouvre l'étude des systèmes avec paires critiques. Une *paire critique* est un couple de radicaux (u, v) qui ne vérifie pas nécessairement l'axiome PERM de confluence locale forte, ce qu'on écrit $u\#v$. Dans le cas contraire on dit que u et v sont compatibles, ce qu'on écrit alors $u \uparrow v$. La construction de la relation d'équivalence $\equiv$ peut être étendue aux systèmes avec paires critiques (non orthogonaux) en considérant uniquement les permutations de radicaux compatibles. Un système est orthogonal lorsque tous les radicaux sont compatibles. Dans le cas général d'un système non orthogonal l'espace des dérivations quotienté par $\equiv$ n'a plus la propriété de sup-treillis, à cause du non déterminisme des calculs.

Les résultats des sections 1—4 sont aujourd'hui classiques. On en trouve l'exposé dans [HL 79], [Lév 78], le chapitre 2 de [Ber 79] et le chapitre 11 du livre de Barendregt [Bar 80]. La section 2.4 sur les systèmes non orthogonaux reprend en grande partie le papier de Fontainebleau [Bou 85] par Boudol.

La section 2.5 nous est plus particulière. Introduire la relation binaire $\uparrow$ entre *radicaux com-*

patibles permet de généraliser la construction de $\equiv$ aux systèmes non orthogonaux. Pareillement, d'autres relations entre radicaux apparaitrons dans cette étude, relations qui en s'intégrant aux systèmes abstraits leur confère un pouvoir descriptif nouveau. Ainsi, au chapitre 3, une relation $\ll$ d'agrippement entre radicaux nous sert à démontrer la propriété des développements finis. Au chapitre 4, la relation $<$ d'emboîtement entre radicaux co-initiaux nous permet de démontrer le théorème de standardisation Au chapitre 6, nous utiliserons des relations d'emboîtement entre radicaux et contextes λ-clos pour démontrer le théorème de normalisation forte des systèmes simplement typés. Ainsi, l'introduction de structures simples permet de réinterpréter un à un les résultats majeurs de la théorie syntaxique. Cette thèse a pour enjeu de montrer les avantages autant théoriques que techniques de ce point de vue abstrait nouveau.

Nous terminons le chapitre par la présentation en section 2.6 de systèmes syntaxiques qui peuvent être décrits par nos structures abstraites.

2.1 Termes, radicaux, résidus

Systèmes abstraits: introduction

L'approche abstraite de la réécriture part d'une idée très simple selon laquelle *tout processus de réécriture opére sur des objets qu'il transforme en d'autres objets.* Pour réécrire il suffit de décider d'un ensemble $\mathcal{T}$ d'objets et d'une relation binaire $\rightarrow$ entre ces objets. C'est cette définition de *système abstrait de réécriture* que propose Newman dans son article de 1942. On appelle *termes* les objets de $\mathcal{T}$ et *étape de réduction* tout couple de termes (a, b) liés par $\rightarrow$, ce qu'on écrit $a \rightarrow b$. Un travail important [New 42][Hue 80] a été mené à partir de ce cadre en vue d'établir les premiers concepts généraux de la réécriture: confluence, normalisation, inter-convertibilité, et d'en repérer les rapports.

Le modèle de Newman est trop élémentaire cependant pour décrire les mécanismes de calcul. On sait depuis Church [Chu 41] qu'il faut parfois savoir distinguer deux manières différentes d'obtenir la même étape de réduction. Jean-Jacques Lévy donne un exemple très simple dans sa thèse: soit le λ-terme $I(Ia)$ où $I = \lambda x.x$ désigne l'identité. $I(Ia)$ se réduit en Ia de deux manières possibles, soit par réduction du premier I, soit par réduction du second. L'identification proposée par Newman entre les deux réductions empêche de suivre les effets d'une réduction d'un I sur l'autre: le I externe est conservé par réduction du I interne tandis qu'il est effacé par sa propre réduction. Il ne faut donc pas décrire les étapes de réduction mais les processus sous-jacents. Dans le cas du λ-calcul ces processus sont décrits simplement par la position, ou *occurrence*, qu'il occupe dans le λ-terme de départ. On donne ainsi le nom $(I(Ia), \epsilon)$ à la réduction du premier I dans $I(Ia)$, et $(I(Ia), \epsilon \cdot 2)$ à la réduction du second.

Nous dérivons de ces principes une nouvelle description abstraite, où l'espace de réécriture devient un graphe étiqueté qu'on définit par les ensembles $\mathcal{T}$ des termes (les sommets) et $\mathcal{R}$ des *radicaux* (les arcs). Deux fonctions $\partial_0 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T}$ et $\partial_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T}$ désignent respectivement les termes de départ et d'arrivée de chaque radical. On écrit $a \xrightarrow{r} b$ lorsque $a = \partial_0 r$ et $b = \partial_1 r$, et on dit que r est un radical de a lorsque $\partial_0 r = a$. On retrouve les modèles de Newman lorsque la fonction $\partial_0 \times \partial_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ est injective. On écrit que x a pour résidu y par réduction de r lorsque $x[\![r]\!]y$.

Cette complication du modèle de Newman nous permet de suivre les effets réciproques d'une réduction sur l'autre. On peut par exemple faire correspondre les calculs d'un λ-terme P avec ceux de chacune des ses copies P_1, P_2, P_3 obtenues par contraction du radical $(\lambda x.xxx)P \xrightarrow{r} P_1P_2P_3$. On relie ainsi par une relation $[\![r]\!]$ chaque radical u de P avec les radicaux u_1, u_2 et u_3 qui lui correspondent dans chaque P_i, ce qu'on écrit $u[\![r]\!]u_i$. Plus généralement on sait définir pour chaque radical $M \xrightarrow{r} N$ du λ-calcul une relation *résidu* $[\![r]\!]$ qui lie chaque radical u de M à ses copies v dans N, par $u[\![r]\!]v$. Nous traduisons cela dans les systèmes abstraits par l'existence pour chaque radical r d'une relation $[\![r]\!]$ entre les radicaux de $\partial_0 r$ et ceux de $\partial_1 r$.

On peut formaliser maintenant notre remarque initiale: le λ-terme $I(Ia)$ contient deux radicaux: $u = (I(Ia), \epsilon)$ qui réduit le premier I et $v = (I(Ia), \epsilon \cdot 2)$ qui réduit le second. Si w désigne le radical (unique) qui réduit $Ia \xrightarrow{w} a$, on obtient que $u[\![v]\!]w$ et $v[\![u]\!]w$ tandis que $u[\![u]\!]\emptyset$ et $v[\![v]\!] = \emptyset$, ce qui interdit l'identification de u et v. Une théorie des résidus serait interdite dans un modèle de Newman.

Nous donnons maintenant la définition de système abstrait de réécriture que nous garderons. Elle intègre notre construction des résidus.

Définition 2.1 *Un système abstrait de réécriture $\mathcal{D}$ est défini par:*

- *un ensemble $\mathcal{T}$ appelé l'ensemble de termes,*
- *un ensemble $\mathcal{R}$ appelé l'ensemble des radicaux,*
- *une fonction $\partial_0 : \mathcal{R} \to \mathcal{T}$ qui associe à chaque radical son terme initial (ou terme source),*
- *une fonction $\partial_1 : \mathcal{R} \to \mathcal{T}$ qui associe à chaque radical son terme d'arrivée (ou terme final),*
- *une fonction $[\![\cdot]\!] : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^2$ telle que si $x[\![r]\!]y$ alors $\partial_0 x = \partial_0 r$ et $\partial_0 y = \partial_1 r$. On dit que le radical x a pour résidu y par réduction de r lorsque $x[\![r]\!]y$.*

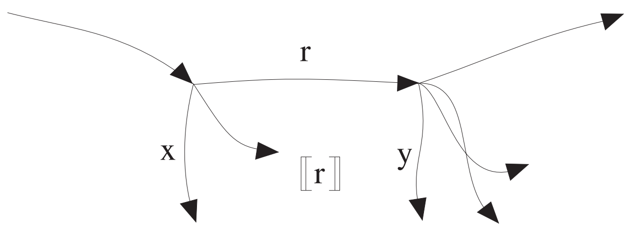


Figure 2.1: le radical x a pour résidu y par réduction de r lorsque $x[\![r]\!]y$

On peut donner une autre définition, équivalente:

Définition 2.1 *Un système abstrait de réécriture est un graphe tel qu'à chaque arc u correspond une relation $[\![u]\!]$ entre les arcs x qui partent de la source de u et les arcs x' qui partent de son arrivée. Les termes sont les sommets, les radicaux les arcs.*

On retrouve cette définition de système abstrait chez [Cur 58], [Hin 69], [O'D 77]. Church et Rosser emploient déjà implicitement la notion de résidu dans leur article de 1936.

Construction de l'espace des dérivations

Une fois le graphe de réduction introduit on peut en composer les arcs par concaténation et obtenir une catégorie, voir [Mac 71], dite la catégorie libre du graphe. Nous appelons *dérivation* les morphismes ainsi obtenus. Nous complétons cette construction classique par la définition de la relation induite $[\![d]\!]$ sur chaque dérivation $d = u_1 \cdots u_n$ obtenue par composition des $[\![u_i]\!]$.

Définition 2.2 (dérivations) *On appelle dérivation*

- *une séquence vide notée* id_a *et indicée par un terme* a*,*
- *une séquence finie* $(u_1, ..., u_n)$ *de radicaux tels que* $\forall i, \partial_0 u_{i+1} = \partial_1 u_i$.

On appelle longueur d'une dérivation la longueur de la séquence correspondante. Nous identifierons les radicaux avec les dérivations de longueur 1.

Définition 2.3 (∂_0, ∂_1) *On généralise les notions de terme initial* $\partial_0 d$ *et terme final* $\partial_1 d$ *aux dérivations* d*:*

- $\partial_0 \; id_a = a = \partial_1 \; id_a$,
- $\partial_0(u_1, ..., u_n) = \partial_0 u_1$,
- $\partial_1(u_1, ..., u_n) = \partial_1 u_n$.

Nous écrirons $d : a \twoheadrightarrow b$ *pour une dérivation* d *telle que* $a = \partial_0 d$ *et* $b = \partial_1 d$.

Définition 2.4 (composition) *Soit* d *et* e *deux dérivations qui vérifient* $\partial_1 d = \partial_0 e$. *On définit leur composition par concaténation de chaîne par:*

- $(u_1, ..., u_n) \cdot (v_1, ..., v_p) \triangleq (u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_p)$,
- $id_a \cdot e \triangleq e$,
- $d \cdot id_b \triangleq d$.

Lemme 2.5 *L'espace des dérivations armé de la composition et des dérivations vides forme une catégorie, la catégorie libre sur le graphe* $(\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1)$ *des termes et radicaux.*

La relation de résidu $[\![\cdot]\!]$ est définie maintenant pour chaque dérivation $d = u_1 \cdots u_n$ par la composition des relations $[\![u_i]\!]$, de telle façon qu'on puisse écrire dorénavant $x[\![d]\!]y$ pour des radicaux x et y.

Définition 2.6 (composition de deux relations) *Soit* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *trois ensembles. Soit* $\mathbf{R}$ *une relation entre les éléments de* $\mathbf{A}$ *et ceux de* $\mathbf{B}$, *et* $\mathbf{S}$ *une relation entre les éléments de* $\mathbf{B}$ *et ceux de* $\mathbf{C}$. *On définit la composition* $\mathbf{RS}$ *comme la relation qui suit entre des élements de* $\mathbf{A}$ *et des éléments de* $\mathbf{C}$*:*

$$a\mathbf{RS}c \iff (\exists b, a\mathbf{R}b \text{ et } b\mathbf{S}c)$$

Définition 2.7 (résidus de radicaux par une dérivation) *On associe à chaque dérivation* d *une relation* $[\![d]\!]$ *entre les radicaux de* $\partial_0 d$ *et ceux de* $\partial_1 d$ *définie par:*

- $[\![id_a]\!]$ *est l'identité sur les radicaux de* a*,*

- $[\![(u_1, ..., u_n)]\!] = [\![u_1]\!]...[\![u_n]\!]$

La composition de deux relations est associative. La construction des résidus qui précède respecte donc la composition des dérivations.

Lemme 2.8 $[\![d \cdot e]\!] = [\![d]\!][\![e]\!]$

Nous distinguerons parmi les termes ceux qui ne contiennent pas de radicaux. Ils constitueront l'ensemble des *résultats* possibles du calcul. D'autres choix sont possibles. Nous faisons ici le plus simple.

Définition 2.9 *On écrit $\mathcal{D}_a$ l'ensemble des dérivations dont a est le terme initial, et $\mathcal{R}_a$ l'ensemble des radicaux de $\mathcal{D}_a$.*

Définition 2.10 (forme normale, dérivation normalisante)

- *un terme a est en forme normale s'il ne contient pas de radical: $\mathcal{R}_a = \emptyset$.*
- *une dérivation d est normalisante lorsque son terme d'arrivée $\partial_1 d$ est en forme normale.*

Deux premiers petits axiomes

Deux hypothèses sur la relation $[\![\cdot]\!]$ de résidu nous éviterons des complications parasites. Tous les systèmes syntaxiques habituels les vérifient ; nous traiterons néanmoins de choix plus libéraux en appendice.

A. un radical n'a pas de résidu par lui-même Les résidus d'un radical u par r représentent ce qu'il reste du calcul de u après réduction de r. Il est donc naturel que r n'ait pas de résidu par sa propre réduction.

Petit axiome A (auto-réduction)**:** $\forall r \in \mathcal{R},\ \{u \mid r[\![r]\!]u\} = \emptyset$

B. Les radicaux n'ont qu'un nombre fini de résidus

Petit axiome B (nombre de résidus finis)**:** Si u et r sont deux radicaux coinitiaux alors $\{v \mid u[\![r]\!]v\}$ est fini.

Nous en tirons une propriété équivalente.

Lemme 2.11 *Soit U un ensemble fini de radicaux coinitiaux et $U' = \{v \mid \exists u \in U, u[\![r]\!]v\}$. Alors U' est un ensemble fini de radicaux coinitiaux.*

2.2 Axiome FD des développements finis

Nous venons de définir les radicaux et les dérivations (= suites finies de radicaux). Les radicaux ne produisent pas par résidus des dérivations directement mais des ensembles de radicaux qu'il faut savoir calculer, c'est-à-dire transcrire en dérivation.

Pour calculer un ensemble U de radicaux co-initiaux on commence par en choisir un élément u qu'on réduit. Prend position un nouvel ensemble $U[\![u]\!]$ de radicaux co-initiaux: les résidus par

u des radicaux de U. Si $U[\![u]\!]$ est vide le calcul de U s'arrête et continue sinon à partir de $U[\![u]\!]$. On fabrique ainsi étape par étape une séquence de radicaux tous résidus de radicaux de U, qu'on appelle un *développement* de U. Il existe plusieurs manière de développer U, suivant les radicaux qu'on choisit à chaque étape. Certains développements terminent, d'autres non. Les développements infinis sont les mauvaises transcriptions de U, qui n'arrivent pas à le *représenter* comme un calcul fini.

Définition 2.12 (ensemble pointé) *Un ensemble pointé est un couple (U, a) où U est un ensemble et a un terme dans $\mathcal{T}$. On écrit $u \in (U, a)$ pour $u \in U$. Un ensemble pointé (U, a) est appelé ensemble (pointé) de radicaux co-initiaux lorsque U ne contient que des radicaux de source a. On dit alors que a est le terme initial (ou source) de (U, a). Nous écrirons dans ce cas U_a pour (U, a). Nous utiliserons les symboles U, V, W et X pour désigner des ensembles pointés de radicaux co-initiaux.*

Définition 2.13 (résidus d'un ensemble pointé) *Soit U un ensemble pointé et d une dérivation de même source. On écrit:*

- $U[\![d]\!] \triangleq \{u', \exists u \in U, u[\![d]\!]u'\}_{\partial_1 d}$
- $[\![d]\!]U' \triangleq \{u, \exists u' \in U', u[\![d]\!]u'\}_{\partial_1 d}$
- $U[\![d]\!]U'$ *pour* $U' = U[\![d]\!]$.

Définition 2.14 (réduction relative, développement) *Soit U_a un ensemble pointé de radicaux coinitiaux. Les dérivations relatives à U_a sont définies par récurrence:*

1. *id_a est une réduction relative à U_a,*
2. *$d = e \cdot r$ est une réduction relative à U_a si et seulement si e est une réduction relative à U_a et $r \in U_a[\![e]\!]$.*

Un développement d de U_a est:

1. *soit une réduction relative à U maximale, c'est-à-dire une dérivation d telle que $U[\![d]\!] = \emptyset_b$ pour $b = \partial_1 d$. On écrit alors $d \propto U$.*
2. *soit une suite infinie de radicaux $u_1 \cdots u_n \cdots$ telle que pour tout entier i, $u_1 \cdots u_i$ soit une dérivation relative à U_a.*

Il existe dans le cas du λ-calcul un moyen très simple de calculer un ensemble de radicaux: réduire toujours le radical le plus à droite. Le nombre de radicaux à calculer diminue ainsi à chaque étape, ce qui force la terminaison. D'autres choix de réduction sont possibles, dont la terminaison est a priori incertaine. Certains radicaux peuvent en effet en dupliquer d'autres, ce qui augmente à certaines étapes le nombre de radicaux. Church et Rosser [Chu 36] ont montré la terminaison pour le λI-calcul quels que soient les choix, ce que Schroer [Sch 65], Hindley [Hin 78] et Hyland [Hyl 73] ont fait plus tard pour le λK-calcul. Klop a prouvé dans [Klo 80] que les Systèmes à Réduction Combinatoire orthogonaux vérifient aussi la propriété. Nous montrons dans le chapitre suivant que la propriété est en fait très généralement vérifiée par des systèmes orthogonaux ou non, et que les mécanismes qui l'amènent sont élémentaires. Ce résultat nous permet d'introduire la propriété dès maintenant, comme premier principe et axiome très général de nos systèmes abstraits:

Axiome FD Terminaison des développements
Soit U un ensemble pointé fini de radicaux de même source. Alors tous les développements de U sont finis (= dérivations).

Les systèmes abstraits du chapitre vérifieront dorénavant cet axiome FD de terminaison. L'axiome B nous permet de définir la profondeur d'un ensemble pointé fini de radicaux de même source.

Définition 2.15 (profondeur) *Soit U un ensemble pointé fini de radicaux coinitiaux. Il existe d'après le lemme de König une longueur maximale aux développements de U. On appelle profondeur de U cette longueur maximale.*

2.3 Les systèmes abstraits orthogonaux

On caractérise syntaxiquement les systèmes de réécriture orthogonaux par l'absence de paires critiques, dans le cas des systèmes du premier ordre [HL 79] ou des systèmes de réécriture combinatoire [Klo 80]. Nous remplacerons ce critère syntaxique dans les systèmes abstraits par un diagramme que nous dirons de *permutation*. Un système abstrait est orthogonal lorsque le diagramme de permutation est partout vérifié.

Nous donnons ici un contenu calculatoire aux ensembles finis de radicaux co-initiaux, contenu qui sera indépendent de leurs diverses transcriptions. Pour cela chaque choix de transcription (développement) de U doit être *réversible* de telle manière qu'aucune transcription ne se distingue véritablement des autres. Cette réversibilité est mise en œuvre par la permutation que nous introduisons dans les systèmes orthogonaux. Une permutation inverse l'ordre de réduction de deux radicaux mais ne change pas le contenu calculatoire des dérivations. Les dérivations qu'on identifie par permutations successives effectuent les mêmes calculs mais dans un ordre différent. Les classes d'équivalence $\equiv$ qu'on obtient par permutation correspondent chacune à un calcul *parallèle* dont chaque séquentialisation est une dérivation, les permutations permettant de passer dans la classe $\equiv$ d'un choix de séquentialisation à l'autre. Nous montrerons en particulier que tous les développements d'un ensemble fini U de radicaux co-initiaux sont équivalents par permutation. En ce sens chaque choix de transcription de U est réversible.

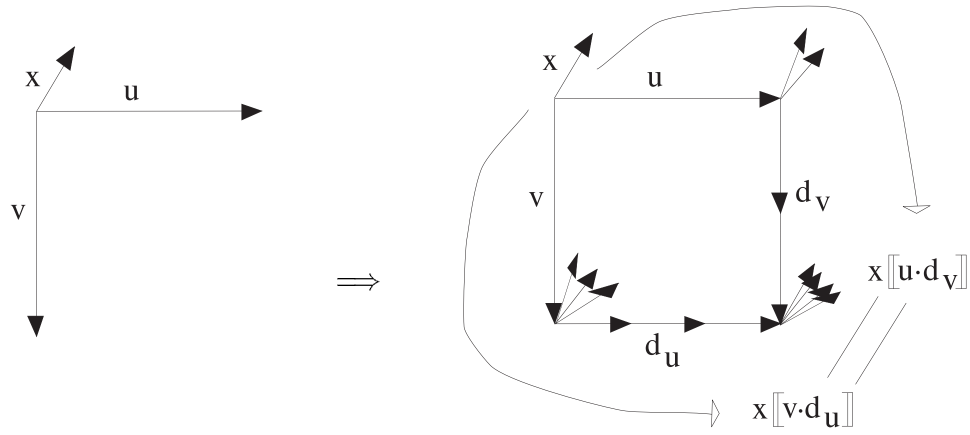
Nous montrons à l'aide des permutations qu'un système orthogonal est confluent (= Church-Rosser). La démonstration se déroule comme suit. Après avoir montré que les développements d'un ensemble fini de radicaux sont équivalents par permutation on construit les *multi-dérivations* qui réduisent à chaque étape (simultanément) un ensemble fini de radicaux coinitiaux. Cet espace des multi-dérivations généralise l'espace des dérivations de manière très souple puisqu'il en conserve les axiomes A, B, FD (développements finis) et PERM (orthogonalité). On peut y plonger l'espace des dérivations. L'introduction de l'espace des multi-dérivations est surtout technique. En effet on sait généraliser la notion de résidu aux multi-dérivations par une construction proposée par Lévy [Lév 78]. On dérive ensuite grâce au plongement la notion équivalente dans l'espace des dérivations. Nous terminons l'étude par la démonstration que chaque espace $\mathcal{D}_a$ quotienté par $\equiv$ est un sup-treillis.

2.3.1 Le diagramme de permutation

Le diagramme de permutation donne du sens à l'idée que les résidus d'un radical sont ce qu'il en reste après réduction d'un autre radical. Cet axiome vérifié il revient au même de réduire u puis les résidus $v[\![u]\!]$ de v par u, ou de réduire v puis les résidus $u[\![v]\!]$ de u par v: on aboutit au même terme des deux côtés en produisant la même relation de résidus.

On trouve déjà notre diagramme de permutation chez Curry qui l'introduit sous le nom d'axiome **D**, voir [Cur 58], et chez Klop qui l'appelle $WCR+$ dans sa thèse [Klo 80].

Axiome PERM Axiome de confluence locale forte (ou de permutation)
Soit u et v deux radicaux coinitiaux. Il existe d_u et d_v deux développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$ tels qu'ils terminent sur le même terme et induisent deux relations $[\![u]\!][\![d_v]\!]$ et $[\![v]\!][\![d_u]\!]$ identiques.



Avec l'axiome PERM les deux dérivations $u{\cdot}d_v$ et $v{\cdot}d_u$ effectuent le même calcul exactement. Il est donc possible d'identifier les dérivations à *permutation* de radicaux près: ce sont deux dérivations qui effectuent le même calcul mais dans un ordre de réduction différent.

Définition 2.16 (équivalence des dérivations) *Deux dérivations d et e sont dites équivalentes à une permutation près lorsque $d = d_1 \cdot u \cdot g \cdot d_2$ et $e = d_1 \cdot v \cdot f \cdot d_2$ avec f et g deux développements de $u[\![v]\!]$ et de $v[\![u]\!]$ qui vérifient les propriétés de l'axiome PERM.*

Définition 2.17 *On note $\equiv$ la clôture transitive réflexive de cette relation entre dérivation. On dira que deux dérivations d et e sont équivalentes lorsque $d \equiv e$.*

Comme il est prévisible, deux dérivations d et e équivalentes partent du même terme, terminent sur le même terme et induisent des relations de résidus $[\![d]\!]$ et $[\![e]\!]$ identiques.

Lemme 2.18 *Si $d \equiv e$ alors*

- $\partial_0 d = \partial_0 e$,
- $\partial_1 d = \partial_1 e$,

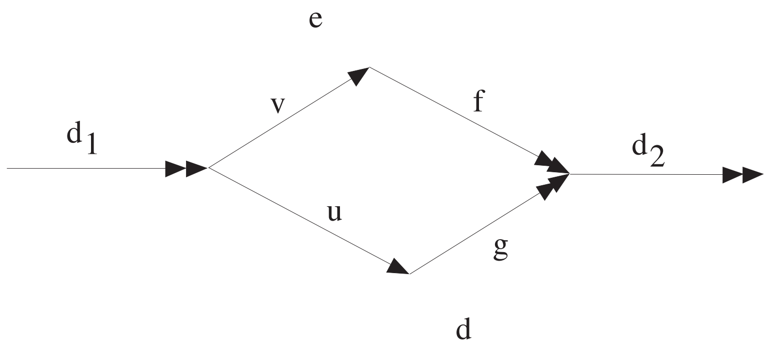


Figure 2.2: équivalence par permutations à la Lévy

- $[\![d]\!] = [\![e]\!]$.

Démonstration immédiate. □

La permutation de radical énonce un principe de réversibilité suffisant pour identifier tous les développements d'un ensemble U fini de radicaux co-initiaux.

Lemme 2.19 *Soit U un ensemble fini de radicaux coinitiaux et f et g deux développements de U. Alors $f \equiv g$.*

Démonstration: par récurrence sur la profondeur de U. Si f et g réduisent en premier le même radical u avec $f = u \cdot f'$ et $g = u \cdot g'$ alors par hypothèse de récurrence f' et g' sont équivalents et donc $f = u \cdot f' \equiv u \cdot g' = g$. Si f commence par u et g par v alors soit h_u et h_v deux développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$ définis dans le cadre de l'axiome PERM. On appelle h un développement de $U[\![u \cdot h_v]\!] = U[\![v \cdot h_u]\!]$. Cette dérivation h existe par l'axiome FD. Alors $h_v \cdot h$ est un développement de $U[\![v]\!]$ et donc par récurrence est équivalent à f' pour $f = u \cdot f'$. Symétriquement, $h_u \cdot h$ est un développement de $U[\![v]\!]$ et donc par récurrence est équivalent à g' avec $g = v \cdot g'$. En recollant nos deux résultats on obtient que $u \cdot f' \equiv u \cdot h_v \cdot h$ et $v \cdot g' \equiv v \cdot h_u \cdot h$ donc $f = u \cdot f' \equiv v \cdot g' = g$ du fait que $u \cdot h_v \equiv v \cdot h_u$ par définition de $\equiv$. □

L'axiome PERM impose qu'il existe des développements f et g de $u[\![v]\!]$ et de $v[\![u]\!]$ tels que $u \cdot g$ et $v \cdot f$ calculent identiquement. Le lemme 2.19 démontre à partir de cette hypothèse que *tous* les développements f' et g' de $u[\![v]\!]$ et de $v[\![u]\!]$ sont équivalents à f et g. Tous ces développements complètent correctement le diagramme de permutation. La définition 2.16 peut être transformée sans conséquence: tous les développements f' et g' de $u[\![v]\!]$ et de $v[\![u]\!]$ ferment correctement le diagramme de permutation $\equiv$.

2.3.2 Multi-dérivations, plongement Φ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$

Le lemme 2.19 montre que les développements de U terminent sur le même terme et induisent la même relation de résidu. Nous allons interpréter ce résultat et construire un système abstrait $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ où ces ensembles sont réduits en une seule étape, simultanément. Le contenu calculatoire d'une réduction de U dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ sera celui de ses développements dans $\mathcal{D}$.

Définition 2.20 *Nous appelons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des ensembles finis pointés de radicaux co-initiaux. L'ensemble $\mathfrak{M}^*$ désigne l'ensemble des éléments non vides de $\mathfrak{M}$.*

Définition 2.21 *Le système abstrait des multi-dérivations sur* $\mathcal{D} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!] \rangle$ *est défini par* $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}} = \langle \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{M}}, \partial_0^{\mathfrak{M}}, \partial_1^{\mathfrak{M}}, [\cdot] \rangle$ *où :*

- $\mathcal{T}^{\mathfrak{M}} = \mathcal{T}$,
- $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}}$ *est l'ensemble* $\mathfrak{M}^*$ *des ensembles pointés de radicaux co-initiaux finis non vides,*
- $\partial_0^{\mathfrak{M}} U$ *est* $\partial_0 f$ *pour* $f \propto U$,
- $\partial_1^{\mathfrak{M}} U$ *est* $\partial_1 f$ *pour* $f \propto U$,
- $[U]$ *est défini par:* $V[U]W \iff (V[\![f]\!]W$ *pour* $f \propto U$ *et* $W \neq \emptyset)$.

Nous appelerons multi-radical les ensembles non vides de $\mathfrak{M}$ *et multi-dérivations les dérivations construites sur* $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$.

Deux propriétés ont été nécessaires pour construire cet espace $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ à partir du système $\mathcal{D}$ orthogonal:

1. deux développements f et g de $U \in \mathfrak{M}$ ont même terme initial: $\partial_0 f = \partial_0 g$, même terme final: $\partial_1 f = \partial_1 g$, et même relation de résidu: $[\![f]\!] = [\![g]\!]$.
2. si $U \in \mathfrak{M}$ alors l'ensemble $U[\![r]\!]$ de ses résidus par un radical r co-initial se trouve aussi dans $\mathfrak{M}$, grâce à l'axiome B.L'ensemble $V[\![f]\!]$ se trouve donc dans $\mathfrak{M}$ lorsque V et f sont co-initiaux.

Le système abstrait $\mathcal{D}$ peut être plongé dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ en associant à chaque radical $r \in \mathcal{R}$ le multi-radical singleton $\{r\} \in \mathcal{R}^{\mathfrak{M}}$. Avec l'axiome A le radical r a le même terme d'arrivée que $\{r\}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ ce qui permet d'associer à une dérivation $d = u_1 \cdots u_n$ de $\mathcal{D}$ une multi-dérivation $D = \{u_1\} \cdots \{u_n\}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$. Pour terminer, on associe aux dérivations id_a et les multi-dérivations id_a dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$. Nous désignons par

$$\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$$

le plongement (fonctorial) ainsi défini. Remarquons que les deux relations de résidus $[\![\cdot]\!]$ et $[\cdot]$ se comportent de la même manière, la relation $[\![\cdot]\!]$ dans $\mathcal{D}$ et la relation $[\cdot]$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$. Ce qui se formalise comme suit:

Lemme 2.22 (lemme des deux résidus) *Soit* d *une dérivation.*

- $u[\![d]\!]v$ *si et seulement si* $(\{u\}[d]V$ *et* $v \in V)$,
- $U[d]V$ *si et seulement si* $(U[\![d]\!]V$ *et* $V \neq \emptyset)$ *(au sens de la définition 2.14).*

2.3.3 Multi-dérivations résidus

Nous montrons maintenant que $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ est un système abstrait orthogonal. Par définition, l'axiome A est vérifié:

$$\forall U \in \mathcal{R}^{\mathfrak{M}}, U[U] = \emptyset$$

L'espace de réduction $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ vérifie une propriété importante: aucun radical n'y duplique:

$$\forall U \in \mathcal{R}^{\mathfrak{M}}, U[V]U_1 \text{ et } U[V]U_2 \Rightarrow U_1 = U_2$$

Les axiomes B et FD sont donc vérifiés.

Pour faire de $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ un système orthogonal il suffit de montrer qu'il vérifie l'axiome PERM. La propriété a été décrite dans [HL 91] sous le nom de lemme des mouvements parallèles. Nous devons généraliser légèrement la relation $[\cdot]$ pour retrouver leur formulation originale — ce faisant nous procédons à la première étape d'extension de $[\cdot]$ aux multi-dérivations.

Soit $\mathfrak{M}_0$ l'ensemble des multi-dérivations suivantes

$$\mathfrak{M}_0 = \mathcal{R}^{\mathfrak{M}} \cup \{id_a | a \in \mathcal{T}\}$$

Nous généralisons $[\cdot]$ aux éléments de $\mathfrak{M}_0$ de telle façon que $\mathfrak{M}_0$ soit stable par résidu (ce que $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}^*$ n'est pas exactement).

Définition 2.23 (résidus des multi-dérivations de $\mathfrak{M}_0$) *L'ensemble $\mathfrak{M}_0$ est défini comme l'ensemble des multi-radicaux et des multi-dérivations vide: $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}} \cup \{id_a | a \in \mathcal{T}\}$. La relation $[\cdot]$ est généralisée à $\mathfrak{M}_0$ comme suit:*

- $id_a[id_a]id_a$,
- $id_a[U]id_b$ *pour* $\partial_0^{\mathfrak{M}} U = a$ *et* $\partial_1^{\mathfrak{M}} U = b$,
- $U[id_a]U$ *pour* $\partial_0^{\mathfrak{M}} U = a$,
- $U[V]id_a$ *pour* $U[V]$ *vide et* $a = \partial_1^{\mathfrak{M}} U$.

Le système $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ est orthogonal suivant le prochain lemme:

Lemme 2.24 (lemme des mouvements parallèles) *Soit U, V, U' et V' des éléments de $\mathfrak{M}_0$, c'est-à-dire des multi-radicaux ou des multi-dérivations vides, tels que $U[V]U'$ et $V[U]V'$. Alors $[U \cdot V'] = [V \cdot U']$.*

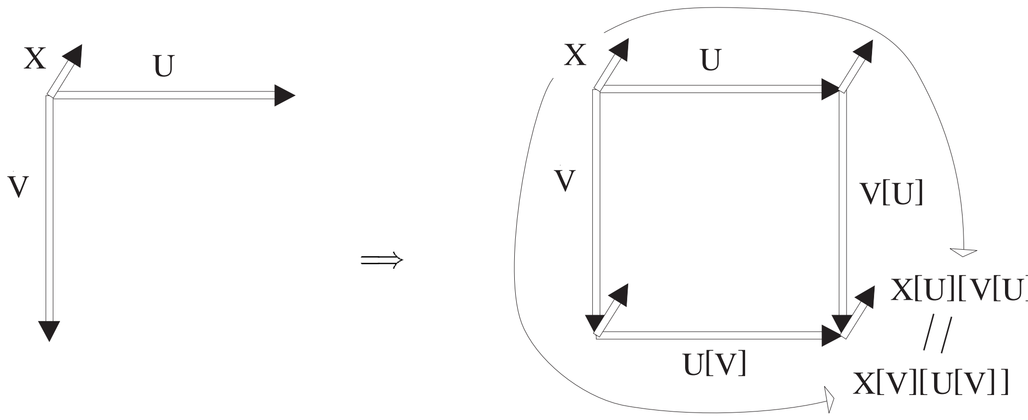


Figure 2.3: lemme des mouvements parallèles

Les multi-radicaux sont représntés dans nos diagrammes par les flèches épaisses et blanches de la figure 2.3.

Si un radical U du système abstrait $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ peut effacer un autre radical V, par contre il ne peut pas le dupliquer. Cette propriété de $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ permet que la relation de résidu $[\cdot]$ soit généralisée aux multi-dérivations, cela en deux étapes de construction. Nous donnons la définition proposée par Huet et Lévy [HL 79].

Définition 2.25 (résidus de multi-dérivation A) *Soit U un multi-radical et V un élément de $\mathfrak{M}_0$. On définit $(U \cdot D)[V]$ par récurrence sur la longueur de D:*

$$(U \cdot D)[V] = U[V] \cdot D[V[U]]$$

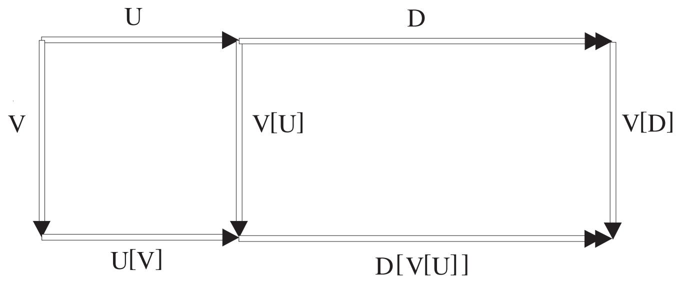


Figure 2.4: étape d'extension horizontale de $[\cdot]$

Définition 2.26 (résidus de multi-dérivation B) *Soit V un multi-radical et D une multi-dérivation co-initiales. On définit $D[V \cdot E]$ par récurrence sur la longueur de $V \cdot E$:*

$$D[V \cdot E] = D[V][E]$$

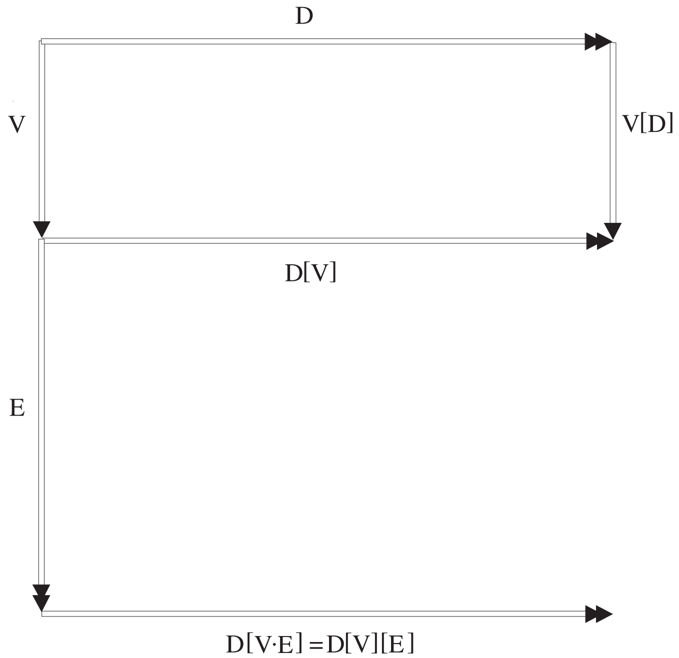


Figure 2.5: étape d'extension verticale de $[\cdot]$

Nous montrons que les schémas employés pour construire pas à pas $[\cdot]$ se généralisent aux multi-dérivations:

Lemme 2.27 (règles de décomposition des résidus) *Soit $D{\cdot}E$ et F deux multi-dérivations co-initiales. Alors*

- $(D \cdot E)[F] = D[F] \cdot E[F[D]]$,
- $F[D \cdot E] = F[D][E]$.

Démonstration: en trois étapes. Nous démontrons d'abord la deuxième assertion par récurrence sur la longueur de D. Si D est vide ou multi-radical alors la propriété correspond à la définition 2.26. Autrement, D s'écrit $U \cdot D'$ où $U \in \mathfrak{M}$:

$$\begin{array}{rll} F[D \cdot E] & = F[U \cdot D' \cdot E] & \\ & = F[U][D' \cdot E] & \text{par définition 2.26} \\ & = F[U][D'][E] & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = F[U \cdot D'][E] & \text{par la définition 2.26} \\ & = F[D][E] & \end{array}$$

Nous démontrons ensuite par récurrence sur la longueur de D que $(D \cdot E)[V] = D[V] \cdot E[V[D]]$ pour $V \in \mathfrak{M}_0$. Si $D = U \in \mathfrak{M}_0$ on obtient la définition 2.25. Sinon, D s'écrit $U \cdot D'$ avec $U \in \mathfrak{M}$.

$$\begin{array}{rll} D \cdot E[V] & = (U \cdot D' \cdot E)[V] & \\ & = U[V] \cdot (D' \cdot E)[V[U]] & \text{par définition 2.25} \\ & = U[V] \cdot (D'[V[U]]) \cdot (E[V[U][D']]) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = (U \cdot D')[V] \cdot (E[V[U][D']]) & \text{par définition 2.25} \\ & = (U \cdot D')[V] \cdot (E[V[U \cdot D']]) & \text{par la définition 2.26} \\ & = D[V] \cdot E[V[D]] & \end{array}$$

Nous terminons en montrant $(D \cdot E)[F] = D[F] \cdot E[F[D]]$ par récurrence sur la longueur de F. Lorsque $F = V \in \mathfrak{M}_0$, la propriété correspond au résultat précédent. Sinon, on peut écrire $F = V \cdot F'$, avec $V \in \mathfrak{M}$.

$$\begin{array}{rll} (D \cdot E)[V \cdot F'] & = (D \cdot E)[V][F'] & \text{par définition 2.26} \\ & = (D[V] \cdot E[V[D]])[F'] & \text{par le résultat précédent} \\ & = D[V][F'] \cdot (E[V[D]][F'[D[V]]]) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = (D[V \cdot F']) \cdot (E[V[D] \cdot F'[D[V]]]) & \text{par la définition 2.26} \\ & = D[V \cdot F'] \cdot (E[(V \cdot F')[D]]) & \text{avec la définition 2.25} \\ & = D[F] \cdot (E[F[D]]) & \end{array}$$

□

2.3.4 Résidus et permutations

Nous avons montré comment définir sur $\mathcal{D}$ une relation d'équivalence $\equiv$ sur les dérivations. La même construction peut être reprise telle quelle dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ parce que le système est orthogonal. L'opération de permutation sur les multi-radicaux suit le mécanisme décrit par le lemme 2.24 des mouvements parallèles.

Définition 2.28 (équivalence par permutations entre multi-dérivations) *Deux multi-dérivations D et E sont équivalentes à une permutation près, $D \equiv^1_{\mathfrak{M}} E$, lorsque $D = D_1 \cdot U \cdot G \cdot D_2$ et $E = E_1 \cdot V \cdot F \cdot E_2$ avec $F \in \mathfrak{M}_0$ et $G \in \mathfrak{M}_0$ tels que $U[V]F$ et $V[U]G$. On note $\equiv^{\leq 1}_{\mathfrak{M}}$ la clôture réflexive de $\equiv^1_{\mathfrak{M}}$, et $\equiv_{\mathfrak{M}}$ sa clôture transitive réflexive.*

Les lemmes qui suivent explicitent les rapports entre permutations et résidus $[\cdot]$. Les démonstrations en sont faciles mais techniques. Nous commençons par reprendre le lemme 2.18 dans le cadre des multi-dérivations:

Lemme 2.29 *Si $D \equiv_{\mathfrak{M}} E$ alors $\partial_0^{\mathfrak{M}} D = \partial_0^{\mathfrak{M}} E$, $\partial_1^{\mathfrak{M}} D = \partial_1^{\mathfrak{M}} E$ et $(U[D]V \iff U[E]V)$ pour $U, V \in \mathfrak{M}_0$.*

Démonstration: Les deux premiers résultats sont déduits directement du lemme 2.18. Soit un multi-radical U et une multi-dérivation D. On se trouve pour l'égalité en face de deux définitions concurrentes pour $U[D]$: celle qui provient de la définition 2.7 et qui est donc propre à tous les espaces de réécriture abstraits, et celle qu'amènent nos nouvelles définitions 2.25 et 2.26. La différence entre les deux notions est cependant mineure: $U[D] = \emptyset$ dans le premier cas est remplacé par $U[D] = id_b$ pour $b = \partial_1^{\mathfrak{M}} D$ dans le second. Par contre, $U[D]V \in \mathfrak{M}$ dans le premier sens équivaut à $U[D]V \in \mathfrak{M}$ dans le second. On peut donc reprendre le lemme 2.18 qui part du sens de la définition 2.7 pour affirmer que si $D \equiv E$ alors $U[D] = U[E]$ dans le sens des définitions 2.25 et 2.26, pour $U, V \in \mathfrak{M}_0$. □

Lemme 2.30 *Soit D, E et F trois multi-dérivations co-initiales. Alors $D \equiv_{\mathfrak{M}} E \Longrightarrow D[F] \equiv_{\mathfrak{M}} E[F]$.*

Démonstration: il suffit d'après la définition 2.26 de montrer que si $D \equiv^1_{\mathfrak{M}} E$ alors $D[W] \equiv^{\leq 1}_{\mathfrak{M}} E[W]$ pour $W \in \mathfrak{M}_0$ co-initial aux deux multi-dérivations D et E. On sait que les permutations élémentaires sont de la forme $U \cdot V' \equiv^1_{\mathfrak{M}} V \cdot U'$ où $U, V \in \mathfrak{M}$, $U', V' \in \mathfrak{M}_0$ et $U[V]U'$, $V[U]V'$. D'après la définition 2.26, il suffit pour prouver la propriété précédente de montrer que $(U \cdot V')[W] \equiv^{\leq 1}_{\mathfrak{M}} (V \cdot U')[W]$ où $W \in \mathfrak{M}_0$, $(U \cdot V')[W] = (V \cdot U')[W]$. Le cas $W = id_a$ est immédiat. Reste le cas d'un multi-radical W.

$$\begin{aligned}
(U \cdot V')[W] &= U[W] \cdot V'[W[U]] \\
&= U[W] \cdot V[U][W[U]] \\
&= U[W] \cdot (V[W])[U[W]] \quad \text{par le lemme 2.24 appliqué à } U \text{ et } W
\end{aligned}$$

et symétriquement:

$$\begin{aligned}
(V \cdot U')[W] &= V[W] \cdot U'[W[V]] \\
&= V[W] \cdot U[V][W[V]] \\
&= V[W] \cdot (U[W])[V[W]] \quad \text{par le lemme 2.24 appliqué à } V \text{ et } W
\end{aligned}$$

La permutation de U et de V devient donc par résidu de W la permutation de $U[W]$ et de $V[W]$. Permutation est entendue ici au sens large, puisque $U[W]id_b$ ou $V[W]id_b$ est possible. On obtient que $(U \cdot V')[W] \equiv^1_{\mathfrak{M}} (V \cdot U')[W]$, ou $(U \cdot V')[W] = (V \cdot U')[W]$ lorsque $U[W]$ ou $V[W]$ est vide. □

Lemme 2.31 *Soit D, E et F trois multi-dérivations co-initiales. Alors $D \equiv_{\mathfrak{M}} E \Longrightarrow F[D] = F[E]$.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de F. Le cas de $F = U \in \mathfrak{M}_0$ est traité par le lemme 2.29. Supposons que $F = U \cdot F'$ avec $U \in \mathfrak{M}$.

$$\begin{array}{rll} (U \cdot F')[D] & = U[D] \cdot (F'[D[U]]) & \text{d'après le lemme 2.27} \\ & = U[E] \cdot (F'[D[U]]) & \text{par le lemme 2.29} \\ & = U[E] \cdot (F'[E[U]]) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = (U \cdot F')[E] & \text{d'après le lemme précédent} \end{array}$$

□

Définition 2.32 (l'union de multi-dérivations) *On écrit $D \sqcup E$ la multi-dérivation $D \cdot E[D]$.*

Nous donnons ici un lemme équivalent au lemme du cube [HL 79], qui montre que l'union $\sqcup$ est commutative aux permutations $\equiv_{\mathfrak{M}}$ près.

Lemme 2.33 (lemme du cube) *Soit D, E deux multi-dérivations co-initiales. Alors $D \sqcup E \equiv_{\mathfrak{M}} E \sqcup D$.*

Démonstration: on montre d'abord par récurrence sur la longueur de E que $U \sqcup E \equiv_{\mathfrak{M}} E \sqcup U$ si $U \in \mathfrak{M}$. Les deux multi-dérivations forment un diagramme de permutation lorsque E est un multi-radical: $U \sqcup E \equiv_{\mathfrak{M}} E \sqcup U$ Si $E = V \cdot E'$ avec $V \in \mathfrak{M}$, alors:

$$\begin{array}{rll} (V \cdot E') \sqcup U & = V \cdot E' \cdot (U[V \cdot E']) & \\ & = V \cdot E' \cdot (U[V][E']) & \text{par définition 2.26} \\ & = V \cdot (E' \sqcup (U[V])) & \\ & \equiv_{\mathfrak{M}} V \cdot (U[V] \sqcup E') & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = V \cdot (U[V]) \cdot (E'[U[V]]) & \\ & \equiv^1_{\mathfrak{M}} U \cdot (V[U] \cdot (E'[U[V]])) & \\ & = U \cdot ((V \cdot E')[U]) & \text{par définition 2.25} \\ & = U \sqcup (V \cdot E') & \end{array}$$

Nous montrons maintenant que $D \sqcup E \equiv_{\mathfrak{M}} E \sqcup D$ par récurrence sur la longueur de D. Le cas $D = id_a$ est évident: $id_a \cup E = E \cup id_b$ pour $b = \partial_1 e$. Le cas $D \in \mathfrak{M}$ vient d'être traité. Reste le cas de $D = U \cdot D'$ où $U \in \mathfrak{M}$. Alors:

$$\begin{array}{rll} E \sqcup (U \cdot D) & = E \cdot ((U \cdot D)[E]) & \\ & = E \cdot (U[E] \cdot D[E[U]]) & \text{par le lemme 2.27} \\ & = (E \sqcup U) \cdot (D[E[U]]) & \\ & \equiv_{\mathfrak{M}} (U \sqcup E) \cdot (D[E[U]]) & \text{d'après le résultat précédent} \\ & = U \cdot E[U] \cdot (D[E[U]]) & \\ & = U \cdot (E[U] \sqcup D) & \\ & \equiv_{\mathfrak{M}} U \cdot (D \sqcup (E[U])) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = U \cdot D \cdot (E[U][D]) & \\ & = U \cdot D \cdot (E[U \cdot D]) & \\ & = (U \cdot D) \sqcup E & \end{array}$$

□

Le théorème 2.1 identifie les deux manières de définir une équivalence $\equiv_{\mathfrak{M}}$ sur les multi-dérivations: par permutation, ou au moyen des lois de résidus.

Théorème 2.1 *Deux multi-dérivations D et E co-initiales sont équivalentes $\equiv_{\mathfrak{M}}$ si et seulement si $F[D] = F[E]$ pour toute multi-dérivation F co-initiale à D et E.*

Démonstration: le sens ($\Longrightarrow$) correspond au lemme 2.31. Quant au sens ($\Longleftarrow$), on sait montrer par récurrence sur la longueur des dérivations que $D[D]$ et $E[E]$ sont vides: $D[D] = id_b$ et $E[E] = id_c$ pour $b = \partial_1^{\mathfrak{M}} D$ et $c = \partial_1^{\mathfrak{M}} E$. On déduit de $D[D] = id_b = D[E]$ que D et E ont le même terme d'arrivée: $b = c$. De là on obtient:

$$\begin{array}{lll} D & = D \cdot id_b & \text{pour } b = \partial_1^{\mathfrak{M}} D \\ & = D \cdot E[E] & \text{parce que } E = id_b \text{ pour } b = \partial_1^{\mathfrak{M}} E \\ & = D \cdot E[D] & \text{par nos hypothèses} \\ & = D \sqcup E & \end{array}$$

Symétriquement: $E = E \sqcup D$. Les deux multi-dérivations D et E sont équivalentes $\equiv_{\mathfrak{M}}$ d'après le lemme 2.33 du cube. □

Pour terminer l'étude de $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ nous démontrons que les ensembles $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}} / \equiv_{\mathfrak{M}}$ ont une structure de sup-treillis. Nous rappelons que les $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}}$ dénote l'ensemble des multi-dérivations de source a. Cette propriété de $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}} / \equiv_{\mathfrak{M}}$ correspond en terme catégorique à l'existence de coproduits fibrés ("pushouts") dans la catégorie $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}} / \equiv_{\mathfrak{M}}$.

Lemme 2.34 (associativité) *Soit D, E et F trois multi-dérivations co-initiales. Alors $(D \sqcup E) \sqcup F = D \sqcup (E \sqcup F)$.*

Démonstration:

$$\begin{array}{lll} (D \sqcup E) \sqcup F & = (D \sqcup E) \cdot (F[D \sqcup E]) & \\ & = (D \sqcup E) \cdot (F[E \sqcup D]) & \text{par le lemme du cube} \\ & = D \cdot (E[D]) \cdot (F[E \cdot D[E]]) & \\ & = D \cdot (E[D]) \cdot (F[E][D[E]]) & \\ & = D \cdot (E \cdot (F[E][D])) & \text{avec le lemme 2.27} \\ & = D \cdot (E \sqcup F)[D] & \\ & = D \sqcup (E \sqcup F) & \end{array}$$

□

Définition 2.35 *Soit D et E deux dérivations coinitiales. On écrit que $D \sqsubseteq E$ lorsqu'il existe une multi-dérivation D' telle que $D \cdot D' \equiv_{\mathfrak{M}} E$.*

Lemme 2.36 *Soit deux multi-dérivations D et E co-initiales. Alors $D \sqsubseteq E \iff D[E] = id_b$ pour $b = \partial_1^{\mathfrak{M}} E$.*

Démonstration: Supposons que $D \sqsubseteq E$. On sait qu'il existe D' tel que $D \cdot D' \equiv_{\mathfrak{M}} E$, équivalence qui devient par résidus par E: $(D \cdot D')[E] = id_b$ où $b = \partial_1^{\mathfrak{M}} E$. Le lemme 2.27 de décomposition nous donne que $(D \cdot D')[E] = (D[E]) \cdot D'[E[D]]$. Cela implique que $D[E] = id_b$ parce que id_b n'est équivalent $\equiv_{\mathfrak{M}}$ qu'à lui-même vue l'impossiblité d'introduire une permutation dans cette multi-dérivation. Supposons dans l'autre sens que $D[E] = id_b$. Le lemme du cube nous donne la solution: $D \sqcup E = D \cdot E[D] \equiv_{\mathfrak{M}} E \sqcup D = E$, et donc $D \sqsubseteq E$. □

Théorème 2.2 $\{\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}} / \equiv_{\mathfrak{M}}, \sqsubseteq, \sqcup\}$ *est un sup-treillis.*

Démonstration: nous rappelons que $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}}$ désigne l'ensemble des multi-dérivations de source a. Nous devons démontrer ici deux propriétés:
Tout d'abord, que $\sqsubseteq$ est un ordre sur $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}}/\equiv_{\mathfrak{M}}$. $D \sqsubseteq E \sqsubseteq D$ signifie qu'il existe D' tel que $D \cdot D' \equiv_{\mathfrak{M}} E$ et E' tel que $E \cdot E' \equiv_{\mathfrak{M}} D$. Donc $D \cdot D' \cdot E' \equiv_{\mathfrak{M}} D$, égalité qui devient après passage aux résidus par D: $D' \cdot E' \equiv_{\mathfrak{M}} id_a$, pour $a = \partial_1^{\mathfrak{M}} D$. Donc $D' = E' = id_a$ puisque id_a n'est équivalente $\equiv_{\mathfrak{M}}$ qu'à elle-même. Et donc $D \equiv E$.
Ensuite, que la classe $\equiv_{\mathfrak{M}}$ de $D \sqcup E$ correspond à une borne supérieure pour $\sqsubseteq$ des classes de D et de E. Tout d'abord, $D \sqsubseteq D \sqcup E$ et $E \sqsubseteq D \sqcup E$ grâce au lemme du cube. Supposons ensuite que $D \sqsubseteq F$ et $E \sqsubseteq F$, et calculons $(D \sqcup E)[F]$:

$$\begin{array}{rll}
(D \sqcup E)[F] & = (D \cdot E[D])[F] & \\
& = D[F] \cdot E[D][F[D]] & \text{par le lemme 2.27} \\
& = E[D][F[D]] & \text{parce que } D \sqsubseteq F \\
& = E[D \cdot (F[D])] & \text{par le lemme 2.27} \\
& = E[D \sqcup F] & \\
& = E[F \sqcup D] & \text{par le lemme du cube} \\
& = E[F][D[F]] & \text{par le lemme 2.27} \\
& = id_b & \text{parce que } E \sqsubseteq F
\end{array}$$

Donc $(D \sqcup E) \sqsubseteq F$ d'après le lemme 2.36, ce qui montre que la classe de $D \sqcup E$ est la borne supérieure des classes de D et de E. $\square$

2.3.5 Développement de $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ dans $\mathcal{D}$

Après avoir plongé (fonctorialement) l'espace $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ avec Φ nous montrons que cette projection est une rétraction, autrement dit qu'il existe une opération Ψ de $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ sur $\mathcal{D}$ telle que $\Psi \circ \Phi$ vaut l'identité de $\mathcal{D}$. Avec Ψ nous pourrons exporter dans $\mathcal{D}$ les définitions de résidus 2.25 et 2.26 et plus généralement la structure de sup-treillis de $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{M}}/\equiv$.
Pour construire

$$\Psi : \mathcal{D}^{\mathfrak{M}} \to \mathcal{D}$$

nous généralisons la procédure de développement des ensemble pointés de radicaux (= multi-radicaux) aux multi-dérivations.

Définition 2.37 (développement d'une multi-dérivation)

- *la dérivation id_a développe dans $\mathcal{D}$ la multi-dérivation id_a,*
- *la dérivation f développe dans $\mathcal{D}$ la multi-dérivation $D = U_1 \cdots U_n$ lorsque on peut l'écrire $f = f_1 \cdots f_n$ où $\forall i, f_i \propto U_i$. On écrit alors $f \propto D$.*

On peut choisir pour Ψ une fonction qui à chaque multi-dérivation D associe une dérivation $\Psi(D)$ qui développe D. Cette manière de construire n'implique pas que Ψ est fonctorial (c'est-à-dire que $\Psi(D \cdot E) = \Psi(D) \cdot \Psi(E)$ est toujours vérifié). Néanmoins, $\Psi \circ \Phi$ vaut bien l'identité sur $\mathcal{D}$:

$$\Psi(\Phi(r_1 \cdots r_k)) = \Psi(\{r_1\} \cdots \{r_k\}) = r_1 \cdots r_k$$

Nous avons montré au lemme 2.19 que tous les développements de $U \in \mathfrak{M}$ sont équivalents $\equiv$. Le même résultat s'applique à notre généralisation:

Lemme 2.38 *Soit D une multi-dérivation. Si $f \propto D$ et $g \propto D$ alors $f \equiv g$*

Démonstration: il faut remarquer que si $f \equiv f'$ et $g \equiv g'$ alors $f \cdot g \equiv f' \cdot g'$. La démonstration suit par récurrence sur la longueur de D. $\square$

Les deux résultats qui suivent éclaircissent le lien qui existe entre les relations $\equiv_{\mathfrak{M}}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ et $\equiv$ dans $\mathcal{D}$.

Lemme 2.39 (lemme des deux équivalences) *Soit D et E deux multi- dérivations et $d \propto D$, $e \propto E$ deux de leurs développements. Alors $D \equiv_{\mathfrak{M}} E \iff d \equiv e$.*

Lemme 2.40 (lemme de plongement)

- *si $d = u_1 \cdots u_n$ développe D alors $\Phi(d) = \{u_1\} \cdots \{u_n\}$ est équivalent $\equiv_{\mathfrak{M}}$ à D*
- *$d = u_1 \cdots u_n$ est équivalent $\equiv$ à $e = v_1 \cdots v_p$ si et seulement si $\Phi(d) = \{u_1\} \cdots \{u_n\}$ est équivalent $\equiv_{\mathfrak{M}}$ à $\Phi(e) = \{v_1\} \cdots \{v_p\}$.*

Démonstration des deux lemmes 2.39 et 2.40:
• lemme 2.39, sens $(\Longrightarrow)$: il suffit de montrer que lorsque $U, V \in \mathfrak{M}$, deux dérivations $d \propto U \cdot V[U]$ et $e \propto V \cdot U[V]$ sont équivalentes par $\equiv$. Toutes les deux sont des développements de l'ensemble $U \cup V$ de radicaux co-initiaux, et donc sont équivalentes d'après le lemme 2.19. $\square$

• première proposition du lemme 2.40: nous montrons que le multi-radical U est équivalent $\equiv_{\mathfrak{M}}$ au plongement $\Phi(d)$ de ses développements d dans $\mathcal{D}$. La démonstration se fait par récurrence sur la profondeur de U: soit $u \in U$, et V l'ensemble $U[\![u]\!]$. Si V est vide alors $U[\{u\}]id_b$ pour $b = \partial_1 u$, et donc $U \equiv_{\mathfrak{M}} \{u\} = \Phi(d)$. Si V n'est pas vide alors $U[\{u\}]V$ et $\{u\}[U] = id_b$ pour $b = \partial_1 U$ par définition de $[\cdot]$. Donc $\{u\} \cdot V \equiv^1_{\mathfrak{M}} U$. On sait que d s'écrit $u \cdot d'$ où d' développe V dans $\mathcal{D}$. Le plongement $\Phi(d')$ de d' est par hypothèse de récurrence équivalent $\equiv_{\mathfrak{M}}$ à V. Donc le plongement $\Phi(d) = \{u\} \cdot \Phi(d')$ de d dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ est équivalent $\equiv_{\mathfrak{M}}$ à $\{u\} \cdot V$, et donc à U. On traite ensuite très vite le cas des développements de multi-dérivations: si $d \propto D = U_1 \cdots U_n$, on peut écrire $d = d_1 \cdots d_n$ où $\forall i, d_i \propto D_i$. Donc $\Phi(d) = \Phi(d_1) \cdots \Phi(d_n) \equiv_{\mathfrak{M}} D_1 \cdots D_n = D$.

• deuxième proposition du lemme 2.40: pour démontrer le sens $(\Longrightarrow)$ nous montrerons qu'une permutation $u \cdot f \equiv^1 v \cdot g$ de radicaux correspond à une série de permutations dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$. La dérivation f développe $u[\![v]\!]$: son plongement $\Phi(f)$ est soit vide: id_b si $u[\![v]\!] = \emptyset$, soit équivalente $\equiv_{\mathfrak{M}}$ au multi-radical $u[\![v]\!]$, d'après la première proposition du lemme. Dans les deux cas, $\{u\} \cdot \Phi(f) \equiv_{\mathfrak{M}} \{u\} \cdot (\{u, v\}_a[\{u\}]) \equiv^{\leq 1}_{\mathfrak{M}} \{u, v\}_a$, et donc par symétrie: $\Phi(u \cdot f) \equiv_{\mathfrak{M}} \{u, v\}_a \equiv_{\mathfrak{M}} \Phi(v \cdot g)$. Prouver le sens $(\Longleftarrow)$ est immédiat grâce au lemme 2.39 pris dans le sens $(\Longrightarrow)$ déjà démontré. En effet, $d \propto \Phi(d)$, et donc si $\Phi(d) \equiv_{\mathfrak{M}} \Phi(e)$ alors $d \equiv e$.

• démonstration du sens $(\Longleftarrow)$ du lemme 2.39: si $d \propto D$ et $e \propto E$ alors $\Phi(d) \equiv_{\mathfrak{M}} D$ et $\Phi(e) \equiv_{\mathfrak{M}} E$ par le second point du lemme de plongement. Dans le cas où $d \equiv e$ alors $\Phi(d) \equiv_{\mathfrak{M}} \Phi(e)$ d'après le second point du lemme de plongement. Si $d \equiv e$ alors $\Phi(d) \equiv \Phi(e)$ d'après la première proposition de ce même lemme 2.40. Il en résulte que $D \equiv_{\mathfrak{M}} E$ par transitivité. $\square$
Le dernier des trois résultats explicite la propriété fondamentale de la construction de $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ et de $\equiv_{\mathfrak{M}}$.

Théorème 2.3 $(\mathcal{D}/\equiv) = (\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}/\equiv_{\mathfrak{M}})$

Démonstration: le plongement Φ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ préserve et reflète les classes d'équivalence par le lemme 2.39. On montre que Φ est surjective avec la première partie du lemme 2.40. $\square$

2.3.6 Deux corollaires: la confluence et la simplification

Nous identifierons d dans $\mathcal{D}$ avec son plongement $\Phi(d)$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$. Cette identification nous permet d'écrire: $d' \propto d[e]$ pour un développement d' de $\Phi(d)[\Phi(e)]$.

Théorème 2.4 (théorème de Church-Rosser) *Dans un système orthogonal, c'est-à-dire qui vérifie les axiomes A, B, FD et PERM: si d et e sont deux dérivations co-initiales alors il existe d' et e' telles que $d \cdot e' \equiv e \cdot d'$.*

Démonstration: il suffit de prendre $d' \propto d[e]$ et $e' \propto e[d]$. Alors $d \cdot e' \equiv d \sqcup e \equiv e \sqcup d \equiv e \cdot d'$. $\square$

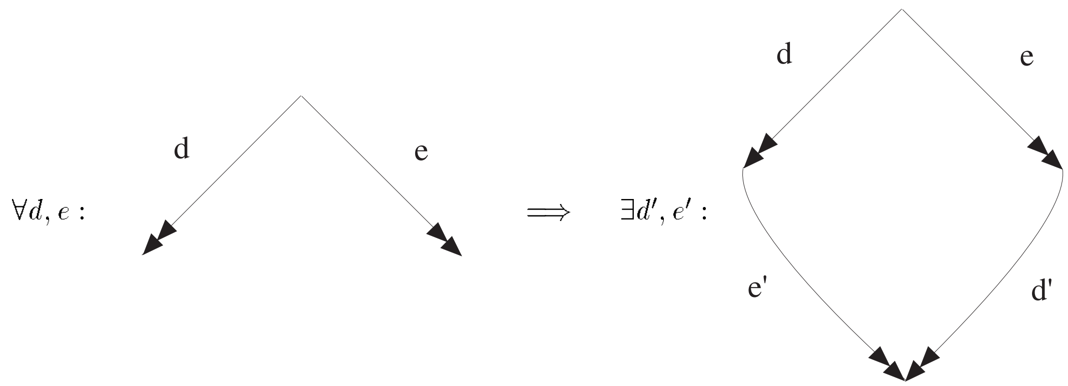


Figure 2.6: diagramme de confluence Church-Rosser

Nous dessinons les dérivations avec des flèches doubles, une extension graphique de notre notation $d : M \twoheadrightarrow P$.

Nous donnons ensuite le lemme de simplification[1] dont la démonstration dans les systèmes non orthogonaux fait appel au théorème de standardisation [Bou 85], voir le lemme 4.58.

Théorème 2.5 (lemme de simplification) *Dans un système orthogonal, c'est-à-dire qui vérifie les axiomes A, B, FD et PERM:*

$$d \cdot e \equiv d \cdot f \Rightarrow e \equiv f$$

Démonstration: $(d \cdot e)[d] = e$ et $(d \cdot f)[d] = f$, donc $e \equiv f$ si $d \cdot e \equiv d \cdot f$. $\square$

2.4 Systèmes avec paires critiques

Nous généralisons maintenant la construction de l'équivalence $\equiv$ par permutations aux systèmes non orthogonaux. Dans ces systèmes, certains couples de radicaux coinitiaux forment une *paire critique*, c'est-à-dire ne vérifient pas l'axiome PERM de permutation. Nous proposons la définition suivante:

Définition 2.41 (Système abstrait avec compatibilité) *Un système abstrait avec compatibilité est un couple $(\mathcal{D}, \uparrow)$ dans lequel $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ est un système abstrait de réécriture, et $\uparrow$ est une relation binaire* réflexive *sur l'ensemble $\mathcal{R}$ telle que:*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{R}^2, u \uparrow v \Rightarrow \partial_0 u = \partial_0 v$$

[1]Lemme qui catégoriquement signifie que toutes les morphismes de $\mathcal{D}/\equiv$ sont des “epis”.

Soit u et v deux radicaux. On dit que u et v sont compatibles lorsque $u \uparrow v$. Si u et v sont coinitiaux et non compatibles, on dit que u et v sont incompatibles, ce qu'on note $u \# v$. Dans ce dernier cas, on dit aussi que u et v forment une paire critique.

2.4.1 Relation d'équivalence

L'axiome PERM+ restreint l'application de l'axiome PERM aux paires $u \uparrow v$ compatibles:

Axiome PERM+ Axiome de permutation entre radicaux compatibles
Soit u et v deux radicaux coinitiaux et compatibles. Il existe alors d_u et d_v deux développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$ tels que:

1. d_u et d_v terminent sur le même terme b,

2. pour tout radical x tel que $x \uparrow u$ et $x \uparrow v$, on a pour tout radical y à partir de b:

$$x[\![u \cdot d_v]\!]y \iff x[\![v \cdot d_u]\!]y$$

De la même façon, nous adaptons l'axiome FD au cas non orthogonal.

Axiome FD+ Axiome des développements finis entre radicaux compatibles
Soit U un ensemble pointé fini de radicaux deux à deux compatibles: $\forall(u, v) \in U, u \uparrow v$. Alors tous les développements de U sont finis (= dérivations).

Nous reprenons la définition 2.15 dans le cadre non orthogonal des ensembles de radicaux deux à deux compatibles.

Définition 2.42 (profondeur) *Soit U un ensemble pointé fini de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles: $\forall(u, v) \in U^2, u \uparrow v$. Il existe d'après le lemme de König une longueur maximale aux développements de U. On appelle profondeur de U cette longueur maximale.*

Nous élargissons la construction de $\equiv$ par permutation de la section 2.3 aux systèmes avec compatibilité.

Définition 2.43 (équivalence des dérivations) *Deux dérivations d et e sont dites équivalentes à une permutation près lorsque $d = d_1 \cdot u \cdot g \cdot d_2$ et $e = d_1 \cdot v \cdot f \cdot d_2$ avec f et g deux développements de $u[\![v]\!]$ et de $v[\![u]\!]$ qui vérifient les propriétés de l'axiome PERM+.*

On note $\equiv$ la clôture transitive de cette relation entre dérivations. On dira que deux dérivations d et e sont équivalentes lorsque $d \equiv e$.

Nous reprenons la notation $\mathfrak{M}$ pour désigner ici l'ensemble des ensembles finis pointés de radicaux coinitiaux et deux à deux compatibles ; $\mathfrak{M}^*$ est l'ensemble des éléments non vides de $\mathfrak{M}$. L'axiome C force les résidus de radicaux compatibles à être eux-même compatibles. Cette propriété est très largement vérifiée par les systèmes non orthogonaux.

Petit axiome C (préservation des compatibilités): Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que $u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v'$. Si $r \uparrow u$ et $r \uparrow v$, alors $u \uparrow v \Longrightarrow u' \uparrow v'$.

Définition 2.44 (Système non orthogonal) *Nous appelons système non orthogonal un système avec compatibilité qui vérifie les axiomes A, B, C, FD+, et PERM+.*

Tout système orthogonal $\mathcal{D}$ est un système non orthogonal $(\mathcal{D}, \uparrow)$ dont la relation $\uparrow$ associe tous les radicaux u et v coinitiaux. Si U est élément de $\mathfrak{M}$, alors l'ensemble $U[\![u]\!]$ des résidus de U par réduction de $u \in U$, se trouve encore dans $\mathfrak{M}$. Cette propriété de stabilité par résidu permet de démontrer que les développements de U sont tous équivalents, comme il était montré en lemme 2.19 dans le cas orthogonal.

Lemme 2.45 *Soit U un élément de $\mathfrak{M}$ (= ensemble fini de radicaux deux à deux compatibles). Si d et e sont deux développements de U alors $d \equiv e$.*

Démonstration: similaire à la démonstration du lemme 2.19, en vérifiant bien que si $r \in U$ alors $U[\![r]\!] \in \mathfrak{M}$ grâce à l'axiome C. $\square$

Définition 2.46 (multi-radicaux compatibles) *Soit U et V deux éléments co-initiaux de $\mathfrak{M}$. On écrit $U \uparrow V$ lorsque $U \cup V \in \mathfrak{M}$, c'est-à-dire: $\forall u \in U, \forall v \in V,\ u \uparrow v$. Si V est le singleton $\{r\}$ on écrit aussi: $U \uparrow r$.*

Définition 2.47 *Soit U et V des éléments co-initiaux de $\mathfrak{M}$ et compatibles. Le lemme 2.45 permet de définir $U[\![V]\!]$ comme $U[\![d]\!]$ pour tout développement d de V. Et alors $U[\![V]\!] \in \mathfrak{M}$.*

Nous définissons l'espace des multi-dérivations de la même façon que dans le cas orthogonal, à l'aide cette fois-ci des éléments de $\mathfrak{M}^*$.

Définition 2.48 (Espace des multi-dérivations) *Le système abstrait des multi-dérivations sur $\mathcal{D} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!] \rangle$ est défini par $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}} = \langle \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{M}}, \partial_0^{\mathfrak{M}}, \partial_1^{\mathfrak{M}}, [\cdot] \rangle$ où :*

- $\mathcal{T}^{\mathfrak{M}} = \mathcal{T}$,
- $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}}$ *est l'ensemble $\mathfrak{M}^*$ des ensembles pointés co-initiaux non-vides de radicaux deux à deux compatibles,*
- $\partial_0^{\mathfrak{M}} U$ *est $\partial_0 f$ pour $f \propto U$,*
- $\partial_1^{\mathfrak{M}} U$ *est $\partial_1 f$ pour $f \propto U$,*
- $[U]$ *est défini par:*
  - *si $V \uparrow U$, alors $V[U]W$ lorsque $V[\![f]\!]W$ pour $f \propto U$ et $W \neq \emptyset$,*
  - *sinon V n'a pas de résidu par U, c'est-à-dire $V[U] = \emptyset$.*

Nous appelons multi-radicaux les ensembles non vides de $\mathfrak{M}$ et multi-dérivations les dérivations construites sur $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$.

Nous identifierons les dérivations $d = u_1 \cdots u_n$ avec la multi-dérivation $\Phi(d) = \{u_1\} \cdots \{u_n\}$ dans $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$. Certaines constructions de la section 2.3 sont encore possibles, lorsque les conditions de compatibilité suffisantes sont vérifiées. Nous nous limiterons à définir le résidu d'une multi-dérivation par un multi-radical, construction que nous utiliserons au chapitre 4.

Définition 2.49 (résidus des multi-dérivations de $\mathfrak{M}_0$) *L'ensemble $\mathfrak{M}_0$ est défini comme l'ensemble des multi-radicaux et des multi-dérivations vide: $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}} \cup \{id_a | a \in \mathcal{T}\}$. La relation $[\cdot]$ est généralisée à $\mathfrak{M}_0$ comme suit:*

- $id_a[id_a]id_a$,
- $id_a[U]id_b$ *lorsque* $\partial_0^{\mathfrak{M}} U = a$ *et* $\partial_1^{\mathfrak{M}} U = b$,
- $U[id_a]U$ *lorsque* $\partial_0^{\mathfrak{M}} U = a$,
- $U[V]id_a$ *lorsque* $U[V]$ *vide et* $a = \partial_1^{\mathfrak{M}} U$.

Définition 2.50 (multi-radical et multi-dérivation compatibles) *Soit U un ensemble de $\mathfrak{M}$ et D une multi-dérivation co-initiale. On définit $U \uparrow D$ par récurrence:*

- $U \uparrow id_a$
- $U \uparrow (V \cdot D)$ *si* $U \uparrow V$ *et* $U[\![V]\!] \uparrow D$,

Définition 2.51 (résidu d'une multi-dérivation par un multi-radical) *Soit U un élément de $\mathfrak{M}$ et D une multi-dérivation telle que $U \uparrow D$. On définit la multi-dérivation $D[U]$ par récurrence:*

- $id_a[U] = id_b$ *où* $b = \partial_1^{\mathfrak{M}} U$
- $(V \cdot D)[U] = V[U] \cdot D[U[V]]$

Définition 2.52 (développement dans $\mathcal{D}$ d'une multi-dérivation)

- *la dérivation id_a développe dans $\mathcal{D}$ la multi-dérivation id_a,*
- *la dérivation f développe dans $\mathcal{D}$ la multi-dérivation $D = U_1 \cdots U_n$ lorsque on peut l'écrire $f = f_1 \cdots f_n$ où $\forall i, f_i \propto U_i$. On écrit alors $f \propto D$.*

Lemme 2.53 *Soit $f \propto V$ un développement de V, et U un multi-radical tel que $U \uparrow V$. Alors $U \uparrow f$ et $g \propto f[U]$ est un développement de $V[\![U]\!]$.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de f. On se place dans les hypothèses du lemme: $U \uparrow V$, et $f \propto V$. On peut décomposer f qui développe V en $f = v \cdot f'$ où $v \in V$ et f' développe $V[\![v]\!]$. L'ensemble U et le radical v sont compatibles: $U \uparrow v$. Les ensembles $U[\![v]\!]$ et $V[\![v]\!]$ sont compatibles grâce à l'axiome C, tandis que f' développe $V[\![v]\!]$. Par récurrence sur la longueur de f, $f' \uparrow U[\![v]\!]$, et tout développement g' de $f'[\![U[\![v]\!]]\!]$ est un développement de l'ensemble $V[\![v]\!][\![U[\![v]\!]]\!]$. Les deux ensembles $U[\![v]\!]$ et $(U \cup \{v\})[\![v]\!]$ sont identiques d'après l'axiome A, d'où $V[\![v]\!][\![U[\![v]\!]]\!] = V[\![U \cup \{v\}]\!] = V[\![U]\!][\![v[\![U]\!]]\!]$. Une dérivation g qui développe $(v[U]) \cdot f'[U[v]]$ peut être décomposée en $g = g_1 \cdot g'$ où $g_1 \propto v[U]$ et $g' \propto f'[U[v]]$. La dérivation g_1 qui développe $v[U]$ développe $v[\![U]\!]$, et g' développe $V[\![U]\!][\![v[\![U]\!]]\!]$. La dérivation g développe donc $V[U]$, ce qui démontre le lemme 2.53 par récurrence. □

2.5 Structures sur les radicaux co-initiaux

Tout d'abord nous avons décrit les systèmes de réécriture comme des graphes muni d'une relation de résidu. Ensuite pour étudier les systèmes avec paires critiques nous avons adjoint au modèle une relation de compatibilité $\uparrow$ entre radicaux de même source.

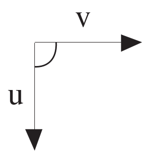
Nous poursuivrons notre thèse selon ce principe: enrichir le modèle initial d'une relation entre radicaux pour analyser des comportements considérés jusque là difficiles à abstraire: terminaison des développements finis, théorème de standardisation, normalisation des stratégies nécessaires, théorème de normalisation forte. Ces relations porteront de préférence sur des radicaux de même source cela pour simplifier la vérification des différents axiomes dans les cas concrets. Choisir des relations et des axiomes "locaux" — c'est-à-dire qui portent sur des radicaux coinitiaux ou résidus — c'est aussi apprendre quelles structure syntaxiques "concrètes" sont favorables à un bon calcul.

L'exemple le plus important de relation sur les radicaux est l'ordre d'emboîtement. Dans le λ-calcul ou les calculs du premier ordre, un radical u "contient" un radical v coinitial s'il intercepte le chemin de v à la racine. Cette relation est utile pour comprendre les rapports entre position dans le terme et duplication des calculs. Nous l'utiliserons dans les quatre études qui suivent ce chapitre: développements finis, standardisation, normalisation de stratégie, normalisation forte.

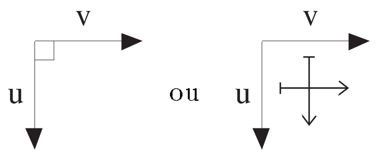
D'autres relations nous seront utiles pour analyser les mécanismes de réécriture sous-jacents les propriétés de développements finis et de normalisation forte. Certaines sont très belles. Nous les introduirons au fil des chapitres selon les besoins.

Nous profitons de l'occasion pour en énumérer quelque unes et prévenir des écritures que nous avons choisi, en particulier dans nos diagrammes.

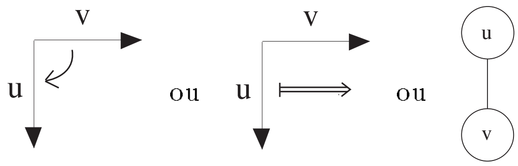
compatibilité: $u \uparrow v$



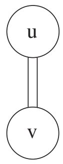
disjonction: $u \parallel v$



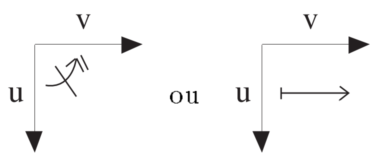
emboîtement: $u < v$



agrippement: $u \ll v$



non emboîtement: $v \not\leq u$



2.6 Appendice

2.6.1 Au lieu de l'axiome A

Un système est orthogonal s'il vérifie les axiomes A, B, FD et PERM. Nous proposons ici un axiome "PERM sans A" qui correspond à l'axiome PERM dans le cas de systèmes qui ne vérifient pas l'axiome A. Une technique permet de compléter tout système $\mathcal{D}$ qui vérifie cet axiome "PERM sans A" sans vérifier l'axiome A en un système $\mathcal{D}'$ qui vérifie les axiomes PERM et A, c'est-à-dire un système orthogonal.

Nous ferons l'hypothèse d'un système $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ qui vérifie les axiomes B, FD, et l'axiome suivant:

Axiome PERM sans A Confluence locale forte sans l'axiome A
Soit u et v deux radicaux coinitiaux. Il existe d_u et d_v deux dérivations relatives à $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$ qui terminent sur le même terme et induisent deux relations $[\![u]\!][\![d_v]\!]$ et $[\![v]\!][\![d_u]\!]$ identiques.

Soit un ensemble fini U de radicaux coinitiaux. On démontre facilement avec l'axiome FD et "PERM sans A" que tous les développements de U terminent sur le même terme et produisent la même loi de résidu.

Nous donnons maintenant notre mécanisme de complétion: soit $\mathcal{D}'$ le système de réécriture abstrait

$$\mathcal{D}' = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1', [\cdot]_m)$$

où

- $\partial_1' r$ est le terme d'arrivée de $d \propto \{r\}$: $\quad \partial_1' r = \partial_1\{r\}$,
- la relation $[\cdot]_m$ est définie par: $\quad x[r]_m x' \iff x[\![d]\!]x'$ pour $d \propto \{r\}$.

Un radical $r \in \mathcal{R}$ a donc des comportements différents dans $\mathcal{D}$ et dans $\mathcal{D}'$: grosso modo il se comporte dans $\mathcal{D}'$ comme un développement de $\{r\}$ dans $\mathcal{D}$.

Nous voulons montrer maintenant que le système $\mathcal{D}'$ est orthogonal. Il est facile de voir qu'il vérifie l'axiome A, puisque $r[r]_m s$ si et seulement si $r[\![d]\!]s$ pour s un développement de $\{r\}$. Nous démontrons que $\mathcal{D}'$ vérifie l'axiome PERM avec le prochain lemme.

Lemme 2.54 *Soit u et v deux radicaux coinitiaux. Il existe au sens de $\mathcal{D}'$ deux développements d_u de $u[v]_m$ et d_v de $v[u]_m$ qui terminent sur le même terme et induisent deux relations $[u]_m[d_v]_m$ et $[v]_m[d_u]_m$ identiques.*

Démonstration: toute dérivation f relative à $\{u, v\}$ dans $\mathcal{D}'$ peut être traduite en une dérivation $\widehat{f}$ relative à $\{u, v\}$ dans $\mathcal{D}$:

1. la traduction de id_a est id_a,
2. si $\widehat{f}$ traduit $f = r \cdot g$ alors $\widehat{f} = R \cdot \widehat{g}$ où R est n'importe quel développement de $\{r\}$ au sens de $\mathcal{D}$, et $\widehat{g}$ est une traduction de g.

La notion de résidu est préservé par traduction au sens que

$$x[f]_m y \iff x[\![\widehat{f}]\!]y$$

Tout développement de $\{u, v\}$ au sens de $\mathcal{D}'$ est donc traduit comme développement de $\{u, v\}$ au sens de $\mathcal{D}$. Puisque tous les développements de $\{u, v\}$ au sens de $\mathcal{D}$ terminent sur le même terme et induisent la même loi de résidu, il en est de même des développements de $\{u, v\}$ au sens de $\mathcal{D}'$. $\square$

En conséquence, le système $\mathcal{D}'$ est orthogonal, ce qui permet de définir les relations $\equiv'$ et $[\cdot]_m$ rencontrés en section 2.3. En particulier, le système $\mathcal{D}'$ est confluent. Nous pouvons en profiter pour démontrer que $\mathcal{D}$ lui-même est confluent au moyen d'une traduction simple, cette fois-ci de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$:

1. id_a est traduit en id_a,
2. la dérivation $r \cdot f$ dans $\mathcal{D}$ est traduite en $r \cdot \overline{f}[R]_m$ où R est l'ensemble des résidus de r par r dans $\mathcal{D}$: $R = r[\![r]\!]$ et $\overline{f}$ est une traduction de f dans $\mathcal{D}'$.

On démontre facilement que si f réduit a en b dans $\mathcal{D}$ et sa traduction $\overline{f}$ réduit a en c dans $\mathcal{D}'$ alors b peut être réduit en c dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Il s'en suit que $\mathcal{D}$ est confluent.

2.6.2 Au lieu de l'axiome B

L'axiome FD porte sur les ensembles finis de radicaux. Ce choix nous oblige à imposer que $x[\![r]\!]$ soit fini. Nous aurions pu éviter cet axiome B en introduisant une classe $\mathfrak{M}$ d'ensemble de radicaux coinitiaux tel que:

- $\mathfrak{M}$ contient tous les singletons $\{x\}$,
- si $U \in \mathfrak{M}$ et $V \in \mathfrak{M}$ avec $\partial_0 U = \partial_0 V$ alors $U \cup V \in \mathfrak{M}$,
- si $U \in \mathfrak{M}$ et $u \in U$ alors $U[\![u]\!] \in \mathfrak{M}$.

L'axiome FD serait remplacé alors par: Toute réduction relative à U est finie pour $U \in \mathfrak{M}$. On retrouverait alors sans difficulté la notion de profondeur d'un ensemble $U \in \mathfrak{M}$, une profondeur qui serait ordinale cette fois ci. On remarque qu'avec l'axiome B la classe des ensembles finis de radicaux coinitiaux vérifie les les propriétés demandées à $\mathfrak{M}$.

2.7 Exemples

Nous proposons dans cette section quelques exemples de systèmes de réécriture que décrit notre formalisme abstrait. Plutôt qu'imposer au lecteur une vérification formelle de chacun des axiomes, ce qui nécessiterait un travail à part, nous donnons des indications précises sur la méthode à suivre. Nous espérons éclairer ainsi l'interface trop peu étudiée qui sépare les approches syntaxiques et abstraites de la théorie du calcul.

2.7.1 Le $\lambda\sigma$-calcul et les systèmes du premier ordre

Nous renvoyons le lecteur à [Klo 92], [HL 91], [Bou 85] ou [Mar 92] pour la définition formelle des systèmes du premier ordre. Chez tous ces auteurs une "traduction canonique" permet de passer d'un système syntaxique du premier ordre à son système abstrait canonique[2]. Quel que soit le système de réécriture du premier ordre, la description canonique vérifie les axiomes A, B, C, PERM de permutation et FD de développements finis tels que nous les avons introduits précédemment.

- les axiomes A, B sont triviaux,
- l'axiome C est démontré dans [Bou 85], lemme 3.2.
- l'axiome des développements finis sera prouvé dans le prochain chapitre, à la façon de O'Donnel.
- on trouve l'axiome de permutation dans [HL 91][Mar 92], et pour le cas non orthogonal dans [Bou 85], lemme 3.3.

Ces résultats généraux sont précieux: ils s'appliquent par exemple au $\lambda\sigma$-calcul — voir le chapitre 5 — qui est un calcul du premier ordre. La plupart de ces résultats sont démontrés une nouvelle fois dans un cadre plus g'en'eral lors de l'étude des Systèmes à Réduction Combinatoire (CRS) en chapitre 7, une classe dont font partie les systèmes du premier ordre.

[2]Pour une traduction non canonique, voir la section 2.7.7 au sujet du "Ou Parallèle".

2.7.2 Le λ-calcul et ses trois ordres

Le λ-calcul est le calcul des fonctions. Nous ne ferons ici que l'introduire. Ses termes sont construits par récurrence structurale à partir d'un ensemble Var de variables:

$$M = x \in \mathsf{Var} \mid \lambda x.M \mid MN$$

Les termes sont identifiés à α-conversion près, par exemple $(\lambda x.xx) \sim_\alpha (\lambda y.yy)$ — nous appelerons α-termes ces classes $\sim_\alpha$. Une variable x est dite liée dans M quand on trouve un "lieur" λx au dessus d'elle ; elle est libre quand elle n'apparaît pas liée.

La règle d'application d'un terme N dans une fonction $\lambda x.M$ est appelée la β-règle et est de la forme:

$$(\lambda x.M)N \to M[x := N] \qquad (\beta)$$

où $M[x := N]$ est défini par récurrence sur la structure de M:

$$\begin{cases} x[x := N] = N & \\ y[x := N] = y & \text{si } x \neq y \\ PQ[x := N] = P[x := N]Q[x := N] & \\ (\lambda z.P)[x := N] = \lambda z.(P[x := N]) & \text{pour une variable } z \text{ jamais libre dans } N \end{cases}$$

Nous définissons les trois ordres pour lesquels nous démontrerons le théorème de standardisation au chapitre 4:

L'ordre "plus externe - plus à gauche"
Le radical $(\lambda x.M)N$ emboîte les radicaux situés en M ou en N, et dans MN les radicaux de M emboîtent les radicaux de N

L'ordre d'arbre syntaxique
Le radical $(\lambda x.M)N$ emboîte les radicaux situés en M ou en N. On clôture ensuite par contexte.

L'ordre d'emboîtement strict
Le radical $(\lambda x.M)N$ emboîte les radicaux situés en N. On clôture ensuite par contexte.

Chacun de ces ordres d'emboîtement déterminera au chapitre 4 une notion particulière de dérivation standard. L'ordre "plus externe - plus à gauche" correspond au résultat classique de Curry sur les stratégies "normales", voir [Cur 58][Bar 80]. L'ordre d'arbre syntaxique correspond à la notion de dérivation standard décrite en premier par Lévy [Lév 78] et reprise ensuite dans [Bar 80] comme la définition "officielle" de dérivation standard. L'ordre d'emboîtement strict détermine une troisième notion de dérivation standard, plus générale que les deux premières.

2.7.3 Systèmes avec règles d'équivalence: le cas général

Soit un système abstrait de réécriture $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!]$ avec compatibilité $\uparrow$. Nous supposons données deux relations déquivalence $\simeq_\mathcal{T}$ et $\simeq_\mathcal{R}$ sur les ensembles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ de termes et de radicaux. Nous voulons étudier le système $\mathcal{D}$ quotienté par ces deux relations $\simeq_\mathcal{T}$ et $\simeq_\mathcal{R}$, que par abus d'écriture, nous écrivons $\simeq$ toutes les deux. Nous appelons "termes libres" et "radicaux libres" les éléments de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ respectivement.

1. si deux radicaux libres $u : a \to b$ et $v : c \to d$ vérifient $u \simeq v$ alors $a \simeq c$ et $b \simeq d$,

2. soit deux radicaux libres r et r' tels que $r \simeq r'$. Si les trois radicaux libres u, v et u' vérifient $u[\![r]\!]v$, $u \simeq u'$ et $\partial_0 u' = \partial_0 r'$, alors il existe un radical libre v' tel que $u'[\![r']\!]v'$ et $v \simeq v'$.

On définit le système abstrait $\mathcal{D}_\simeq = (\mathcal{T}_\simeq, \mathcal{R}_\simeq, \partial_0^\simeq, \partial_1^\simeq, \langle\cdot\rangle$ de la manière suivante:

- $\mathcal{T}_\simeq$ est l'ensemble des classes $\simeq$ de $\mathcal{T}$,
- $\mathcal{R}_\simeq$ est l'ensemble des classes $\simeq$ de $\mathcal{R}$,
- si $r \in \mathcal{R}_\simeq$ alors il existe un radical $r_0 \in \mathcal{R}$ élément de la classe r. Le terme $\partial_0^\simeq r \in \mathcal{T}_\simeq$ est la classe $\simeq$ de $\partial_0 r$, et le terme $\partial_1^\simeq r \in \mathcal{T}_\simeq$ est la classe $\simeq$ de $\partial_1 r$.
- si $r \in \mathcal{R}_\simeq$ avec $r : a \to b$, alors la relation $\langle r\rangle$ est défini comme suit. $u\langle r\rangle v$ lorsqu'il existe $u_0 \in u$, $v_0 \in v$ et $r_0 \in r$ tels que $u[\![r]\!]v$.

Ces définitions sont correctes du fait des hypothèses 1 et 2. Nous appelons “termes” et “radicaux” les éléments de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ respectivement.

La relation de compatibilité $\uparrow_\simeq$ est défini comme suit: pour tout couple u et v de radicaux, on a $u \uparrow_\simeq v$ lorsqu'il existe $u_0 \in u$ et $v_0 \in v$ tels que $u_0 \uparrow v_0$. Le couple $(\mathcal{D}_\simeq, \uparrow_\simeq)$ est un système abstrait avec compatibilité.

Nous proposons de démontrer les axiomes A, B, C et PERM+ de $\mathcal{D}_\simeq$ en supposant que $\mathcal{D}$ vérifie les axiomes A, B, C et PERM+ de $\mathcal{D}$. Nous devons pour cela faire des hypothèses supplémentaires sur la relation $\simeq$.

3. soit u et v deux radicaux libres coinitiaux: $\partial_0 u = \partial_0 v$. Si $u \simeq v$, alors $u = v$,
4. si $r_1 \simeq r_2$, $u_1 \simeq u_3$ et $v_2 \simeq v_3$ avec $r_1 \uparrow u_1$, $r_2 \uparrow u_2$ et $u_3 \uparrow v_3$, alors il existe trois radicaux libres coinitiaux r, u et v tels que $r \uparrow u$, $r \uparrow v$ et $u \uparrow v$ et $r \simeq r_1$, $u \simeq u_2$ et $v \simeq v_3$.

L'axiome A est une conséquence sur $\mathcal{D}_\simeq$ de l'hypothèse 3 et de l'axiome A sur $\mathcal{D}$. Soit deux radicaux r et u coinitiaux, et deux radicaux libres r_0 et u_0 coinitiaux et tels que $r_0 \in r$ et $u_0 \in r$. L'hypothèse 2 impose que l'ensemble $u\langle r\rangle$ est la projection dans $\mathcal{T}_\simeq$ de l'ensemble $u_0[\![r_0]\!]$. Pour cette raison, l'axiome B est la conséquence sur $\mathcal{D}_\simeq$ de l'hypothèse 2 et de l'axiome B sur $\mathcal{D}$. L'axiome C sur $\mathcal{D}_\simeq$ est une conséquence des hypothèses 2 et 4, et de l'axiome C sur $\mathcal{D}$.

Nous montrons que l'axiome PERM+ dans $\mathcal{D}_\simeq$ est une conséquence des hypothèses 2 et 4. Si x, u et v sont des radicaux coinitiaux deux à deux compatibles, alors il existe des radicaux libres $x_0 \in x$, $u_0 \in u$ et $v_0 \in v$ tels que u_0, v_0 et x_0 sont cointiaux et deux à deux compatibles. Par construction, les développements de $\{u_0, v_0\}$ une fois projetés dans $\mathcal{D}_\simeq$ sont des développements de $\{u, v\}$. Soit f_0 un développement de $\{u_0, v_0\}$ dont la projection dans $\mathcal{D}$ est le développement f de $\{u, v\}$. Avec l'hypothèse 2, $x[\![f]\!]y$ si et seulement si il existe $y_0 \in y$ tel que $x_0[\![f_0]\!]y_0$. Pour cette raison, l'axiome PERM+ est vérifié dans $\mathcal{D}_\simeq$.

2.7.4 Un système avec Règles Associatives Commutatives: le γ-calcul

Nous voulons appliquer la section 2.7.3 au cas d'un système avec règles associatives commutatives. Nous prenons l'exemple du γ-calcul, un calcul non déterministe qui mélange des traits du λ-calcul et de CCS. La version que nous étudions ici en est une variante appauvrie où les lieurs ne sont pas concurrents.

Le premier modèle abstrait du γ-calcul

Pour construire les termes du calcul, on se donne deux ensembles dénombrables de variables et ports. x, y, t désignent des variables et α, β, γ des ports. L'ensemble des termes syntaxiques est alors défini par la grammaire suivante:

$$p = \mathbf{1} \mid x \mid \alpha x.p \mid \bar{\alpha}.p \mid p \odot p \mid (p|p)$$

Nous appelons terme libre toute classe d'équivalence par α-conversion sur ces termes syntaxiques. Nous notons $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces termes libres. La relation d'équivalence $\simeq$ identifie les termes libres suivant les égalités suivantes:

$$\mathbf{1} \odot p \simeq p \odot \mathbf{1} \simeq p \simeq \mathbf{1}|p \simeq p|\mathbf{1}$$

et

$$(p_1|p_2)|p_3 \simeq p_1|(p_2|p_3)$$

closes par contexte:

$$p \simeq q \Longrightarrow C[p] \simeq C[q]$$

Nous appelons "terme" toute classe d'équivalence de la relation $\simeq$, et notons $\mathcal{T}_{\simeq}$ l'ensemble de ces classes.

Nous appelons occurrence active d'un terme libre P toute occurrence (P, o) de symbole différent de $\mathbf{1}$. On construit de la manière naturelle une relation d'équivalence $\simeq_{occ}$ sur les occurrences actives des termes libres.

Un terme libre peut se réécrire suivant les trois règles suivantes:

$$\begin{array}{lc}
(Comm\odot) & P \odot Q \to Q \odot P \\
(Comm|) & P|Q \to Q|P \\
(Gamma) & (\alpha x.P|P') \odot (\bar{\alpha}.Q|Q') \to (P[x := Q]|P') \odot (Q')
\end{array}$$

où $P[x := Q]$ est défini par récurrence structurelle sur p de la manière habituelle. Ces réductions sont elles aussi closes par contexte.
Par exemple

$$\underline{\alpha x}.\beta y.\{(y|x|\bar{\beta}.y) \odot (x|\beta t.t)\} \odot ((\alpha x.x)|\underline{\bar{\alpha}.(u|\beta t.\gamma y.(y \odot t))})$$

peut être réduit en:

$$\beta y'.\{(y'|\underline{u|\beta t.\gamma y.(y \odot t)}|\bar{\beta}.y') \odot (\underline{u|\beta t.\gamma y.(y \odot t)}|\beta t.t)\} \odot \alpha x.x$$

Chaque réduction sur un terme libre P s'applique à une position particulière de ce terme. On définit un radical libre $r : P \to Q$ du α-terme P comme un couple (P, o) ou un triplet (P, o_1, o_2):

1. un couple (P, o) si le radical libre suit une règle $Comm\odot$ ou $Comm|$. L'occurrence o désigne la position du nœud $\odot$ ou $|$ qui intervient dans la réduction,

2. un triplet (P, o_1, o_2) si le radical libre suit une règle $Gamma$. Les occurrences o_1 et o_2 désignent dans ce cas la position du nœud αx et $\bar{\alpha}$ qui interviennent dans la réduction.

Deux radicaux libres $u : p \to q$ et v du même terme libre P sont compatibles: $u \uparrow v$, lorsqu'ils ne partagent aucune occurrence. Dans ce cas, la notion de résidu de u par v est défini de la manière naturelle. On écrit $u[\![v]\!]u'$.

Une relation $\simeq$ sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des radicaux libres est construite de la sorte: Soit deux radicaux libres $u : P \to Q$ et $v : P' \to Q'$. On a $u \simeq v$ lorsque $P' \simeq Q'$, et que

- $u = (P, o)$ et $v = (P', o')$ avec $(P, o) \simeq_{occ} (P', o')$,
- $u = (P, o_1, o_2)$ et $v = (P', o'_1, o'_2)$ avec $(P, o_1) \simeq_{occ} (P', o'_1)$ et $(P, o_2) \simeq_{occ} (P', o'_2)$.

Nous construisons le système abstrait $(\mathcal{D}_\simeq, \uparrow_\simeq)$:

1. $\mathcal{T}_\simeq$ est l'ensemble des termes,
2. $\mathcal{R}_\simeq$ est l'ensemble des radicaux,
3. si $r \in \mathcal{R}_i$, alors il existe un radical libre $r_0 \in r$ tel que $r : P \to Q$. Alors $\partial_0 r = \mathcal{P}$ est la classe $\simeq$ de P, et $\partial_1 r$ est la classe $\simeq$ de Q.
4. deux radicaux $u : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}_1$ et $v : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}_2$ coinitiaux sont compatibles: $u \uparrow_\simeq v$, lorsqu'il existe deux radicaux libres $u_0 \in u$ et $v_0 \in v$ tels que $u_0 \uparrow v_0$,
5. si les deux radicaux u et v sont coinitiaux et non compatibles, alors v n'a pas de résidu par réduction de u,
6. si u et v sont compatibles: $u \uparrow_\simeq v$, il existe des radicaux libres $u_0 \in u$ et $v_0 \in v$ tels que $u_0 \uparrow v_0$. le radical u a pour résidu par v les classes $\simeq$ des résidus de u_0 par v_0.

Maintenant, on applique la construction de $\mathcal{D}_\simeq$ proposée en section 2.7.3. Les quatre hypothèses 1, 2, 3 et 4 que nous y donnons sont vérifiées immédiatement sur $\simeq$. Le chapitre 7 montrera que le système $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ vérifie en tant que système combinatoire (CRS) les axiomes A, B, C et PERM+. On conclut que le système $\mathcal{D}_\simeq$ vérifie les axiomes A, B, C et PERM+.

Un modèle alternatif

Dans le système que nous présentons, il est apparu très difficile de suivre l'esprit du γ-calcul, et de refléter la commutativité des nœuds $\odot$ et $|$ dans la relation $\simeq$. Par exemple, l'hypothèse 3 avancée en section 2.7.3 interdit que les deux radicaux r_1 et r_2 soient identifiés.

$$r_1 : (\alpha x.x \odot \bar{\alpha} a)|(\alpha x.x \odot \bar{\alpha} a) \to a|(\alpha x.x \odot \bar{\alpha} a) \quad r_2 : (\alpha x.x \odot \bar{\alpha} a)|(\alpha x.x \odot \bar{\alpha} a) \to (\alpha x.x \odot \bar{\alpha} a)|a$$

En fait, pour définir la relation $[\![\cdot]\!]$, il semble indispensable de tracer les radicaux lors des opérations de commutation de $|$ et $\odot$. Dans notre présentation, les règles $Comm\odot$ et $Comm|$ tiennent lieu de coercion entre $\simeq$-termes.

Nous proposons maintenant une autre présentation du γ-calcul qui améliore la première présentation en remplaçant la règle $Gamma$ par la règle $Gamma\star$:

$$(Gamma\star) \qquad C[\alpha x.p] \odot C'[\bar{\alpha}.q] \to C[p[x := q]] \odot C'[\mathcal{Q}]$$

où les contextes $C[\square]$ et $C'[\square]$ sont construits avec la grammaire suivante:

$$C[\square] \;=\; C[\square]|\mathcal{P} \quad | \quad \mathcal{P}|C[\square] \quad | \quad \square$$

Nous traitons avec attention les différentes étapes de construction. Le traitement est informel.

1. les notions de terme libre et de radical libre sont reprises à la première version en remplaçant les $Gamma$-réductions par les $Gamma\star$-réductions.

2. la relation $\simeq$ est donnée sur les termes et radicaux libres de la même manière qu'au premier système,

3. une notion judicieuse de résidu d'un $Gamma\star$-radical libre par une $Comm$-réduction libre, de manière à éviter les paires critiques entre $Gamma\star$-radicaux et $Comm$-radicaux,

4. la relation de compatibilité entre radicaux libres raffine la définition donnée en première version en considérant à part le cas des $Gamma\star$-radicaux et $Comm$-radicaux, toujours compatibles.

Dans ce cas, le système abstrait des termes libres et radicaux libres n'est pas un CRS. On doit donc montrer directement que le système vérifie les axiomes A, B, C et PERM+. Il faut ensuite vérifier que la relation $\simeq$ vérifie les quatre hypothèses de la section 2.7.3. Nous laissons ces deux démonstrations au lecteur.

Le système $(\mathcal{D}_{\simeq}, \uparrow_{\simeq})$ est alors construit à la manière de la section 2.7.3. Il vérifie d'après la section 2.7.3 les axiomes A, B, C, FD+ et PERM+.

5. La dernière étape est particulière à cette présentation: on montre que toute dérivation peut être factorisée en une $Gamma\star$-dérivation suivie d'une série de commutations $\odot$ et $|$. Pour cette raison, on peut oublier les règles de commutation et restreindre le calcul aux $Gamma\star$-réductions sans véritable perte d'expression.

Ces résultats peuvent être utilisés pour démontrer la confluence d'un fragment du γ-calcul qui contient le λ-calcul. Les γ-termes M de ce fragment $\mathcal{F}_\gamma$ sont décrits comme suit:

1. tous les processus situés sous un constructeur $|$ dans M ont des ports d'appel α tous différents, et identiquement des ports d'envoi $\bar{\alpha}$ tous différents.

2. tous les termes de la forme $(x|\mathcal{P})$ sont interdits dans M pour éviter l'instantiation dans x de processus concurrents avec $\mathcal{P}$.

Le fragment de calcul $\mathcal{F}_\gamma$ a cette propriété que si $M \in \mathcal{F}_\gamma$ et $R : M \to N$ alors $N \in \mathcal{F}_\gamma$. De plus, tous les $Gamma\star$-radicaux d'un α-terme de $\mathcal{F}_\gamma$ sont compatibles, ce qui démontre l'axiome PERM dans le fragment, et donc la confluence (l'axiome FD sera démontré au chapitre 3).

Conclusion

La considération des $Gamma\star$-radicaux libère le γ-calcul des limitations inessentielles de notre premier modèle du calcul. Cependant, le caractère ad'hoc de la $Gamma\star$-réduction pousse à préférer le premier modèle.

On peut reprocher à ce premier modèle de traiter les règles de commutations comme les règles $Gamma$, ce qui entraine des paires critiques très discutables. Dans l'avenir, il faudrait traiter ces réductions de commutation à part, un peu à la manière des isomorphismes dans la théorie des catégories.

2.7.5 Réseaux d'interaction, réseaux de preuve

Nous reprenons la présentation des réseaux de preuves et réseaux d'interaction que donne [Laf 95].

Un réseau d'interaction π est un graphe fini construit avec des *cellules* déterminées par un alphabet Σ de symboles avec arités. Chaque symbole α d'arité p dans Σ détermine une cellule avec un port principal et p ports auxiliaires. Les réseaux sont transformés selon des *règles d'interaction* qui réécrivent deux cellules α, β dont les ports principaux sont liés, en un réseau $\rho_{\alpha,\beta}$. Deux cellules α liées par par leurs ports principaux peuvent donc être réduites selon deux règles,

$$(\alpha_1, \alpha_2) \to \rho_{\alpha_1,\alpha_2} \text{ et } (\alpha_2, \alpha_1) \to \rho_{\alpha_2,\alpha_1} = \overline{\rho_{\alpha_1,\alpha_2}}$$

Pour éviter la paire critique entre ces deux réductions symétriques on impose pour toute cellule α que $\rho_{\alpha,\alpha}$ et son réseau symétrique $\overline{\rho_{\alpha,\alpha}}$ soient égaux.

Le système abstrait associé est défini comme suit:

1. $\mathcal{T}$ est l'ensemble des réseaux,

2. les éléments $\pi \to \pi'$ de $\mathcal{R}$ sont définis par la règle (α, β) qu'ils appliquent et la position des deux cellules dans le graphe. Il faut tout de même faire attention aux symétries (voir [Laf 95],page 244): deux radicaux qui effectuent les règles

$$(\alpha_1, \alpha_2) \to \rho_{\alpha_1,\alpha_2} \qquad (\alpha_2, \alpha_1) \to \overline{\rho_{\alpha_1,\alpha_2}}$$

   sur deux cellules α aux positions α_1 et α_2 sont identifiés.

3. les résidus sont définis naturellement au moyen des positions dans le graphe,

4. tous les radicaux coinitiaux sont compatibles.

La vérification des axiomes A, B, FD et PERM est facilitée par l'absence de duplication dans le système.

Un réseau de preuve, en comparaison, s'apparente plus à un λ-terme à cause des "boites exponentielles" $!\pi$ qui permettent de dupliquer un sous-réseau π. Ces boites exponentielles ont un comportement particulier qui sort du cadre des réseaux d'interaction. Les boites participent à trois formes nouvelles d'interaction, voir [Laf 95]

1. les réductions externes:

   - la cellule "dereliction" libère le sous-réseau π quand elle agit sur le port principal de la boite $!\pi$ qui le contient,
   - la cellule "contraction" duplique la boite $!\pi$ et le sous-réseau π qu'elle contient
   - la cellule "weakening" efface la boite $!\pi$.

2. les réduction commutatives: une boite $!\pi'$ dont le port principal agit sur un port auxiliare de la boite $!\pi$ peut la pénétrer.

3. les réductions internes: une boite $!\pi$ peut être réécrite en $!\pi'$ si $\pi \to \pi'$.

Les notions de radical et de résidu doivent être revues à partir de ces trois formes de réduction:

- les radicaux sont définis comme pour les réseaux d'interaction, en tenant compte des calculs à l'intérieur des boites.

- les résidus sont définis à partir de la position des radicaux.

- deux radicaux sont incompatibles s'ils mettent en jeu des éléments (cellules ou boites) en commun. Par exemple deux réductions commutatives entre $!\pi_1$ et $!\pi_2$, et entre $!\pi_2$ et $!\pi_3$.

Les axiomes A et B sont immédiats. On démontre les axiomes C et PERM+ en signalant que la réduction commutative est la seule réduction qui ne fait intervenir qu'un seul port principal dans la règle d'interaction. Pour cette raison, les paires critiques sont toujours formées par une réduction commutative et une réduction soit commutative, soit externe. La suite de la démonstration est une étude de cas.

L'axiome FD+ est a priori plus délicat à démontrer. Nous l'étudions au chapitre suivant.

2.7.6 Le Π-calcul

Nous partons de la présentation (sans somme) du π-calcul monadique donnée en [Mil 91]. Nous avons l'idée de lui constituer au fil des chapitres un calcul d'évaluation partielle. Le plan de la construction suit:

1. nous introduisons le Π-calcul qui contrairement au π-calcul peut calculer sous les gardes.
2. nous démontrons en chapitre 4 un théorème de standardisation pour ce Π-calcul.
3. nous appelons Π_g-calcul le sous-calcul du Π-calcul qui ne calcule pas sous les gardes. Dans son principe, ce Π_g-calcul est très proche du π-calcul original,
4. nous définissons un fragment Π_{ev} du Π-calcul dont les calculs respectent la sémantique par bisimulation du Π_g-calcul. Ce résultat justifie l'emploi du Π_{ev}-calcul comme formalisme d'évaluation partielle du Π_g-calcul.

Ces questions seront traitées plus particulièrement lors du chapitre 4. Nous introduisons ici le Π-calcul.

Les termes syntaxiques du Π-calcul sont définis à partir d'un ensemble Nom de noms dénotés par $a, b, c, ...$, et la grammaire suivante:

$$p := \text{nil} \mid (p|q) \mid !p \mid a(b).p \mid \bar{a}b.p \mid (\nu x)p$$

Les termes syntaxiques du Π-calcul sont identifiés par α-conversion. On appelle "terme libre" une classe par α-conversion de termes syntaxiques. Les termes libres du π-calcul sont identifiés avec une relation $\simeq$ définie comme la plus petite relation d'équivalence qui vérifie les lois suivantes:

1. $(\mathcal{P}/\simeq, |, \text{nil})$, l'ensemble des termes libres quotienté par $\simeq$ est un monoïde,
2. $!!P \simeq !P$ et $(\nu x)a(b).P \simeq a(b).(\nu x)P$ si $x \notin \{a, b\}$,
3. $(\nu x)\text{nil} \simeq \text{nil}$ et $(\nu x)(\nu y)P \simeq (\nu y)(\nu x)P$,
4. si x n'est pas libre dans P alors $(\nu x)(P|Q) \simeq P|(\nu x)Q$,
5. si $P \simeq Q$ alors $C[P] \simeq C[Q]$ où $C[\square]$ est un contexte quelconque.

Notons que le traitement de l'opérateur de duplication ! diffère ici de celui proposé par [Mil 91] qui remplace la loi de construction 3 par la suivante:

$$!P \simeq P|!P$$

La présentation de Robin Milner est sémantiquement élégante mais extravagante du point de vue calculatoire. Par exemple, il n'y a pas de notion naturelle de radical et de résidu si on veut calculer sous les gardes. Aussi, les calculs de Milner ne sont pas exactement "linéaires gauches": si $P[a/b] = Q$ le radical u en réduisant

$$u : \bar{a}b.\mathrm{nil}|a(z).P|!Q \to !Q$$

identifie des radicaux de P et des radicaux de Q a priori distincts. En refusant la loi de Milner, nous prenons le chemin d'un traitement *calculatoire* et non pas descriptif du Π-calcul.

Contrairement au π-calcul original, la duplication du Π-calcul se déroule uniquement lors d'une communication:

$$(\mathrm{INT!}) \quad !x(y).P \mid \bar{x}z.Q \;\to\; !x(y).P \mid (P[y := z] \mid Q)$$

Bien sûr, la même opération sans duplication est possible:

$$(\mathrm{INT}) \quad x(y).P \mid \bar{x}z.Q \;\to\; P[y := z] \mid Q$$

Nous ajoutons la règle de commutation:

$$(\mathrm{COM}) \qquad P|Q \to Q|P$$

[Mil 91] introduit trois règles structurelles pour clore les règles d'interaction et de commutation.

$$(\mathrm{PAR})\ \frac{P \to P'}{P|Q \to P'|Q} \quad (\mathrm{RES})\ \frac{P \to P'}{(\nu x)P \to (\nu x)P'}$$

$$(\mathrm{STRUCT})\ \frac{Q \simeq P \qquad P \to P' \qquad P' \simeq Q'}{Q \to Q'}$$

Nous proposons le nom de Π-calcul gardé (ou Π_g-calcul) pour le système que nous venons de définir avec les trois règles PAR, RES et STRUCT. Nous nous démarquons de [Mil 91] et ajoutons les règles suivantes pour permettre au calcul de se dérouler sous les gardes:

$$(\mathrm{ATOM})\ \frac{P \to P'}{\pi.P \to \pi.P'} \quad (\mathrm{BANG})\ \frac{P \to P'}{!P \to !P'}$$

Nous appelons Π-calcul le système que nous obtenons avec les règles INT, INT! et COM, et les cinq règles d'inférence PAR, RES, STRUCT, ATOM et BANG.

Nous avons construit en section 2.7.4 un "premier" modèle abstrait du γ-calcul. Nous construisons le système abstrait $\mathcal{D}_{\simeq}$ du Π-calcul de manière analogue.

1. Les INT, INT! et COM-réductions induisent des notions de radicaux libres sur les termes libres, avec des relations de résidu et de compatibilité immédiates.

2. Ce système des termes libres est un CRS à nom comme le chapitre 7 le définira. Pour cette raison, il vérifie les axiomes A, B, C et PERM+.

3. La relation $\simeq$ est étendue aux radicaux libres. Elle vérifie les hypothèses 1. et 2. de la section 2.7.3. Pour cette raison, $\mathcal{D}_{\simeq}$ vérifie les axiomes A, B, C et PERM+.

Nous démontrons l'axiome FD+ au prochain chapitre.

2.7.7 Comment décrire le "Ou Parallèle" sans paires critiques

Nous introduisons l'opérateur "Ou Parallèle" dans un système du premier ordre:

$$\begin{array}{rl} A \to B & \\ por(B, x) \to B & \text{règle gauche} \\ por(x, B) \to B & \text{règle droite} \end{array}$$

Les calculs qu'engendrent cet opérateur sont confluents ; par exemple $por(A, A)$ est réécrit en B avec n'importe quelle stratégie de calcul. La traduction "canonique" des systèmes du premier ordre interprète la flèche $por(B, B) \to B$ de deux manières différentes suivant la règle qu'on emploie:

$$\begin{array}{rll} \text{par un radical} & por(B, B) \xrightarrow{r_g} B & \text{par la règle gauche} \\ \text{et par un radical} & por(B, B) \xrightarrow{r_d} B & \text{par la règle gauche} \end{array}$$

Cette interprétation de la réduction $por(B, B) \to B$ n'est pas nécessairement la plus judicieuse. Elle introduit une paire critique dans le système abstrait entre deux radicaux r_g et r_d essentiellement identiques. Et s'il y a moyen d'expliquer la confluence du calcul (syntaxique) par son orthogonalité il faut éliminer cette paire critique.

Nous décidons donc que la réduction $por(B, B) \to B$ ne forme abstraitement qu'un seul radical r — cela dans tous les termes où cette réduction apparait. Il faut vérifier qu'une relation $[\![\cdot]\!]$ peut être associée à tout radical de ce nouveau système de telle manière que $[\![\cdot]\!]$ vérifie les axiomes A, B, FD+ et PERM des systèmes orthogonaux. Avec un peu de bon sens syntaxique la construction de cette relation $[\![\cdot]\!]$ est évidente autant que la vérification des axiomes qui la suit.

Nous rapprochons maintenant cette construction d'une procédure plus générale de "quotientation" de systèmes abstraits de réécriture. Supposons un système abstrait *non orthogonal* tel que

$$\begin{array}{c} \# \text{ est transitive} \\ u\#v \Longrightarrow [\![u]\!] = [\![v]\!] \\ u\#v \Longrightarrow (\forall u',\ u[\![r]\!]u' \Longrightarrow \exists v' : v[\![r]\!]v' \text{ et } u'\#v') \end{array}$$

On se trouve dans un cas particulier de système faiblement orthogonal tel que Jan Willem Klop, Vincent Van Oostrom et Femke van Raamsdonk [Oos 94][Ram 96] le définissent. Dans notre cas il est possible d'identifier les radicaux incompatibles pour obtenir un système *sans paires critiques*. Les axiomes A et B, FD et PERM (orthogonalité) du système quotienté sont automatiquement déduits des axiomes A, B, C, FD+ et PERM+ (non orthogonalité) du système initial.

La traduction canonique du système *por* vérifie bien sûr les trois propriétés indiquées. En particulier: ce système est confluent.

2.7.8 Les systèmes à réduction combinatoire (CRS)

Le chapitre 7 traite à part le calcul combinatoire.

Chapitre 3

Lemme des développements finis

Plan du chapitre:

3.1 Introduction

Les chercheurs engagés à la suite de Church et Rosser [Chu 36] dans l'étude de la propriété de confluence du λ-calcul ont tenu à en éclaircir d'abord les conditions *combinatoires*. Church et Rosser avaient utilisé un *espace des dérivations* et démontré une propriété de confluence *globale* qu'on espérait décomposer en deux propriétés d'origines différentes: une mécanique *combinatoire* d'abord qui associée ensuite à une propriété de confluence *locale* entrainerait la propriété de confluence globale décrite par Church et Rosser. Ce travail de débroussaillage théorique fut mené avec attention par Curry [Cur 58] et plus encore par Hindley [Hin 69][Hin 78]. On savait depuis le lemme de Newman [New 42] que l'analyse demanderait une connaissance affinée des phénomènes de copie dans la réécriture. Cette contrainte fit qu'on précisa le modèle abstrait de Newman en étiquetant chaque étape de réduction (*radical*) afin d'en suivre les copies (*résidus*) le long des dérivations, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. On fit la découverte en cours de recherche d'une propriété du λ-calcul qui donne cette borne suffisante à la duplication des calculs: le lemme des *développements finis*. On sut écrire comme on l'avait cherché:

$$\text{Confluence de Church-Rosser} = \text{Lemme Combinatoire} + \text{Diagramme Local}$$

Ce lemme combinatoire montre que toutes les manières de réduire un ensemble de radicaux sont équivalentes: chacun des développements termine, et tous arrivent sur le même terme et avec la même relation de résidu quand le diagramme local est vérifié. Décomposer le théorème de Church-Rosser permit de généraliser à d'autres calculs le travail effectué sur la confluence du λ-calcul. On devina vite que les systèmes du premier ordre vérifient le lemme de terminaison, ce que O'Donnell démontra avec une preuve générique que nous rappellerons dans la prochaine partie. Simultanément, le diagramme de confluence fut ramené à l'absence de *paires critiques*, propriété simple qu'on peut vérifier à partir des règles de réécriture, voir [KB 70]. On se mit donc à étudier les systèmes sans paires critiques, dits *orthogonaux*, dans le cadre de nombreux formalismes: systèmes du premier ordre[HL 79][Klo 92], systèmes à réduction combinatoire[Klo 80], graphes, réseaux d'interaction.

Restait à mieux comprendre le lemme de terminaison pour en circonscrire le domaine d'application, en particulier quand il s'agit de systèmes d'ordre supérieur. On découvrit de nombreuses démonstrations pour le λ-calcul, celles de Barendregt-Bergstra-Klop-Volken [Bar 80], de Hyland [Hyl 73][Klo 80], de deVrijer [Vri 85] ou de Lévy [Lév 78] par exemple. Jan Willem Klop réussit à généraliser la propriété dans le cas orthogonal à une classe importante de systèmes d'ordre supérieur, les systèmes à réduction combinatoire [Klo 80]. Sa démonstration fait appel à la réécriture du premier ordre qu'elle distingue des substitutions et utilise un argument de confluence: les *réductions avec mémoire*, qui interdit toute adaptation du lemme aux systèmes non orthogonaux. Discrètement, une limite semble atteinte dans la théorie syntaxique.

Si on veut porter son regard en avant, la question est ouverte sur de nombreux systèmes où une approche classique apparait plus difficile encore: soit que le système contienne des paires critiques, ce qui complique le traitement combinatoire habituel, soit qu'une structure plus libérale des objets interdise les constructions fondées sur les arbres: graphes, réseaux, réduction dans un monoïde ou préordres. Or, le lemme de terminaison est utile et souvent indispensable: il intervient dans des problèmes de confluence des systèmes orthogonaux [HL 79] ou quasi-orthogonaux [Oos 94], et nous l'utiliserons dans les chapitres suivants pour démontrer le théorème de standardisation [Klo 80] [GLM 92] et de normalisation forte des systèmes simplement typés. Il importait donc de résoudre ce léger retard théorique, de justifier notre travail ultérieur, et d'en profiter pour montrer comment le lemme s'applique à une classe très générale de systèmes de réécriture. Notre intérêt pour le lemme est donc né d'un constat *technique* pragmatique et simple.

Le plus naturel pour aborder le sujet est de repartir de O'Donnell (section 3.2) qui a montré comment prouver de façon générique la terminaison dans le cadre des systèmes du premier ordre, orthogonaux ou non. Sa démonstration utilise une description abstraite du comportement combinatoire des radicaux et résidus. Les axiomes sont simples et intuitifs. Ils donnent une description générale de la dynamique de réécriture des systèmes du premier ordre. Nous présentons en section 3.3 une généralisation cette description aux systèmes d'ordre supérieur, pour en étendre le domaine d'application. Les axiomes introduits nous semblent éclaircir les mécanismes d'instantiation des systèmes avec lieurs. Décrire de façon élégante le mécanisme de la substitution s'est révelé ainsi l'enjeu *théorique* immédiat de notre travail.

Nous voudrions signaler aussi que ce travail participe d'un projet plus large qui oriente les recherches en réécriture depuis quelques années, dont l'objectif est une meilleure description des mécanismes de *concurrence* et de *mobilité* du parallélisme. Certaines des solutions envisagées emploient des formalismes pour lesquels aucun théorème général n'est établi, comme par exemple les travaux de Berry et Boudol sur la machine chimique abstraite [BB 88]. Ces systèmes restent *calculatoires* au sens où les notions de *radicaux* et *résidus* y apparaissent de façon claire, ce qui en fait un domaine d'application rapide de nos résultats abstraits. D'autres choix sont plus radicaux et établissent un écart entre *calcul* et *description*. Lorsque Milner par exemple introduit à la suite de Girard [Gir 95] un opérateur ! de duplication dans son π-calcul [Mil 91], il favorise la *description* et néglige à dessein les propriétés *calculatoires*. Nos travaux permettent de mieux comprendre les limites dans lesquelles un simple instrument descriptif *calcule* effectivement. Ils rejoignent en ce sens les efforts de Milner pour distinguer parmi ses *structures d'actions* [Mil 92] lesquelles forment des *calculs d'action* [Mil 94], cela à la fois par des moyens syntaxiques et sémantiques. La souplesse et la précision des techniques abstraites leur font jouer un rôle classificateur important dans cette tension entre motivations calculatoires et descriptives. Ce caractère *prospectif* de notre travail nous a bien sûr tenu à cœur.

3.2 Les systèmes de réécriture du premier ordre

Les termes du premier ordre sont des arbres dont les radicaux sont décrits par un ensemble de règles dites *règles de réécriture* qui permettent de transformer un motif en un autre, voir [HL 79] [Klo 92]. La partie 7.1 a montré comment les traiter dans nos systèmes abstraits.

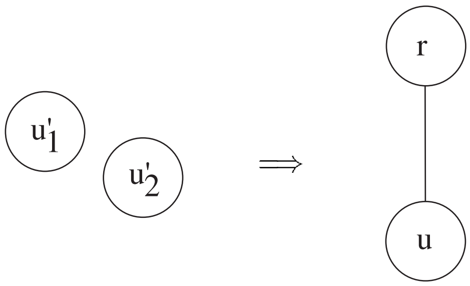
Définition 3.1 (emboîtement) *Un système abstrait avec emboîtement est un couple* $(\mathcal{D}, <)$ *dans lequel* $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ *est un système abstrait de réécriture, et* $<$ *est une relation binaire sur* $\mathcal{R}$ *telle que:*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{R}^2, \quad u < v \Rightarrow \partial_0 u = \partial_0 v$$

Le premier axiome que O'Donnell propose sur le système $(\mathcal{D}, <)$ porte sur l'ordre d'emboîtement et la relation de résidu: un radical duplique seulement les radicaux qu'il contient par emboîtement $<$. On écrit cela:

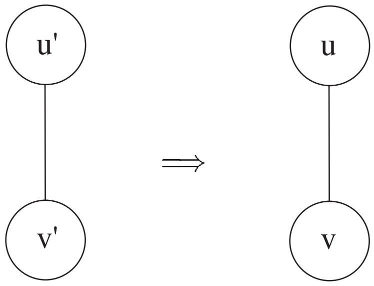
Propriété 3.2 (duplication) $u[\![r]\!]u'_1, u[\![r]\!]u'_2, u'_1 \neq u'_2 \Longrightarrow r < u$

Nous représenterons dans nos schémas les radicaux par des cercles, avec pour convention qu'un radical u se trouve au dessus d'un radical v qu'il contient, les deux cercles étant relié par un fil. La propriété 3.2 se dessine donc:



Le deuxième axiome veut décrire l'absence de règles de substitution au sein des systèmes du premier ordre. Si les résidus u' et v' de u et v sont emboîtés — $u' < v'$ — alors u et v eux-mêmes sont emboîtés — $u < v$.

Propriété 3.3 (emboîtement) $u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v', u' < v' \Longrightarrow u < v$



Pour démontrer le lemme FD de terminaison, O'Donnell utilise les deux axiomes dans le cadre des arbres. Néanmoins, intrinsèquement, les deux axiomes ne font pas d'hypothèse sur la structure d'arbre et permettent donc de décrire une classe de réécriture légèrement plus générale. Nous présentons ici une variation de la démonstration de O'Donnell qui ne considère que les deux propriétés sus-dites, la propriété d'ordre sur $<$ et les deux axiomes A et B rencontrés au chapitre 2:

Petit axiome A (auto-réduction): $r[\![r]\!] = \emptyset$

Petit axiome B (finitude): Quels que soient deux radicaux u et r coinitiaux, $u[\![r]\!]$ est un ensemble fini.

Démonstration du lemme FD de terminaison (premier ordre)

Nous commencerons par étudier les séquences de radicaux x_i dans U telles que $x_1 < x_2 < ... < x_n$. L'idée qui nous mène est simple: si un radical r duplique un radical u alors il apparaît dans une telle séquence au-dessus de u, et disparait par réduction. Nous appelons $h_U(r)$ la longueur maximale d'une telle séquence d'emboîtement sous r: il est certain que cette valeur majore $h_U(u)$, parce que toute séquence d'emboîtement sous u peut être prolongée en une séquence d'emboîtement sous r. Nous démontrerons que $h_U(r)$ majore aussi $h_V(v)$, la longueur maximale d'une séquence d'emboîtement sous v dans V, pour l'ensemble V des résidus de U, et tout résidu v de u: $U[\![r]\!]V$, $u[\![r]\!]v$.

Définition 3.4 *Soit U un ensemble fini de radicaux coinitiaux.*

- *On appelle $(U,<)$-chaîne toute séquence $(x_1, ..., x_n)$ de radicaux dans U telle que $\forall i, x_i < x_{i+1}$.*
- *$h_U(x)$ est défini comme la longueur maximale des $(U,<)$-chaînes dont x est le premier élément. Ce maximum existe parce que U est fini et $<$ est un ordre. Nous appelerons cette valeur la hauteur de x dans U.*
- *on désigne par "$\cdot$" l'opérateur de concaténation des séquences: $(x_1, ..., x_k) \cdot (x_{k+1}, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$, et $x \cdot (x_1, ..., x_k) = (x, x_1, ..., x_k)$.*

Soit $U[\![r]\!]V$. Nous montrons que toutes les chaînes $y_1 < y_2 < ... < y_k$ dans V proviennent par résidu d'une chaîne similaire dans U. En ce sens, la longueur des $(U,<)$-chaînes à partir d'un radical x n'augmente pas par résidu, ce qui permet de majorer $h_V(y)$ par $h_U(x)$.

Lemme 3.5 (lemme de persistance de la chaîne) *Soit $U[\![r]\!]V$ et x un radical de U dont y est un résidu par r. Alors $h_U(x) \geq h_V(y)$.*

Démonstration: ce résultat est une application sur les chaînes de la propriété 3.3. Soit $U[\![r]\!]V$. Soit x_1 un radical de U et y_1 un radical de V tels que $x_1[\![r]\!]y_1$. Soit une $(V,<)$-chaîne $(y_1, ..., y_n)$. Nous montrons par induction sur n qu'il existe une $(U,<)$-chaîne $(x_1, ..., x_n)$ au départ de x_1 de longueur n telle que $\forall i, x_i[\![r]\!]y_i$. On vérifie dans le cas $n = 1$ que (x_1) est aussi long que (y_1). Si $n > 1$, soit $(y_1, ..., y_n)$ une $(V,<)$-chaîne, et x_2 un radical de U tel que $x_2[\![r]\!]y_2$; il existe par hypothèse d'induction une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 de longueur $n-1$. Parce que $x_1[\![r]\!]y_1$ et $y_1 < y_2$, les deux radicaux x_1 et x_2 sont eux-même emboités d'après la propriété 3.3: $x_1 < x_2$. On construit ensuite la $(U,<)$-chaîne $x_1 \cdot \mathbf{x_2}$ en concaténant x_1 à $\mathbf{x_2}$. Cette $(U,<)$-chaîne au départ de x_1 est de longueur n, et $\forall i, x_i[\![r]\!]y_i$. Soit $x \in U$ et $y \in V$ tels que $x[\![r]\!]y$. Nous venons de montrer qu'à toute $(V,<)$-chaîne au départ de y correspond une $(U,<)$-chaîne au départ de x de longueur égale. Donc $h_V(y)$ est majoré par $h_U(x)$. $\square$

Soit $U[\![r]\!]V$. Nous venons de démontrer que $h_V(y) \geq h_U(x)$ si x a pour résidu y par r. Il ne faut pas oublier que le radical r disparait pendant sa propre réduction, selon l'axiome A. Si u dans U n'est pas dupliqué, alors son résidu possible dans V aura une hauteur dans V majorée par celle de u dans U. Si u est dupliqué, alors sa hauteur dans U est *strictement majorée* par celle de r parce que $r < u$; la hauteur dans V de ses résidus v est donc *strictement* plus petite que celle de r dans U, radical qui lui disparait: le multi-ensemble des hauteurs $\{\!\{h_V(v)|\ u[\![r]\!]v\}\!\}$ est en particulier strictement majoré par $\{\!\{h_U(r)\}\!\}$, multi-ensemble dont il prend la place dans $\{\!\{h_U(x)|\ x \in U\}\!\}$ après réduction. Le multi-ensemble $\{\!\{h_V(y)|\ y \in V\}\!\}$ sera pour cette raison majoré par $\{\!\{h_U(x)|\ x \in U\}\!\}$.

Théorème 3.1 (lemme des développements finis) *Soit $(\mathcal{D}, <)$ un système abstrait avec emboîtement tel que $<$ est un ordre. En prenant pour hypothèse que $(\mathcal{D}, <)$ vérifie les propriétés 3.2 et 3.3 et les axiomes A et B, si U un ensemble fini de radicaux coinitiaux, alors tous les développements de U sont finis.*

Démonstration: soit un ensemble fini U de radicaux coinitiaux, $r \in U$ et $V = U[\![r]\!]$. Nous comparons les multi-ensembles $\{\!\{h_U(x)|\ x \in U\}\!\}$ et $\{\!\{h_V(y)|\ y \in V\}\!\}$. Tout d'abord V est fini par l'axiome B. Tout radical v de V provient d'un radical u de U au moins. Dans tous les cas $h_U(u) \geq h_V(v)$ selon le lemme 3.5 de persistance de la chaîne. Lorsque u est dupliqué alors $h_U(r)$ majore strictement $h_V(v)$: en effet $r < u$ par la propriété 3.2 ce qui fait que $h_U(r) > h_U(u)$ parce que $<$ est un ordre. L'accroissement possible de $\{\!\{h_U(x)|\ x \in U\}\!\}$ vers $\{\!\{h_V(y)|\ y \in V\}\!\}$ dans tous les cas majoré par $\{\!\{h_U(u)|\ u[\![v]\!]$ et $r < u,\ u \in U\}\!\}$ est donc strictement inférieur à $\{\!\{h_U(r)\}\!\}$. Le radical r qui apparait dans U est effacé lors de sa propre réduction à cause de l'axiome A. En résumé, l'accroissement dû à la duplication est toujours négligeable par rapport à la disparition du radical qui réduit: le multi-ensemble $\{\!\{h_V(y)|\ y \in V\}\!\}$ est *strictement* majoré par $\{\!\{h_U(x)|\ x \in U\}\!\}$. □

Le λ-calcul a un mécanisme de réécriture plus compliqué que ce que décrit la propriété 3.3. Deux λ-radicaux u et v peuvent avoir deux résidus par r emboîtés ($u' < v'$) sans qu'eux-mêmes soient emboîtés ($u \not< v$). Il faut pour cela que le radical r instantie v sous u: plus précisément, que r soit de la forme $(\lambda x.M)N$ avec le radical u situé dans M et le radical v dans N, et pour permettre l'instantiation que u ait la forme $(\lambda y.P)Q$ où x apparait comme variable libre. Nous allons voir dans la section suivante comment une description précise de ce mécanisme permet de retrouver abstraitement la propriété de terminaison dans ce nouveau cadre.

3.3 Les systèmes de réécriture avec lieur

Quatre axiomes nous seront nécessaires pour démontrer le lemme des développements finis. En plus de la relation d'emboîtement, nous utiliserons une relation $\ll$ d'agrippement entre radicaux coinitiaux.

Définition 3.6 (agrippement) *Un système abstrait avec agrippement est un quadruplet $(\mathcal{D}, \uparrow, <, \ll)$ dans lequel $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!], \uparrow)$ est un système abstrait de réécriture avec compatibilité, et $<$ et $\ll$ sont des relations binaires sur $\mathcal{R}$ telles que:*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{R}^2, \quad u < v \Rightarrow \partial_0 u = \partial_0 v$$

$$\forall (u, v) \in \mathcal{R}^2, \quad u \ll v \Rightarrow \partial_0 u = \partial_0 v$$

Définition 3.7 (Relation acyclique) *Soit $(\mathcal{D}, \uparrow)$ un système abstrait avec comaptibilité. Une relation binaire R sur les radicaux est dite acyclique lorsqu'il n'existe aucune suite $u_1, ..., u_n$ de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles tels que $u_n = u_1$ et $\forall i \in [1...n], u_i < u_{i+1}$.*

Hypothèse 3.1
Nous supposons au cours de cette section 3.3 que les relations $\ll$ et $<$ sont acycliques.

Nous reprenons la forme des schémas de la section précédente, avec la convention qu'un radical u se trouve au dessus d'un radical v qu'il contient ou agrippe. Un fil entre les deux radicaux signifie ici que $u < v$, deux fils que $u \ll v$.

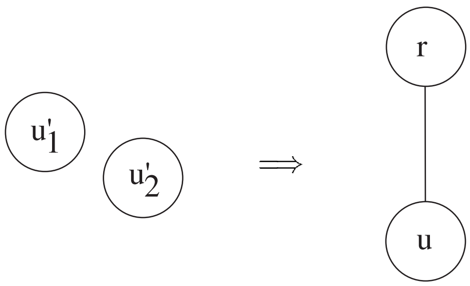
Nous tâchons ici de généraliser au λ-calcul la méthode présentée dans la section précédente. Nous reprenons les trois axiomes A, B et C et rebaptisons en "axiome fd-1" la propriété 3.2 qui est encore vérifiée par le λ-calcul.

Petit axiome A (auto-réduction): $r[\![r]\!] = \emptyset$

Petit axiome B (nombre fini de résidu): $u[\![r]\!]$ est un ensemble fini.

Petit axiome C (préservation des compatibilités): Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que $u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v'$. Si $r \uparrow u$ et $r \uparrow v$, alors $u \uparrow v \Longrightarrow u' \uparrow v'$.

Axiome fd-1 Duplication
Soit $(u, r, u'_1, u'_2) \in \mathcal{R}^4$ tels que $u \uparrow r$. Alors: $u[\![r]\!]u'_1, u[\![r]\!]u'_2, u'_1 \neq u'_2 \Longrightarrow r < u$

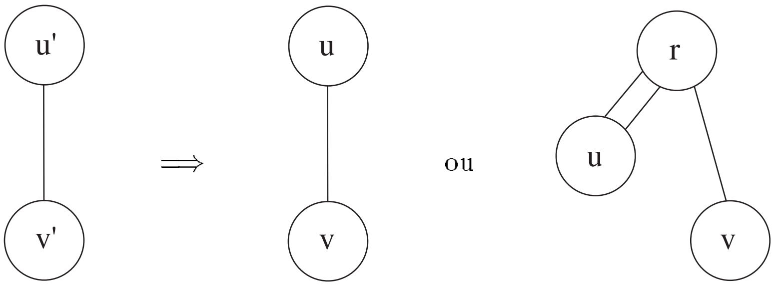


Par contre, nous ne pouvons pas reprendre telle quelle la propriété 3.3: la substitution permet d'emboîter des radicaux qui ne l'étaient pas avant β-réduction. En vérité, la notion d'emboîtement seule ne permet plus de décrire ces mécanismes d'instantiation. Autant que cette information sur les possibles duplications, il nous faut connaitre la position des variables liées de chaque radical — variables qui seront instantiées durant la réduction — pour prédire avant réduction des emboîtements à venir. Une relation binaire d'agrippement $\ll$ entre radicaux est introduite à cet effet, qui reprend la relation binaire évoquée en fin de section 3.2:

> dans le λ-calcul: $r \ll u$ lorsque r est de la forme $(\lambda x.M)N$ tandis que u se trouve dans M sous la forme $(\lambda y.P)Q$ avec x une des variables libres de $(\lambda y.P)Q$.

L'axiome fd-2 donne sous une forme algébrique le mécanisme de substitution du λ-calcul tel que nous le décrivions:

Axiome fd-2 Instantiation
Soit $(r, u, v, u', v') \in \mathcal{R}^5$ tel que $u \uparrow v$, $r \uparrow u$ et $r \uparrow v$, $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $u' < v'$, alors $u < v$ ou ($r \ll u$ et $u < v$)



Il y a bien sûr de l'embarras à imposer au lecteur une relation nouvelle comme celle de l'agrippement. Qu'elle nous ait été utile pour décrire les mécanismes d'instantiation ne la justifie pas tout à fait. Elle s'avère aussi avoir un comportement dynamique frappant puisqu'il correspond à celui de l'emboîtement dans les systèmes du premier ordre. Soit en effet deux λ-radicaux u et v tels que leurs résidus u' et v' par r soient agrippés: $u' \ll v'$. On suppose que u et v ont pour écritures respectives $(\lambda x.M)N$ et $(\lambda y.P)Q$. Deux cas se présentent:

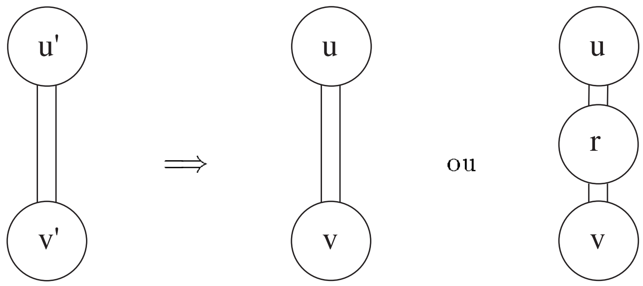
1. soit u et v sont eux-même agrippés: $u \ll v$,

2. soit u et v ne le sont pas: $u \not\ll v$. Pour expliciter la relation $u' \ll v'$ nous dirons que u' est de la forme $(\lambda x.M')N'$ avec le radical v' dans M' de la forme $(\lambda y.P')Q'$ et la variable x qui apparait comme variable libre dans P' ou Q'. Nous allons démontrer que nécessairement $u \ll r$ et $r \ll v$. En effet, si r est de la forme $(\lambda\alpha.A)B$:

   - parce que le radical u n'agrippe pas v, la variable x liée par u n'apparait pas libre dans $(\lambda y.P)Q$ tandis qu'elle apparait dans $(\lambda y.P')Q'$ après réduction de r. Il faut donc que le radical r substitue dans $(\lambda y.P)Q$ une instance de la variable x. En conséquence $(\lambda y.P)Q$ contient une instance libre de la variable α liée par r: l'instance où r substitue. On conclue que $r \ll v$.
   - r substitue dans $(\lambda y.P)Q$ une instance de la variable x que lie u: il faut que cette instance se trouve elle-même libre dans l'argument B que $r = (\lambda\alpha.A)B$ va appliquer dans A. Pour cela il faut que $u \ll r$.

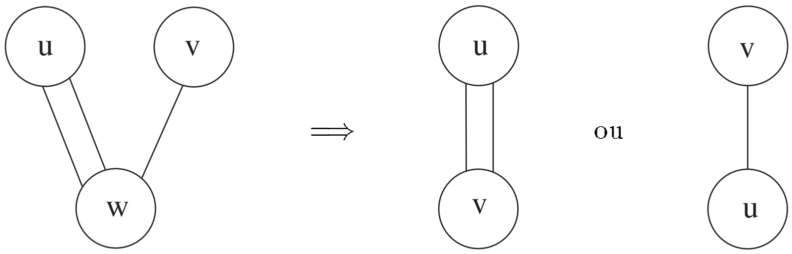
On assiste donc au cours de cette réduction à une migration des instances de la variable x à travers le terme. Ce mécanisme est décrit par l'axiome fd-3 de migration, qui est l'adaptation pour $\ll$ de la propriété 3.3 introduite sur $<$ lors de l'étude des systèmes du premier ordre en partie 3.2.

Axiome fd-3 Migration de la variable
Soit $(r, u, v, u', v') \in \mathcal{R}^5$ tel que $u \uparrow v$, $r \uparrow u$, $r \uparrow v$, $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $u' \ll v'$ alors $u \ll v$ ou $u \ll r \ll v$



Les trois axiomes que nous venons d'introduire décrivent un comportement dynamique. Le prochain porte au contraire sur la structure des radicaux dans un terme. Il indique une propriété de *convexité* des emboîtements par rapport aux lieurs que simule la relation d'agrippement. Prenons trois radicaux u, v et w dans un λ-terme tels que $v < w$ et $u \ll w$. Le radical v contient des instances de la variable liée du radical u: celle que contient w. Ou bien le radical v contient u: $v < u$, ou bien u contient v, ce qui fait qu'il l'agrippe: $u \ll v$. Ici dans le λ-calcul la propriété de convexité est une conséquence de la propriété d'arbre. L'axiome fd-4 de convexité peut être aussi vérifié dans des structures de graphes.

Axiome fd-4 Convexité
Soit $(u, v, w) \in \mathcal{R}^3$ tel que $u \uparrow v$, $u \uparrow w$ et $v \uparrow w$. Si $u \ll w$ et $v < w$, alors $u \ll v$ ou $v < u$.



Le lecteur peut vérifier qu'on retrouve les propriétés 3.2 et 3.3 dans les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 lorsque la relation $\ll$ est vide, c'est-à-dire que le système est du premier ordre. En particulier l'axiome fd-2 généralise la propriété 3.3 aux systèmes d'ordre supérieur.

3.4 Démonstration du lemme FD+ de terminaison

Les axiomes d'instantiation, de migration et de convexité décrivent la dynamique syntaxique du λ-calcul et des calculs fondés sur les mécanismes d'instantiation. Nous les utilisons maintenant pour démontrer le lemme des développements finis — selon une démonstration qui s'applique à tous les systèmes qui vérifient nos axiomes.

Nous ferons l'hypothèse que $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!], \uparrow, <, \ll)$ est un système abstrait avec agrippement qui vérifie les axiomes A, B, C, fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4, et tel que $<$ et $\ll$ sont acycliques. L'ensemble U désigne un ensemble *fini* de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles. Les axiomes B et Cconfèrent à l'ensemble V les mêmes propriétés lorsque $U[\![r]\!]V$. Comme en partie 3.2, nous étudierons d'abord les séquences d'agrippement:

$$x_1 \ll x_2 \ll ... \ll x_n$$

et d'emboîtement:

$$x_1 < x_2 < ... < x_n$$

formées de radicaux de U.

Définition 3.8 • *on appelle $(U, \ll)$-chaîne une suite finie $(x_1, ..., x_n)$ de radicaux de U telle que $\forall i, 1 \leq i < n \Longrightarrow x_i \ll x_{i+1}$.*

- *on appelle $(U, <)$-chaîne une suite finie $(x_1, ..., x_n)$ de radicaux de U telle que $\forall i, 1 \leq i < n \Longrightarrow x_i < x_{i+1}$.*
- *on dit que x_1 est le départ de la chaîne $(x_1, ..., x_n)$.*

Nous utilisons la similarité entre la propriété 3.3 sur la relation $<$ et l'axiome fd-3 sur la relation $\ll$ pour démontrer un résultat de persistance de chaîne sur $\ll$ identique au lemme 3.5 que nous avons démontrée pour $<$ en section 3.2.

Définition 3.9 *L'entier $g_U(x)$ est défini comme la longueur maximale des $(U, \ll)$-chaînes dont x est le départ. Ce maximum existe parce que U est fini et que $\ll$ est acyclique. On appelle $g_U(x)$ la $\ll$-hauteur de x dans U.*

Lemme 3.10 (lemme de persistance de la $\ll$-chaîne) *Soit $U[\![r]\!]V$ et x un radical de U dont y est un résidu. Alors $g_U(x) \geq g_V(y)$.*

Démonstration: soit $x_1[\![r]\!]y_1$ et $U[\![r]\!]V$ avec $x_1 \in U$. Nous montrons par induction sur la longueur d'une $(V, \ll)$-chaîne $(y_1, ..., y_n)$ qu'il existe une $(U, \ll)$-chaîne $(x_1, ..., x_p)$ au départ de x_1 plus longue. La démonstration utilise l'axiome fd-3 de migration. Le cas $n = 1$ est simple: (x_1) est aussi long que (y_1). Sinon, soit $(y_1, ..., y_n)$ une $(V, \ll)$-chaîne et x_2 un radical de U tel que $x_2[\![r]\!]y_2$; il existe par hypothèse d'induction une $(U, \ll)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 plus longue que $n - 1$. Du fait que $y_1 \ll y_2$ les deux radicaux x_1 et x_2 vérifient d'après l'axiome fd-3 soit $x_1 \ll x_2$ soit $x_1 \ll r \ll x_2$. On peut dans les deux cas constituer par concaténation une nouvelle $(U, \ll)$-chaîne au départ de x_1: soit $x_1.\mathbf{x_2}$, soit $x_1.r.\mathbf{x_2}$. Cette nouvelle $(U, \ll)$-chaîne qui part de x_1 est plus longue que $(y_1, ..., y_n)$, ce qui démontre notre lemme par induction. □

Voilà démontré que la longueur des $(U, \ll)$-chaînes n'augmente jamais au cours de la réduction. Ce n'est pas le cas des $(U, <)$-chaînes dont la longueur s'accroit du fait des instantiations qui les concatènent. La longueur de chaine n'est donc pas la mesure sur les $(U, <)$-chaînes qui reste identique ou décroit au cours de la réduction. Nous construisons la mesure qui vérifie cette propriété à partir d'un argument dynamique plus subtil: le radical r qu'on réduit et qui instantie sous une $(U, <)$-chaînes a une $\ll$-hauteur $g_U(r)$ strictement plus grande que celle des radicaux de cette $(U, <)$-chaînes — cela grâce à l'axiome fd-2.

Nous donnons maintenant la mesure sur les radicaux qui décroit lors de la réduction de U.

Définition 3.11 *Soit* $\mathbf{x}$ *une* $(U,<)$*-chaîne* $(x_1, ..., x_n)$. *On définit* $g_U(\mathbf{x})$ *comme le multi-ensemble* $\{\!\{g_U((x_i)) \mid 1 \leq i \leq n\}\!\}$. *Le multi-ensemble* $g_U(\mathbf{x})$ *sera appelé le poids de* $\mathbf{x}$. *On désigne par* $\overset{+}{\cup}$ *l'union multi-ensembliste.*

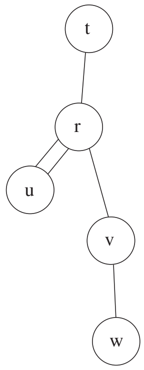
Définition 3.12 *Le multi-ensemble* $h_U(x)$ *est défini comme le maximum de* $g_U(\mathbf{x})$ *pour toutes les* $(U,<)$*-chaînes* $\mathbf{x}$ *dont* x *est le départ. Ce maximum existe pour trois raisons:*

1. *l'ordre entre multi-ensemble est total,*

2. U *est fini et contient des radicaux deux à deux compatibles,*

3. *la relation* $<$ *est acyclique.*

Nous illustrons la définition 3.12 par l'exemple suivant:



$$\begin{aligned}
&U = \{t, r, u, v, w\}\\
&h_U(w) = \{\!\{1\}\!\}\\
&h_U(v) = \{\!\{1, 1\}\!\}\\
&h_U(u) = \{\!\{1\}\!\}\\
&h_U(r) = \{\!\{2, 1, 1\}\!\}\\
&h_U(t) = \{\!\{1, 2, 1, 1\}\!\}
\end{aligned}$$

Nous expliquons quel usage nous faisons des valeurs $h_U(x)$ dans notre démonstration. Si un radical $r \in U$ contient un radical $u \in U$ alors la mesure $h_U(r)$ majore strictement $h_U(u)$.

$$r < u \Longrightarrow h_U(r) > h_U(u)$$

Si $U[\![r]\!]V$, nous voulons démontrer que le multi-ensemble

$$\{\!\{h_U(u) \mid u \in U\}\!\}$$

majore *strictement* le multi-ensemble qui lui correspond dans V:

$$\{\!\{h_V(v) \mid v \in V\}\!\}$$

Le radical r n'a pas de résidu par sa propre réduction. Parce que $h_U(r)$ majore strictement $h_U(u)$ lorsque r duplique u d'après l'axiome fd-1, il suffit, pour démontrer ce résultat, de prouver que la mesure $h_U(u)$ majore $h_V(v)$ pour tout radical u de U et v de V tels que v est le résidu de u par r.

1. Le lemme 3.15 montre que cette propriété sur $h_U(u)$ et $h_V(v)$ est vraie lorsque r n'agrippe pas u. Intuitivement, dans ce cas, le radical r est incapable de substituer à l'intérieur d'une $(U,<)$-chaîne au départ de u — par les axiomes fd-2 et fd-4.

2. Dans le cas où r agrippe u, il est possible que $h_U(u)$ ne majore pas $h_V(v)$. Le lemme 3.15 montre que dans ce cas, les $(V,<)$-chaînes $(y_1, ..., y_k)$ au départ de $y_1 = v$ ont un poids $g_V(y_1, ..., y_k)$ toujours majoré par le poids d'une $(U,<)$-chaîne au départ de u ou au départ

de r. Intuitivement, si la $(V,<)$-chaîne $(y_1,...,y_k)$ provient d'une $(U,<)$-chaîne $(x_1,...,x_k)$ au départ de $x_1 = u$, alors $g_U(x_1,...,x_k)$ majore $g_V(y_1,...,y_k)$. Par contre, si la $(V,<)$-chaîne $(y_1,...,y_k)$ est le résultat d'une substitution de la $(U,<)$-chaîne $(r, x_{i+1},...,x_k)$ sous une $(U,<)$-chaîne $(x_1,...,x_i)$, alors les radicaux $x_1,...,x_i$ sont tous agrippés par r — voir l'axiome fd-4; ainsi, $g_U(r)$ majore strictement les $g_U(x_1),...,g_U(x_i)$; le poids de la $(U,<)$-chaîne $(r, x_{i+1},...,x_k)$ majore donc strictement le poids de $(y_1,...,y_k)$.

Nous aurons besoin de la notion pour formaliser ces idées. Une justification technique suit leur introduction.

Définition 3.13 *Soit a et b deux termes, U un ensemble de radicaux de a et V un ensemble de radicaux de b. Soit $\mathbf{x}$ une $(U,<)$-chaîne, $\mathbf{y}$ une $(V,<)$-chaîne et μ un multi-ensemble. On définit comme suit la relation $\geq_\mu$:*

$$g_U(\mathbf{x}) \geq_\mu g_V(\mathbf{y}) \textit{ si pour tout multi-ensemble } \epsilon \textit{ tel que } \epsilon < \mu \textit{ on a}$$
$$g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y}) \overset{+}{\cup} \epsilon.$$

La propriété essentielle de $\geq_\mu$ est de rester vraie quel que soit l'ajoût au membre droit de multi-ensembles ϵ plus petits strictement que μ.

Lemme 3.14 *Si $g_U(\mathbf{x}) \geq_\mu g_V(\mathbf{y})$ et $\epsilon < \mu$ alors $g_U(\mathbf{x}) \geq_\mu g_V(\mathbf{y}) \overset{+}{\cup} \epsilon$.*

Démonstration: on part des hypothèses du lemme, $g_U(\mathbf{x}) \geq_\mu g_V(\mathbf{y})$. Si $\epsilon' < \mu$ alors $(\epsilon \overset{+}{\cup} \epsilon') < \mu$, d'où $g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y}) \overset{+}{\cup} (\epsilon \overset{+}{\cup} \epsilon')$. L'union de multi-ensembles est associative donc $g_U(\mathbf{x}) \geq (g_V(\mathbf{y}) \overset{+}{\cup} \epsilon) \overset{+}{\cup} \epsilon'$, ce dont on déduit que $g_U(\mathbf{x}) \geq_\mu (g_V(\mathbf{y}) \overset{+}{\cup} \epsilon)$ $\square$

L'introduction de $\geq_\mu$ en définition 3.13 facilite la démonstration du lemme 3.15, le lemme technique de ce chapitre. Soit U et V des ensembles finis de radicaux coinitiaux tels que $U[\![r]\!]V$, et $x[\![r]\!]y$ avec $x \in U$ et $r \in U$. Pour chaque $(V,<)$-chaîne $(y_1,...,y_n)$ une $(U,<)$-chaîne $(x_1,...,x_k)$ au départ de r ou au départ d'un radical x dont y est un résidu. Si la chaîne $(x_1,...,x_k)$ est au départ de x alors

$$g_U(x_1,...,x_k) \geq g_V(y_1,...,y_n)$$

Si la chaîne $(x_1,...,x_k)$ est au départ de x alors

$$g_U(x_1,...,x_k) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1,...,y_n)$$

Lemme 3.15 *Soit U et V deux ensembles finis de radicaux coinitiaux tels que $U[\![r]\!]V$ et $x[\![r]\!]y$ pour $r, x \in U$ et $y \in V$; soit $\mathbf{y}$ une $(V,<)$-chaîne de départ y. Alors*

1. *soit il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{x}$ au départ de x telle que $g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y})$,*
2. *soit $r \ll x$ et il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{r}$ au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y})$*

Démonstration par récurrence sur la longueur n de la suite $\mathbf{y} = (y_1,...,y_n)$.
Si $n = 1$ alors $g_U(x) \geq g_V(y)$ et donc $g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y})$ pour $\mathbf{x} = (x)$.
Si $n > 1$: on appelle: $x_1 = x$; il existe un radical x_2 de U tel que $x_2[\![r]\!]y_2$; on appelle $\mathbf{y_1}$ la séquence $\mathbf{y}$, et $\mathbf{y_2}$ la séquence $(y_2,...,y_n)$. On suppose par induction sur n que

1. soit il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{x}$ au départ de x telle que $g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y})$,

2. soit $r \ll x$ et il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{r}$ au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y})$

On tire deux cas d'après l'axiome fd-2 d'instantiation du fait que $y_1 < y_2$. L'hypothèse d'induction est elle-même séparée en deux: notre démonstration sera donc traitée en $2 \times 2 = 4$ sous-cas:

- si $x_1 < x_2$:
  - s'il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 telle que $g_U(\mathbf{x_2}) \geq g_V(\mathbf{y_2})$. D'après le lemme 3.10 l'entier $g_U((x_1))$ majore $g_V((y_1))$. On en déduit par concaténation que $g_U(x_1 \cdot \mathbf{x_2}) \geq g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$
  - si $r \ll x_2$ tandis qu'il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{r}$ au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$: alors d'après l'axiome fd-4 de convexité,
    - si $x_1 < r$ alors $g_U((x_1))$ majore $g_V((y_1))$ donc par concaténation $g_U(x_1 \cdot \mathbf{r}) \geq g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$,
    - si $r \ll x_1$ alors $g_U(r)$ majore strictement $g_U((x_1))$ parce que r agrippe x_1, et majore donc strictement $g_V((y_1))$ d'après le lemme 3.10. On déduit avec le lemme 3.14 que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2}) \overset{+}{\cup} g_V((y_1))$, ce qui établit que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$,
- si $r \ll x_1$ et $r < x_2$. On déduit tout de suite que $g_U(r)$ majore strictement $g_U((x_1))$ et donc $g_V((y_1))$ d'après le lemme 3.10.
  - s'il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 telle que $x_2 \geq \mathbf{y_2}$: la séquence $r \cdot \mathbf{x_2}$ est elle aussi une $(U,<)$-chaîne pour laquelle nous voudrions montrer que $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$. Soit ϵ un multi-ensemble d'entiers naturels quelconque que borne strictement $g_U(r)$. $g_U(r \cdot \mathbf{x_2})$ vaut $g_U(\mathbf{x_2}) \overset{+}{\cup} g_U(r)$ et majore donc $g_V(\mathbf{y_2}) \overset{+}{\cup} \epsilon$. Donc $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$. Le lemme 3.14 montre qu'en particulier $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2}) \overset{+}{\cup} g_V((y_1)) = g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$ parce que $g_U(r)$ majore strictement $g_V((y_1))$
  - si $r \ll x_2$ et il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{r}$ telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$; alors le lemme 3.14 assure que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2}) \overset{+}{\cup} g_V((y_1))$ c'est-à-dire $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$.

Nous savons maintenant que l'hypothèse d'induction peut être reportée dans les quatre sous-cas possibles, ce qui fait la démonstration du lemme.

□

Corollaire 3.16 (lemme de persistance de la <-chaîne) *Soit U et V deux ensembles finis de radicaux coinitiaux tels que $U[\![r]\!]V$ et $x[\![r]\!]y$ pour $r, x \in U$ et $y \in V$. Alors*

- *$h_U(x) \geq h_V(y)$, ou bien $h_U(r) > h_V(y)$*
- *dans le cas où $r < x$, alors $h_U(r) > h_V(y)$*

Démonstration: soit $\mathbf{y}$ la $(V,<)$-chaîne de poids maximum parmi les $(V,<)$-chaînes de départ y. Par construction: $g_V(\mathbf{y}) = h_V(y)$. Le lemme 3.15 nous permet de continuer:

- soit il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{x}$ au départ de x telle que $g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y})$; alors $h_U(x)$ majore $g_U(\mathbf{x})$ et donc $h_V(y)$ (qui vaut $g_V(\mathbf{y})$).

- soit $r \ll x$ et il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{r}$ au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y})$; alors $h_U(r)$ majore $g_U(\mathbf{r})$ et donc majore strictement $h_V(y)$ (qui vaut $g_V(\mathbf{y})$).

Dans le cas où $r < x$ alors par construction $h_U(r) > h_U(x)$ et donc $h_U(r) > h_V(y)$ dans les deux hypothèses que $h_U(x) \geq h_V(y)$, ou que $h_U(r) > h_V(y)$. $\square$

Le travail est fini, nous pouvons démontrer facilement la terminaison des développements d'un ensemble fini de radicaux coinitiaux:

Théorème 3.2 (lemme des développements finis FD+) *Soit $(\mathcal{D}, \uparrow, <, \ll)$ un système abstrait avec agrippement dont les relations $\ll$ et $<$ sont acycliques. Dans le cas où $(\mathcal{D}, <, \ll)$ vérifie les axiomes A, B, C, fd-1, fd-2, fd-3, fd-4. si$U$ est un ensemble fini de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles, alors tous les développements de U sont finis.*

Démonstration: soient U et V deux ensembles finis de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles, tels que $U[\![r]\!]V$ pour $r \in U$. Nous montrons que le multi-ensemble $\{\!\{h_V(y), y \in V\}\!\}$ est *strictement* majoré par $\{\!\{h_U(x), x \in U\}\!\}$. D'après l'axiome A, le radical r se trouve compté dans $\{\!\{h_U(x), x \in U\}\!\}$ sans contre-partie dans $\{\!\{h_V(y), y \in V\}\!\}$. D'après le corollaire 3.16 et l'axiome fd-1, les résidus $y \in V$ de radicaux $x \in U$ dupliqués par r ont une $\ll$-hauteur $h_V(y)$ *strictement* bornée par la $\ll$-hauteur de $h_U(r)$ de r. Les autres radicaux y de V, résidus de radicaux $x \in U$ non dupliqués, ont une $\ll$-hauteur bornée par celle de leur ancêtre x, ou par celle de r. Le multi-ensemble $\{\!\{h_V(y), y \in V\}\!\}$ est finalement majoré strictement par $\{\!\{h_U(x), x \in U\}\!\}$. $\square$

3.5 Appendice

Nous conseillons de sauter cette section et de reprendre en section 3.6 lors d'une première lecture.

Ici, nous démontrons le lemme des développements finis en relaxant la condition d'acyclicité sur les relations $\ll$ et $<$. A terme, ces résultats permettront de considérer des systèmes formels dont la syntaxe contient des cycles. Cette fois, les axiomes ne portent pas sur les radicaux seulement, mais aussi sur des suites de radicaux emboîtés ou agrippés.

Axiome premier

Le premier des axiomes interdit deux radicaux v' et v'' résidus de u par r d'être liés par une chaine de radicaux agrippés:

Petit axiome Z-1 (aucun agrippement parmi les résidus d'un même radical)**:** Soit $(r, u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n) \in \mathcal{R}^{2n+1}$ tels que $\forall i \in [1...n], r \uparrow u_i$, $\forall j \in [1...n], u_i \uparrow u_j$, et $u_i[\![r]\!]v_i$. Si $v_1 \ll v_2 \ll ... \ll v_n$, alors $u_1 \neq u_n$.

Théorème 3.3 *Soit $(\mathcal{D}, \uparrow, <, \ll)$ un système abstrait avec agrippement tel que $<$ est acyclique. et que les axiomes A, B, C, fd-1, fd-2, fd-3, fd-4 et Z-1 sont vérifiés. Alors le théorème des développements finis FD+ s'applique.*

Démonstration: on définit $g_U(x)$ comme le nombre maximum de radicaux différents dans une $(U, \ll)$-chaîne $x = x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll ... \ll x_n$. On montre que l'entier $g_U(x)$ ne croît pas par résidu: si $U[\![r]\!]V$, et $x[\![r]\!]y$ avec $x, r \in U$ alors $g_V(y) \leq g_U(x)$. En effet, si $r, x, y \in U$, $x[\![r]\!]y$ et $y[\![r]\!]y'$ avec $y \ll^* y'$ alors $x \ll^* y$: si $y = y_1 \ll ... \ll y_n$ pour des radicaux $y_i \in V$ alors $x = x_1 \ll^* ... \ll^* x_n$ pour les radicaux $x_i \in U$ qui vérifient $x_i[\![r]\!]y_i$. L'axiome Z-1 implique qu'on ne trouve pas deux fois le résidu $y_i = y_j$ d'un même radical x_i: ce qui établit $g_V(y) \leq g_U(x)$.

On montre aussi que si $r \ll x$ et $x[\![r]\!]y$ alors $g_U(r) > g_U(y)$: deux cas. Soit il existe une $(U, \ll)$-chaîne au départ de x de longueur maximum dont r ne fait pas partie ; alors $g_U(r) > g_U(x)$. Ou bien toutes les $(U, \ll)$-chaînes au départ de x et de valeur (maximum) $g_U(x) = g_U(r)$ contiennent r ; alors toute $(V, \ll)$-chaîne au départ de y correspond à une chaîne au départ de x dans le sens où elle contient un résidu (au plus) de chaque radical de cette chaîne ; puisque par l'axiome A cette $(V, \ll)$-chaîne ne contient pas de résidu de r, sa valeur est plus courte strictement que $g_U(x) = g_U(r)$. La démonstration de terminaison de la section précédente, voir le lemme 3.15, n'utilise que ces deux propriétés de l'entier $g_U(x)$. On peut donc reprendre tels quels démonstrations et résultat de terminaison des développements finis. □

Axiome second

Poussés un pas de plus dans notre généralisation, nous introduisons l'axiome Z-2 qui remplace dans le théorème 3.4 l'hypothèse que la relation $\ll$ est acyclique.

Petit axiome Z-2 (axiome second): Soit $(r, u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n) \in \mathcal{R}^{2n+1}$ tels que $\forall i \in [1...n], r \uparrow u_i$, $\forall j \in [1...n], u_i \uparrow u_j$, et $u_i[\![r]\!]v_i$. Si $v_1 < ... < v_n$ et $u_1 = u_n$, alors $r \ll u_1$ et $r < u_1$.

Théorème 3.4 *Soit $(\mathcal{D}, \uparrow, <, \ll)$ un système abstrait avec agrippement qui vérifie les axiome A, B, C, fd-1, fd-2, fd-3, fd-4, Z-1 et Z-1, Z-2. Alors le théorème des développements finis FD+ s'applique.*

Démonstration: à partir du lemme 3.15, dont nous utiliserons une variante. En effet, nous savions durant la démonstration du lemme 3.15 qu'un radical x_1 qui contient r ou x_2 ne peut pas se trouver dans une $(U, <)$-chaîne au départ de r ou de x_2. Or, ce n'est plus vrai ici, les hypothèses d'acyclicité sur $<$ ayant été relaxées. D'où le lemme suivant:

Lemme 3.17 *Soit U un ensemble fini dont r et x sont des éléments et $U[\![r]\!]V$ avec $x[\![r]\!]y$; soit* $\mathbf{y}$ *une $(V, <)$-chaîne de départ y. Alors*

1. *soit il existe une $(U, <)$-chaîne* $\mathbf{x}$ *au départ de x telle que $g_U(\mathbf{x}) \geq g_V(\mathbf{y})$ L'inégalité peut être raffinée en $g_U(\mathbf{x}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y})$ dans le cas où le radical r fait partie de* $\mathbf{x}$.

2. *soit $r \ll x$ et il existe une $(U, <)$-chaîne* $\mathbf{r}$ *au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y})$*

De plus, les radicaux de ces $(U, <)$-chaînes $\mathbf{r}$ *ou* $\mathbf{x}$ *ont un résidu dans* $\mathbf{y}$ *— excepté le radical r.*

Démonstration: il nous faut reprendre la démonstration du lemme 3.15 dans ce nouveau contexte, et l'étude des quatre sous-cas. Plutôt qu'une variante du lemme 3.15, nous en proposerons un commentaire, ce qui mettra bien en valeur les différences des deux démonstrations. La démonstration se fait ici encore par induction sur la longueur n de la $(V, <)$-chaîne $\mathbf{y}$ au départ de y. Le cas $n = 1$ est similaire. On reprend les notations si $n > 1$: on appelle $x_1 = x$; il existe un radical de U qu'on note x_2 tel que $x_2[\![r]\!]y_2$; on appelle $\mathbf{y_1}$ la séquence $\mathbf{y}$, et $\mathbf{y_2}$ la séquence $(y_2, ..., y_n)$. On suppose par induction sur n que

1. soit il existe une $(U, <)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 telle que $g_U(\mathbf{x_2}) \geq g_V(\mathbf{y_2})$ L'inégalité peut être raffinée en $g_U(\mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$ dans le cas où le radical r fait partie de $\mathbf{x_2}$.

2. soit $r \ll x_2$ et il existe une $(U, <)$-chaîne $\mathbf{r}$ au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$.

De plus, les radicaux de ces $(U, <)$-chaînes $\mathbf{r}$ ou $\mathbf{x}$ ont un résidu dans $\mathbf{y}$ — excepté le radical r.

Cette hypothèse supplémentaire est primordiale, que les radicaux des $(U, <)$-chaînes qu'on construit ont un résidu dans la $(V, <)$-chaîne initiale. Les quatre sous-cas reviennent:

- si $x_1 < x_2$:
  - s'il existe une $(U, <)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 telle que $g_U(\mathbf{x_2}) \geq g_V(\mathbf{y_2})$. Ce n'est plus le lemme 3.10, mais la démonstration du théorème 3.3 qui nous avertit que l'entier $g_U((x_1))$ majore $g_V((y_1))$. lorsque le radical x_1 ne se trouve pas déjà cité dans $\mathbf{x_2}$, on déduit par concaténation que $g_U(x_1 \cdot \mathbf{x_2}) \geq g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$ et que $g_U(x_1 \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$ si r apparait dans $\mathbf{x_2}$. Sinon, dans le cas où $x_1 = x_k$, on utilise notre hypothèse supplémentaire: le radical x_1 a pour résidu à la fois y_1 et un radical y_l de $\mathbf{y_2}$, avec $y_1 < ... < y_l$; l'axiome Z-2 force $r \ll x_1$ et $r < x_1$; on s'assure maintenant que $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$: si r n'apparait pas dans $\mathbf{x_2}$, on fait comme dans la démonstration du lemme 3.15 ; si r apparait déjà dans $\mathbf{x_2}$ on sait que $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) = g_U(\mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$, ce qui avec $g_V((y_1)) < g_U(r)$ assure de la propriété, voir le lemme 3.14.
  - si $r \ll x_2$ et il existe une $(U, <)$-chaîne $\mathbf{r}$ au départ de r telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$. D'après l'axiome fd-4 de convexité:
    * si $x_1 < r$: on construit $x_1 \cdot \mathbf{r}$. Si x_1 n'apparait pas dans $\mathbf{r}$ alors $g_U(x_1 \cdot \mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_U(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$ de la même manière qu'au cours de la démonstration du lemme 3.15. Sinon, $r \ll u_1$ et $r < u_1$
    d'après l'axiome Z-2 ; $g_U(r)$ en majore strictement $g_V((y_1))$ d'après la démonstration du théorème 3.3. Donc $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$ d'après le lemme 3.14, ce qui démontre a fortiori que: $g_U(x_1 \cdot \mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$.
    * si $r \ll x_1$ alors $\mathbf{r}$ convient, ce qui se démontre comme pour le lemme 3.15.

- si $r \ll x_1$ et $r < x_2$. On en déduit aussitôt que $g_U(r)$ majore strictement $g_V((y_1))$ d'après la démonstration du théorème 3.3.

  - s'il existe une $(U, <)$-chaîne $\mathbf{x_2}$ au départ de x_2 telle que $x_2 \geq \mathbf{y_2}$: la séquence $r \cdot \mathbf{x_2}$ est elle aussi une $(U, <)$-chaîne pour laquelle nous voudrions montrer que $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$. Soit ϵ un multi-ensemble d'entiers naturels quelconque que borne strictement $g_U(r)$. On agit de la même manière qu'au cours de la démonstration du lemme 3.15, sauf pour l'identification de $g_U(r \cdot \mathbf{x_2})$ avec $g_U(\mathbf{x_2}) \overset{+}{\cup} g_U(r)$, qui n'est possible et ne permet de démontrer le résultat que lorsque r n'apparait pas dans $\mathbf{x_2}$. Si au contraire r apparait dans $\mathbf{x_2}$ alors par hypothèse d'induction, $g_U(\mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$, tandis que dans ce cas $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) = g_U(\mathbf{x_2})$. On démontre ensuite que $g_U(r \cdot \mathbf{x_2}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$ avec le lemme 3.14.

– si $r \ll x_2$ et il existe une $(U,<)$-chaîne $\mathbf{r}$ telle que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2})$; alors $\mathbf{r}$ convient, comme lors de la démonstration du lemme 3.15: le lemme 3.14 assure que $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(\mathbf{y_2}) \overset{+}{\cup} g_V((y_1))$ c'est-à-dire $g_U(\mathbf{r}) \geq_{g_U(r)} g_V(y_1 \cdot \mathbf{y_2})$.

Nous n'avons pas vérifié l'hypothèse supplémentaire dans chaque sous-cas — cette cérification est pourtant immédiate: seul x_1 ou r peut être concaténé à $\mathbf{x_2}$ ou $\mathbf{r}$, et x_1 a pour résidu y_1 qui se trouve dans $y_1 \cdot \mathbf{y_2}$, la $(V,<)$-chaîne initiale. Le lemme est donc démontré par induction. □

3.6 Exemples

3.6.1 Le λ-calcul

Notre démonstration donne une nouvelle preuve du lemme pour le λ-calcul. La relation $<$ est l'ordre d'arbre défini en section 2.7.2. Nous reprenons pour la relation $\ll$ la définition donné en section 3.3.

Les axiomes A, B et fd-1 sont évidents. La relation $\ll$ est contenue dans $<$: pour cette raison les deux relations sont acycliques. Les axiomes fd-3 et fd-4 ont été vérifiés en cours de section 3.3. L'axiome fd-2 reste à démontrer. Supposons que u ne contient pas v et que $u[\![r]\!]u'$, $v[\![r]\!]v'$:

1. si r ne contient pas v alors u' ne contient pas v',

2. si r n'agrippe pas u alors r ne substitue pas sous u, c'est-à-dire que les radicaux que contient v' sont tous des résidus de radicaux que u contient. En particulier u' ne contient pas v'.

Par contraposition: si u' contient v' et u ne contient pas v alors r contient v et agrippe u. Ce qui démontre l'axiome fd-2 dans le cas du λ-calcul.

Nous faisons la remarque suivante. Dans le cas du λ-calcul, la démonstration que nous donnons du lemme FD peut être simplifiée en utilisant un RPO (recursive path ordering) sur les hauteurs $g_U(u)$ d'agrippement.

3.6.2 Systèmes avec règles d'équivalence: le cas général

Nous poursuivons ici le travail de la section 2.7.3. Soit un système à emboîtement $(\mathcal{D},<,\ll)$ qui vérifie les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4, et dont les relations $<$ et $\ll$ sont acycliques. Nous faisons les hypothèses suivantes 5. et 6. sur la relation $\simeq$. Soit quatres radicaux libres u, u', v et v' tels que u et v sont coinitiaux, u' et v' sont coinitiaux. Si $u \simeq u'$ et $v \simeq v'$, alors:

5.
$$u < v \iff u' < v'$$

6.
$$u \ll v \iff u' \ll v'$$

Nous définissons les relations $<_{\simeq}$ et *qgrips* sur le système abstrait $\mathcal{D}_{\simeq}$:

- $u <_{\simeq} v$ lorsqu'il existe deux radicaux libres $u_0 \in u$ et $v_0 \in u$ tels que $u_0 \uparrow v_0$ et $u_0 < v_0$,

- $u \ll_{\simeq} v$ lorsqu'il existe deux radicaux libres $u_0 \in u$ et $v_0 \in u$ tels que $u_0 \uparrow v_0$ et $u_0 \ll v_0$.

Les hypothèses 5. et 6. permettent de démontrer les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 sur le système à emboîtement $(\mathcal{D}_\simeq, \uparrow_\simeq, <_\simeq, \ll_\simeq)$.

Supposons un triplet (r, u, v) de radicaux: $(r, u, v) \in \mathcal{R}^3_\simeq$ tel que $r \uparrow_\simeq u$, $r \uparrow_\simeq v$ et $u \uparrow_\simeq v$. D'après l'hypothèse 4, il existe un triplet $(r_0, u_0, v_0) \in \mathcal{R}^3$ de radicaux libres tels que $r_0 \uparrow u_0$, $r_0 \uparrow v_0$, $u_0 \uparrow v_0$ et $r_0 \in r$, $u_0 \in u$ et $v_0 \in v$.

fd-4 si $u \ll_\simeq w$ et $v \ll_\simeq w$ alors: $u_0 \ll w_0$ et $v_0 < w_0$ avec les hypothèses 5. et 6., ce qui démontre $u_0 \ll v_0$ ou $v_0 < u_0$ avec l'axiome fd-2 sur $\mathcal{D}$. Donc $u \ll_\simeq v$ ou $v <_\simeq u$.

fd-1 si $u\langle r\rangle u'_1$ et $u\langle r\rangle u'_2$ et $u'_1 \neq u'_2$, alors $u_0[\![r_0]\!]u'_{10}$ et $u_0[\![r_0]\!]u'_{20}$ tels que $u'_{10} \not\simeq u'_{20}$. L'axiome fd-1 sur $\mathcal{D}$ implique $r_0 < u_0$. On conclut $r <_\simeq u$.

fd-2 si $u\langle r\rangle u'$ et $v\langle r\rangle v'$ alors par l'hypothèse 2. il existe deux radicaux libres $u'_0 \in u'$ et $v'_0 \in v'$ tels que $u_0[\![r_0]\!]u'_0$ et $v_0[\![r_0]\!]v'_0$. Supposons que $u' <_\simeq v'$. Par définition de $<_\simeq$, par l'hypothèse 5. et le fait que $u' \uparrow_\simeq v'$, on a $u'_0 < v'_0$, ce dont on déduit avec l'axiome fd-2 sur $\mathcal{D}$ que $u_0 < v_0$ ou ($r_0 \ll u_0$ et $r_0 < v_0$). On conclut que $u <_\simeq v$ ou $r \ll_\simeq u$ et $r <_\simeq v$).

fd-3 de la même manière que nous avons démontré fd-2 pour le système $\mathcal{D}_\simeq$.

Pour démontrer le lemme FD+ sur $\mathcal{D}_\simeq$, il reste à montrer que les relations $<_\simeq$ et $\ll_\simeq$ sont acycliques. En principe, la démonstration de ces deux acyclicités est immédiate dans les systèmes syntaxiques particuliers qu'une relation $\simeq$ quotiente.

On conclut. Soit un système à emboîtement FD qui vérifie les axiomes des développements finis A, B, C, fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4. Supposons que $\simeq$ vérifie les hypothèses 1, 2, 3, 4, 5 et 6 données en sections 2.7.3 et 3.6.2. Supposons que les propriétés de non cycle pour $<$ et $\ll$ sont vérifiées dans $\mathcal{D}_\simeq$. En appliquant le théorème 3.2, on obtient que le système $\mathcal{D}_\simeq$ vérifie la propriété des développements finis FD+.

Une démonstration directe

Plutôt que de démontrer les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 sur $\mathcal{D}_\simeq$, il est souvent préférable de déduire le lemme FD+ sur $\mathcal{D}_\simeq$ du lemme FD+ sur $\mathcal{D}$.

Il faut pour cela faire l'hypothèse suivante:

4+. soit $(u_i)_{i\in[1...n]}$ un ensemble fini de radicaux co-initiaux deux à deux compatibles: $\forall(i,j) \in [1...n]^2$, $u_i \uparrow_\simeq u_j$. Il existe un ensemble $(v_i)_{i\in[1...n]}$ de radicaux libres *coinitiaux* tels que $\forall i \in [1...n], v_i \in u_i$, et $\forall j \in [1...n], v_i \uparrow v_j$.

L'hypothèse 4+ renforce l'hypothèse 4 en portant sur un *ensemble* de radicaux deux à deux compatibles, non plus un triplet seulement.

3.6.3 Le γ-calcul

Le premier modèle

Nous poursuivons le travail de la section 2.7.4 en introduisant un ordre d'emboîtement et une relation d'agrippement dans notre premier modèle du γ-calcul.

1. un radical libre $u : p \to q$ emboîte un radical libre v de p lorsque une de ses occurrences est un prefixe strict des occurrences de v,

2. si u est un radical de commutation $Comm\odot$ ou $Comm|$ alors u n'agrippe aucun radical v,

3. un radical libre u de la forme
$$(\alpha x.p|\mathcal{P}) \odot (\bar{\alpha}.q|\mathcal{Q})$$
agrippe un radical libre v coinitial lorsque u emboîte v et qu'une des occurrences de v est le préfixe d'une occurrence de x.

La traduction au système $\mathcal{D}_{\simeq}$ est immédiate. Soit $u : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ et v deux radicaux coinitiaux.

1. le radical u emboîte le radical v lorsque le radical libre nf_u emboîte nf_v. On écrit $u < v$,

2. le radical u agrippe le radical v lorsque le radical libre nf_u agrippe nf_v. On écrit $u \ll v$.

Il est immédiat que la relation $<$ est un ordre et que la relation $\ll$ est inclus dans $<$, ce qui démontre que les deux relations sont acycliques. Les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 sont démontré à partir de la section 3.6.2, de la sorte:

1. utiliser la section 7.6 qui démontre les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 pour tous les CRS, et en particulier le système $\mathcal{D}$ des termes et radicaux libres.

2. utiliser que $\simeq$ vérifie les quatre hypothèses 1, 2, 3, 4 des sections 2.7.3 et 3.6.2.

On conclut le premier modèle abstrait a la propriété FD+.

Le modèle alternatif

L'axiome FD+ sur le modèle alternatif a été utilisé au cours de la section 2.7.4 pour démontrer la confluence d'un fragment du γ-calcul. L'ordre d'emboîtement et la relation d'agrippement sont facilement adaptés à cette interprétation alternative du calcul. Nous laissons au lecteur intéressé la vérification des axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 sur le système des termes et radicaux libres. La section 3.6.2 permet de conclure les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4 sur le système $\mathcal{D}_{\simeq}$ qu'on en dérive par quotient. La propriété FD+ suit.

3.6.4 Réseaux d'interaction, réseaux de preuve

La démonstration de la propriété FD est immédiate dans les réseaux d'interaction, puisque dans ces calculs aucun radical ne duplique.

Les réseaux de preuves peuvent coder les λ-termes. Cependant la démonstration de terminaison des développements est plus simple dans les réseaux que dans le λ-calcul: l'information sur les contractions propre à a logique linéaire est ici essentielle. En effet, il existe une paire critique entre le radical u qui "contracte la boite $!\pi$" et le radical v qui "introduit la boite $!\pi'$ dans la boite $!\pi$", ce qui empéche de développer $\{u, v\}$ comme un ensemble de radicaux compatibles. Du point de vue des développements finis les réseaux de preuve se comportent comme des systèmes (non orthogonaux) du premiers ordre. En comparaison, les deux radicaux u et v auraient pour alter ego dans le λ-calcul les deux radicaux:

$$\underline{u} : (\lambda y.\Delta\underline{\pi})\underline{\pi'} \to (\lambda y.\underline{\pi}\underline{\pi})\underline{\pi'} \quad \text{qui duplique } \underline{\pi}$$

et

$$\underline{v} : (\lambda y.\Delta\underline{\pi})\underline{\pi'} \to \Delta\underline{\pi}[\underline{\pi'}/y] \quad \text{qui introduit } \underline{\pi'} \text{ dans } \underline{\pi}$$

pour des λ-termes $\underline{\pi}$ et $\underline{\pi}'$. Les difficultés que pose l'axiome FD dans le cas du λ-calcul viennent du fait que contrairement à ce qui se passe dans les réseaux, les deux radicaux $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont compatibles.

Cela signifie en rapport à notre traitement abstrait que la relation d'agrippement sera inutile. La relation d'emboitement est définie comme suit:

Un radical u contient ($<$) un radical v si et seulement si
u est une réduction externe sur $!\pi$ et v un radical du réseau π.

Les relations A et B, la propriété 3.2 sont évidentes. Pour démontrer la propriété 3.3:

$$u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v', u' < v' \Longrightarrow u < v$$

il faut remarquer que:

- si u' contient v' c'est que u' est une réduction externe sur une boite π', qui provient donc d'une réduction v externe sur une boite π,
- v' se trouve dans π',
- si $u[\![r]\!]u'$, la boite π n'a pas pu être ouverte par une réduction combinatoire, sinon $u\#r$. Donc v est un radical de π, et u contient v

Les réseaux de preuves ont donc les développements finis. Le théorème 3.1 suffit pour le démontrer.

3.6.5 Le Π-calcul

Nous poursuivons le travail débuté en section 2.7.6. Il nous suffit de remarquer que la relation $\simeq$ vérifie les hypothèses 5. et 6. de la section 3.6.2. Le calcul des termes et radicaux libres est un CRS à nom, et pour cette raison, il vérifie les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4, voir le chapitre 3. Les relations $<$ et $\ll$ induites dans le système $(\mathcal{D}_{\simeq}, \uparrow_{\simeq})$ vérifie donc les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4. L'acyclicité de ces deux relations est immédiate. On en déduit que le Π-calcul vérifie la propriété FD+. En tant que fragment du Π-calcul, le Π_g-calcul vérifie aussi la propriété FD+.

Nous voulons faire la remarque suivante: il est possible d'utiliser plus directement le théorème 3.1 au lieu du théorème 3.2. En ce sens, le Π-calcul se comporte comme un calcul du premier ordre.

3.6.6 Les systèmes à réduction combinatoire (CRS)

Le calcul combinatoire est traité en chapitre 7.

Chapitre 4

Théorème de standardisation

Plan du chapitre:

4.1 Séquentialité et standardisation

Le lemme des développements finis nous a permis d'aborder le problème de la confluence pour une classe importante de systèmes de réécriture, les calculs orthogonaux d'ordre supérieur. On sait dans ces systèmes que le résultat d'un calcul est unique, qu'il ne dépend pas de la manière qu'on a choisi pour le calculer. Cette unicité est rassurante mais ne dit rien sur la manière de mener ce calcul pour qu'il atteigne un résultat quand il existe. Il importe donc de trouver des *stratégies* de calcul qui permettent de réécrire dans les endroits judicieux du terme. Nous le verrons, une telle stratégie existe dans le λ-calcul, qu'on appelle la stratégie *gauche*. C'est à partir de cette question des stratégies que nous nous proposons d'introduire la notion de standardisation.

Des stratégies de réduction aux tactiques de parcours

Une stratégie de réduction $\mathcal{S}$ est la donnée pour chaque terme M d'une dérivation $\mathcal{S}(M)$ qui correspond à ce que la stratégie propose de calculer à partir de M. On peut associer pour tout terme M la réduction $\mathcal{S}^+(M)$:

$$M = M_1 \overset{\mathcal{S}(M_1)}{\twoheadrightarrow} M_2 \overset{\mathcal{S}(M_2)}{\twoheadrightarrow} \dots \overset{\mathcal{S}(M_{i-1})}{\twoheadrightarrow} M_i \overset{\mathcal{S}(M_i)}{\twoheadrightarrow} M_{i+1} \dots$$

On dit d'une stratégie $\mathcal{S}$ qu'elle normalise lorsque pour tout terme M la réduction $\mathcal{S}^+(M)$ atteint une forme normale, si bien sûr M en possède une.

Il est naturel de demander à une stratégie de terminer pour être mise en œuvre en machine, mais d'autres propriétés viennent autant à l'esprit: qu'on puisse la décrire par un algorithme pour l'implanter en machine, et que l'algorithme soit économe en opérations pour que l'implantation soit efficace. Il est maladroit par exemple de vouloir analyser un terme dans sa totalité avant de choisir quel radical réduire: la machine y prendrait trop de temps. Mieux vaut choisir un moyen plus économe comme agir de manière *locale* sur le terme en vue de le traiter sans connaissance *globale* de son contenu. Chaque agent que la machine gère alors — ils peuvent être nombreux quand la machine est parallèle — devra prendre des décisions de réécriture à partir d'une connaissance partielle du terme, connaissance acquise par le *parcours* qu'il en a fait. L'efficacité nous pousse à choisir le mode de décision le plus immédiat: dès qu'un radical est traversé par le parcours de l'agent, il est réduit. Une fois le radical réduit, l'agent disparait ou il revient à un point fixé du terme ; en ce qui concerne les arbres syntaxiques l'agent repart de la racine par exemple.

Cette analyse nous amène à déplacer la question d'une *stratégie* de réduction — quels radicaux choisir — à la question d'une *tactique* de parcours — comment parcourir le terme, quel chemin choisir. Remarquons que plusieurs disciplines de parcours s'offrent à nous suivant le nombre d'agents (séquentialité ou parallélisme) et suivant le degré de déterminisme dans le choix des parcours. Il est important de bien comprendre laquelle de ces disciplines présente le plus de sens dans une étude des systèmes de réécriture.

Meilleur temps, nécessité des tâches

Le sentiment naturel nous dirige vers l'étude du mode parallèle. Seule cette discipline permet de traiter un calcul *en le temps (théorique) le meilleur* : des opérations que la machine séquentielle doit effectuer l'une après l'autre peuvent être menées de front par l'ensemble des agents de la machine parallèle. Néanmoins, il apparaît vite qu'une tactique parallèle peut manquer d'efficacité et néanmoins terminer, lorsque par exemple des agents lancés dans des calculs inutiles sont soudain effacés par d'autres agents qui réduisent simultanément dans des endroits plus judicieux. Dès lors, une tactique de parcours peut terminer sans que les réductions correspondantes ne soient toutes nécessaires. S'il y a optimalité en temps rien n'assure donc qu'il y ait *nécessité des tâches entreprises.* Dans cet écart théorique entre deux objectifs, meilleur temps contre maîtrise des tâches, c'est la maîtrise des tâches qui l'emporte. Comprendre quelles tâches sont nécessaires au calcul concourt à une meilleure gestion des calculs — parallèles ou séquentiels — et à leur efficacité. Tout compte fait la recherche de l'efficacité passe après cette analyse des nécessités: le nombre d'agents d'une machine réelle est toujours borné, il faut donc que chaque agent calcule au plus juste.

Or, la discipline séquentielle entretient un rapport plus net que la discipline parallèle avec cette structure des tâches que nous mettons à l'étude. C'est ce lien théorique entre séquentialité et structure des tâches que nous nous proposons d'éclaircir maintenant.

Séquentialité

Nous montrons de manière informelle comment correspondent dans le cadre séquentiel la terminaison d'une tactique de parcours déterministe et la nécessité de chacune des tâches qu'elle entreprend. Nous en reprenons l'idée à Huet et Lévy [HL 79]: soit une tactique sur un terme M normalisable que sa maladresse fait aboutir sur une partie du terme inutile au calcul, c'est-à-dire telle qu'une certaine dérivation l'efface. La tactique peut encore normaliser, par exemple si toutes les stratégies de calcul normalisent (normalisation forte). On sait alors transformer le système pour que la stratégie ne termine pas: on rajoute un opérateur $\perp$ dit de non-terminaison, associé à une règle $\perp \to \perp$. Si dans M on remplace par $\perp$ le terme inutile sur lequel est arrivé le parcours on obtiendra un terme sur lequel le parcours atteint $\perp$ au lieu d'un terme superflu. Arrivé là, $\perp$ est réduit en $\perp$. L'agent — seul dans le terme et déterministe — reprend son parcours de la racine par exemple, et retourne à $\perp$. Ce comportement a la conséquence que la stratégie associée boucle sur le nouveau terme qui possède pourtant une forme normale, parce que $\perp$ peut être effacé, comme le sous-terme qu'il remplace. Après transformation élémentaire du système initial, la correspondance est établie entre l'utilité des tâches et la terminaison des tactiques. Voilà la raison qui nous pousse à étudier d'abord les tactiques de parcours déterministes et séquentielles: elles seules entretiennent une relation étroite à la notion de nécessité des tâches. On dira dorénavant qu'un système de réécriture est *séquentiel* lorsqu'il admet une tactique de parcours séquentielle, déterministe et normalisante.

Du théorème de standardisation à la séquentialité: le cas du λ-calcul

Le λ-calcul est séquentiel: il y existe une stratégie normalisante à laquelle correspond immédiatement une tactique séquentielle. Cette stratégie, qu'on appelle la stratégie normale, ou gauche, réduit à chaque étape le radical le plus extérieur et le plus à gauche du terme. Pour le λ-terme $Ka(\Delta\Delta)$ par exemple avec $K = \lambda xy.x$ et $\Delta = \lambda x.xx$, la réduction normale:

$$Ka(\Delta\Delta) \to (\lambda y.a)(\Delta\Delta) \to a$$

atteint le résultat a tandis que la stratégie disons "droite" boucle en réduisant perpétuellement $\Delta\Delta$ en $\Delta\Delta$. La tactique de parcours associée consiste à partir de la racine du terme et choisir parmi les parties non parcourues celle la plus à gauche. Trouver cette tactique est simple. Le plus laborieux dans la preuve de séquentialité est de montrer que la stratégie gauche termine.

Cette propriété de terminaison est un corollaire du théorème de standardisation. Une dérivation

$$M_0 \overset{R_1}{\to} M_2 \overset{R_2}{\to} M_2 \ldots \overset{R_n}{\to} M_n$$

est *standard* lorsque pour tout i, j tel que $i < j$, le radical R_j n'est pas un résidu par $(R_i \cdots R_{j-1})$ d'un radical R'_i plus extérieur ou plus à gauche que R_i dans M_{i-1}. Quand un radical est contracté dans une réduction standard aucun des radicaux à sa gauche ou plus extérieur ne peut être contracté ensuite. On peut donc dire que la dérivation standard réduit de haut en bas et de gauche à droite.

Il est évident que les dérivations qui proviennent de la stratégie gauche, qu'on appelle les dérivations "plus extérieures, plus à gauche", sont des dérivations standards. D'autres dérivations sont standards néanmoins, comme par exemple la dérivation:

$$I(Ka(\Delta\Delta)) \to I((\lambda y.a)(\Delta\Delta)) \to Ia$$

où $I = \lambda x.x$. Le théorème de standardisation, voir [Cur 58], assure que si $M \to^* N$ alors il existe une dérivation standard de M à N.

On comprend ce qui permet de réorganiser les calculs de l'extérieur vers l'intérieur: la réduction d'un radical peut toujours être repoussée après celle d'un radical qui le contient. Les raisons qui entraînent le mouvement de gauche à droite sont plus subtiles. Intuitivement, les radicaux ne peuvent être créés que vers la droite et jamais vers la gauche. La comparaison des λ-termes $M(\Delta\Delta)$ et $(\Delta\Delta)M$ convaint de ce caractère dissymétrique. Il est impossible dans $(\Delta\Delta)M$ qu'un radical de M produise un radical v qui contienne $\Delta\Delta$. Au contraire dans $M(\Delta\Delta)$, si $M = (\lambda x.\lambda y.x)a$ alors le radical u

$$M(\Delta\Delta) = (\lambda x\lambda y.x)a(\Delta\Delta) \overset{u}{\to} (\lambda y.a)(\Delta\Delta) \overset{v}{\to} a$$

crèe sur sa droite un radical v capable d'effacer le sous-terme $\Delta\Delta$. En conséquence $(\Delta\Delta)M$ se réduit toujours en des λ-termes de la forme $(\Delta\Delta)N$ tandis que $M(\Delta\Delta)$ a une forme normale pour certains λ-termes M.

Ce comportement de la création confère au λ-calcul cette orientation *gauche-droite* décrite par le théorème de standardisation, orientation qui cesse avec l'introduction des δ-règles importées de systèmes de réécriture du premier ordre.

Le théorème de standardisation: les systèmes du premier ordre

Prenons par exemple le système:

$$\begin{gathered} A \rightarrow A \\ B \rightarrow C \\ F(x, C) \rightarrow D \end{gathered}$$

Alors la réduction "la plus à droite" appliquée à $F(A, B)$:

$$F(A, B) \rightarrow F(A, C) \rightarrow D$$

atteint la forme normale tandis que la stratégie "la plus à gauche" boucle sur $F(A, B)$.

L'orientation des stratégies normalisantes dépend donc des mécanismes de création et de leurs orientations. On pressent qu'il existe dans tous les systèmes le moyen de définir une réduction *canonique* qui représente le minimum (aux duplications près) pour atteindre la forme normale. La structure de cette réduction pourra être subtile. Au sein du même système des opérateurs déterminent des réductions "plus à droite", d'autres des réductions "plus à gauche", tandis que pour d'autres cela dépend de leurs arguments. La réduction doit tenir compte de chacune de ces orientations. Huet et Lévy ont réussi à construire de cette manière une notion compliquée de dérivation standard dans les systèmes *orthogonaux* du premier ordre [HL 79], et à prouver le théorème de standardisation. Leur définition est très technique du fait qu'elle mélange la structure des radicaux et des résidus avec la structure syntaxique sous-jacente.

Nous profiterons dans ce qui suit d'un renversement du point de vue. L'approche abstraite permet de traiter un système à partir de l'espace des dérivations qu'il induit. Les phénomèmes d'orientation que décrivaient Huet et Lévy à l'intérieur de la syntaxe, nous les décrirons à partir d'un jeu structurel entre radicaux, résidus et relation d'emboîtement. Ce point de vue nous permet de dépasser la question des orientations et de revenir à l'idée originelle: nous affirmons que la dérivation standard est d'abord la dérivation *la plus extérieur* dans la classe $\equiv$ des dérivations. Les phénomènes d'orientation "gauche-droite" ou "droite-gauche" ne sont que le résultat de la structure de cet espace, et une illusion syntaxique.

Ce traitement des dérivations standards nécessite une connaissance *globale* de l'espace des dérivations, radicaux, résidus, et relation d'emboîtement. L'exploration de cet espace passe par les permutations de radicaux qui font apparaître au sein des calculs des rapports d'emboîtement autrement invisibles.

Séquentialité et standardisation

Comment lier le théorème de standardisation et le problème de savoir si un système est séquentiel? Dans le cas du λ-calcul, standardisation implique séquentialité. Qu'en est-il des autres systèmes? Nous verrons que le théorème de standardisation implique l'existence dans chaque terme d'un radical extérieur nécessaire à l'obtention de la forme normale (si elle existe). Ce radical est simple à trouver dans un λ-terme: c'est le radical "le plus à gauche-le plus extérieur" qui n'est jamais dupliqué au cours des réductions. Il existe par contre des systèmes pour lesquels aucune tactique séquentielle ne sait déterminer de radical extérieur nécessaire. Le plus simple de ces systèmes est celui dit de Gustave [Ber 79] et défini par:

$$\begin{array}{ll} F(x,A,B) \to C & \\ F(B,x,A) \to C & \qquad\qquad \bot \to \bot \\ F(A,B,x) \to C & \end{array}$$

Le parcours déterministe arrivé à un symbole F doit prendre une décision sur le prochain index à inspecter — sans que les sous-termes de F n'aient d'incidence sur son choix. Quelle que soit la direction choisie sur le symbole F rencontré en racine on sait trouver un terme normalisable: $F(\bot, A, B)$, $F(B, \bot, A)$ ou $F(A, B, \bot)$ pour lequel la stratégie boucle.

Un tel système marque le territoire étroit qui sépare la notion de *stabilité* des calculs et celle de leur *séquentialité*. Le théorème de standardisation est un théorème d'*existence*: il existe dans chaque terme un radical nécessaire ; le théorème de séquentialité est un théorème d'*uniformité*: on peut à partir d'une connaissance partielle du terme *deviner* où doit se trouver un radical solution du théorème de standardisation.

Plan du chapitre

La section 4.1 a introduit le problème de la standardisation à partir de la question des stratégies de calcul et de la séquentialité. La section 4.2 trace un historique du théorème de standardisation et situe notre travail dans cet espace.

La section 4.3 introduit les axiomes et constructions liées au théorème de standardisation dans le cadre orthogonal. Deux axiomes, les axiomes I et II, permettent de définir les permutations *carrée* et *standardisante* et de construire le préordre de *standardisation* $\trianglelefteq$ à partir de ces permutations. Une dérivation standard est une dérivation $\trianglelefteq$-minimale. Deux axiomes supplémentaires, les axiomes III et IV, sont introduits en fin de section. Ils cherchent à traduire en terme de réécriture la notion de stabilité développée par Gérard Berry dans un cadre plus sémantique [Ber 79].

La section 4.4 démontre le théorème de standardisation à partir des axiomes I, II, III et IV. Plus précisement nous montrons qu'il existe pour chaque dérivation d une dérivation standard unique à permutations carrées près. Cette dérivation correspond à la dérivation standard décrite par les approches plus traditionnelles de [Cur 58] et [HL 79]. La démonstration du théorème de standardisation est simplifiée par l'introduction d'une macro R où $u\mathsf{R}v$ signifie que le radical u ne contient pas le radical v. Les axiomes I, II, III et IV introduits en section 4.3 sont traduits en sept critères pour s'appliquer directement à R.

La section 4.5 montre comment étendre l'axiomatique de la section 4.3 pour l'appliquer aux systèmes qui contiennent des paires critiques. Quatre nouveaux axiomes I, II, III et IV sont proposés dans ce contexte plus général. Nous montrons qu'ils impliquent les sept critères de la section 4.4 lorsque $u\mathsf{R}v$ signifie que $u \uparrow v$ et $u \not\leq v$. En ce sens, la démonstration de la section 4.4 s'applique aussi bien aux systèmes orthogonaux qu'aux systèmes non orthogonaux.

La section 4.6 démontre à partir des axiomes I et II la partie "existence" du théorème de standardisation: Il existe pour chaque dérivation une dérivation standard plus petite qu'elle dans l'ordre de standardisation. Comme le montrera l'exemple du "ou parallèle" (voir section 4.4) cette dérivation standard n'est en général pas unique (modulo permutations carrées) dans sa classe $\equiv$ de permutation. On peut donc interpréter les deux axiomes III et IV comme le moyen de démontrer un résultat d'unicité modulo permutations carrées sur la dérivation standard associée à une classe de permutation.

La section 4.7 démontrent quelques résultats importants dans la suite de notre étude. La section 4.8 explique pourquoi nos axiomes ne décrivent pas les graphes acycliques. La section

4.9 étudie quelques exemples de systèmes qui vérifient notre axiomatique.

4.2 Le théorème de standardisation

Nous traçons en quelques traits le cheminement du théorème de standardisation:

- Le théorème de standardisation est découvert par Curry [Cur 58] sur le λ-calcul: si $M \to^* N$ et N est en forme normale alors il existe une dérivation *standard* de M vers N. La définition de dérivation standard que Curry propose est simple parce que l'ordre qu'il définit sur les λ-radicaux est total: c'est l'ordre "plus à gauche-plus extérieur".

- Jean-Jacques Lévy démontre [Lév 78] un résultat d'unicité à partir de son travail sur l'espce des dérivations: il y a une dérivation standard et une seule dans chaque classe d'équivalence $\equiv$.

- Jan Willem Klop [Klo 80] donne une nouvelle preuve du théorème de Lévy et le généralise aux λ-calculs augmentés de δ-règles normales gauches. "Normal gauche" signifie ici que le processus de création de radical est orienté de la gauche vers la droite. Sa preuve est abstraite: seul le lemme des développements finis est utilisé et des propriétés syntaxiques très simples.

- Gérard Huet et Jean-Jacques Lévy [HL 79] prouvent le théorème de standardisation dans les systèmes de réécriture orthogonaux du premier ordre. La définition de dérivation standard doit être révisée pour tenir compte d'un ordre d'emboitement qui n'est pas total, contrairement à l'ordre "plus à gauche-plus extérieur" du λ-calcul. La définition retenue par les deux auteurs utilise la notion syntaxique d'*occurrence* de symbole qui permet de suivre la position d'un radical déjà réduit et sa participation à des radicaux ultérieurs. Cette technique que nos principes abstraits interdiront permet de reconnaître parmi des radicaux disjoints lesquels produisent "dans le futur" les radicaux les plus extérieurs. Le théorème contient un résultat d'unicité similaire à celui obtenu pour le λ-calcul.

- Gérard Boudol [Bou 85] étend la démonstration du théorème de standardisation proposée par Huet et Lévy aux systèmes de réécriture du premier ordre qui contiennent des paires critiques. Il obtient de la sorte le premier résultat de standardisation dans des systèmes non déterministes.

- récemment, David Clark et Richard Kennaway [CK 95] généralisent la démonstration de Boudol-Huet-Lévy au cadre des graphes acycliques qui contiennent des paires critiques. La démonstration analyse les différents chemins qui mènent d'un radical à la racine du graphe, voir notre partie 4.9.

Bizarrement, et parce que le problème est techniquement dur, les définitions de dérivation standard ne correspondent pas exactement dans le λ-calcul (Curry) et les systèmes du premier ordre (Boudol-Huet-Lévy). La définition du λ-calcul repose sur la structure abstraite et ordonnée des radicaux tandis que celle des systèmes du premier ordre part des considérations syntaxiques liées aux occurrences. Il fallait déterminer au début de notre travail quel traitement simultané du théorème pourrait résoudre les différences entre ces deux développements. Notre objectif était d'imposer une définition générale de dérivation standard et de pouver le théorème de standardisation à partir de propriétés dynamiques communes au λ-calcul et aux systèmes du premier ordre. L'application à des systèmes nouveaux en découlerait.

En 1992, nous avons proposé avec Georges Gonthier et Jean-Jacques Lévy [GLM 92] une notion abstraite de dérivation standard. L'étude de l'espace des dérivations est mené à partir des relations de résidus et d'emboîtement entre radicaux, ce qui interdit l'emploi parasite de la syntaxe sous-jacente. Le théorème de standardisation est ensuite prouvé à partir de quatre axiomes élémentaires sur les deux relations. La description englobe le λ-calcul et les systèmes orthogonaux du premier ordre, mais aussi les systèmes de Réduction Combinatoire et certains systèmes de graphe. Les résultats de standardisation sont ainsi unifiés sous un seul formalisme et généralisés à d'autres domaines.

Ces résultats sont encourageants. Ils nous ont amené à vouloir mieux comprendre dans le cadre de cette thèse la définition de dérivation standard telle que nous la proposions dans l'article initial, qui définit une dérivation standard comme une dérivation qui ne contient aucun "conflit carré", voir [GLM 92]. Ce critère parce qu'il est récursif sur la longueur de la dérivation simplifie les preuves. Pourtant, nous le trouvons trop compliqué conceptuellement, en tout cas difficile à imposer. Nous décidons ici de refondre la définition de standardisation autour de la notion de permutation qui est plus élémentaire. Nous proposons donc la définition de standardisation à laquelle nous sommes finalement arrivés et qui nous apparait être la meilleure:

> Standardiser une dérivation consiste à réorganiser l'ordre de ses opérations afin de l'obtenir sous une forme canonique, dite *standard*. Ce réarrangement s'effectue au moyen de permutations entre radicaux successifs avec pour objectif d'amener les réductions les plus extérieurs au début de la dérivation. Une dérivation est standard lorsque le processus de standardisation par permutation s'arrête.

Cette nouvelle définition plus forte que la précédente (= sans conflit) lui est équivalente dans un système abstrait qui vérifie tous les axiomes de [GLM 92]. Elle nous semble reprendre le problème de la standardisation à sa source en plaçant les dérivations standards dans le cadre plus général d'un processus de standardisation. Bien sûr la manipulation de structures plus élémentaires (les permutations) oblige à prouver des propriétés d'*invariants* sur les classes de dérivation, ce que la définition inductive permettait d'éviter. Mais pour finir le travail d'analyse que la constitution de ces invariants nécessite débouche sur des preuves plus sûres et des constructions plus claires. Simultanément, certains axiomes importants peuvent être affaiblis ce qui est l'objectif naturel d'un travail axiomatique.

4.3 Les systèmes orthogonaux

Nous considérons dans cette section un système abstrait $(\mathcal{D}, <)$ avec emboîtement, tel que $\mathcal{D}$ est orthogonal, c'est-à-dire vérifie les axiomes A, B, FD et PERM. Nous ajoutons l'hypothèse que deux radicaux différents ne peuvent avoir de résidu en commun.

Petit axiome D (unicité de l'ancêtre): Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $u' = v'$ alors $u = v$.

Nous supposerons que la relation $<$ est un ordre. Nous introduisons les quatre axiomes sur cet ordre d'emboîtement $<$ et la loi de résidu $[\![\cdot]\!]$, quatre axiomes qui entrainent le théorème de standardisation dans le système $(\mathcal{D}, <)$.

1. les axiomes I et II permettent de démontrer en section 4.6 l'existence d'une dérivation standard dans chaque classe d'équivalence $\equiv$,

2. l'exemple du "ou parallèle" montre que les deux premiers axiomes n'impliquent pas l'unicité des dérivations standards,

3. les axiomes III et IV assurent que la dérivation standard est unique dans chaque classe d'équivalence, voir la section 4.4.

L'axiome I de linéarité

L'axiome 3.3 du chapitre 3 limite les cas de duplication aux radicaux emboîtés: un radical r ne duplique que les radicaux qu'il contient. L'axiome I est plus strict puisqu'il s'applique aussi aux cas d'effacement: un radical r ne duplique ou n'efface que les radicaux qu'il contient. Cette propriété décrit les systèmes de réécriture linéaires gauches où aucune variable libre n'apparait deux fois dans une partie gauche de règle, voir [HL 79] et notre étude de la réécriture combinatoire en section 7.1. La propriété a été remarquée par de nombreux auteurs, par exemple [Cur 58][O'D 77], qui s'en servent pour justifier leur notion d'emboîtement:

Axiome I Linéarité
Soit deux radicaux coinitiaux r et u. Ils vérifient: $r \not\leq u \Longrightarrow \exists! u', u[\![r]\!]u'$.
On peut représenter l'axiome par un dessin sur les arbres syntaxiques. Le dessin schématise un terme avec des triangles intérieurs qui correspondent aux radicaux. Le fil qui lie u à r indique que $u < r$, son absence entre u et v que $u \not\leq v$.

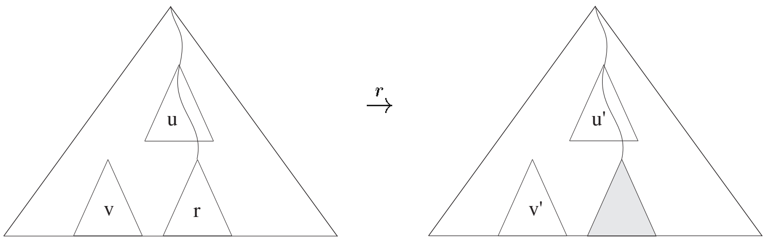


Figure 4.1: axiome de linéarité

Permutations carrées, standardisantes, dérivations standards

Une fois l'axiome de linéarité énoncé on peut distinguer parmi les permutations de radicaux à la Lévy celles qui permutent des radicaux disjoints $u \parallel v$ (c'est-à-dire $u \not\leq v$ et $v \not\leq u$) et celles qui permutent des radicaux emboités $u < v$.

Définition 4.1 (permutation carrée) *Deux dérivations d et e sont dites identiques à une permutation carrée près lorsque $d = d_1 \cdot u \cdot v' \cdot d_2$ et $e = d_1 \cdot v \cdot u' \cdot d_2$ où $u \parallel v$ et $u[\![v]\!]u'$, $v[\![u]\!]v'$. On note en ce cas $d \diamond^1 e$*

Par exemple, dans le λ-calcul avec l'ordre d'arbre syntaxique:

$$M \xrightarrow{d_1}\!\!\!\!\to PQ \xrightarrow{u} P'Q \xrightarrow{v'} P'Q' \xrightarrow{d_2}\!\!\!\!\to N \quad \diamond^1 \quad M \xrightarrow{d_1}\!\!\!\!\to PQ \xrightarrow{v} PQ' \xrightarrow{u'} P'Q' \xrightarrow{d_2}\!\!\!\!\to N$$

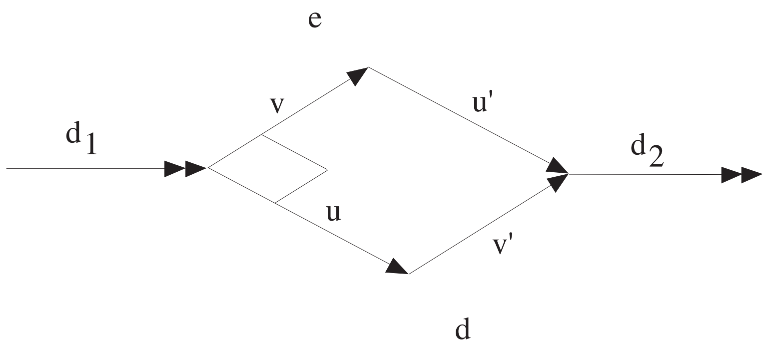


Figure 4.2: schèma de permutation carrée

Du point de vue de la standardisation les dérivations $d_1 \cdot u \cdot v' \cdot d_2$ et $d_1 \cdot v \cdot u' \cdot d_2$ sont équivalentes. La permutation carrée joue donc le rôle de permutation *neutre*. Elle a pour fonction de réorganiser les dérivations pour y faire apparaître les occasions de standardiser véritablement. Pour cette raison la clôture transitive de $\diamond^1$ joue un rôle essentiel dans nos constructions. Elle permet de passer d'une dérivation à une autre qui du point de vue de la standardisation lui est exactement équivalente.

Définition 4.2 (carré-équivalente) *On note $\diamond$ la clôture transitive de $\diamond^1$. Cette relation est symétrique et est donc une relation d'équivalence. On dira lorsque $d \diamond e$ que d et e sont identiques à permutations carrées près, ou plus simplement équivalentes carré.*

La clôture transitive $\diamond$ réorganise les dérivations sans en perturber le degré de standardisation. Elle prépare la standardisation c'est-à-dire la permutation d'un radical extérieur avant un radical intérieur, opération que la permutation *standardisante* effectue.

Définition 4.3 (permutation standardisante) *Une dérivation d est dite obtenue par une permutation standardisante sur e lorsque $d = d_1 \cdot u \cdot f \cdot d_2$ et $e = d_1 \cdot v \cdot u' \cdot d_2$ où $u < v$ et f est un développement de $v[\![u]\!]$, et $u[\![v]\!]u'$. On note cette relation $d \angle e$.*

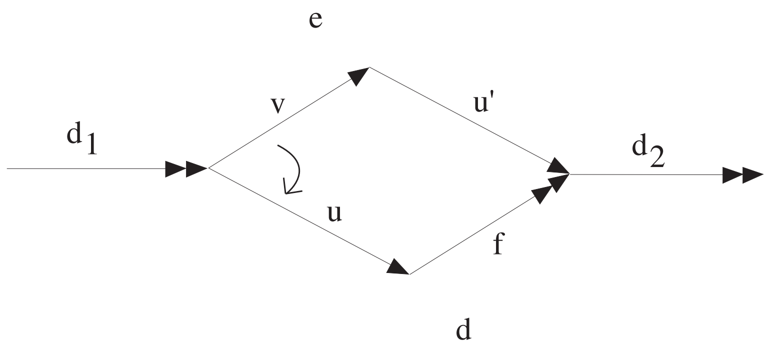


Figure 4.3: permutation standardisante

Par exemple dans le λ-calcul avec ordre d'arbre:

$$M \overset{d_1}{\twoheadrightarrow} \Delta P \overset{u}{\to} PP \overset{v_1}{\to} P'P \overset{v_2}{\to} P'P' \overset{d_2}{\twoheadrightarrow} N \;\;\angle\;\; M \overset{d_1}{\twoheadrightarrow} \Delta P \overset{v}{\to} \Delta P' \overset{u'}{\to} P'P' \overset{d_2}{\twoheadrightarrow} N$$

La dérivation d dans $d\angle e$ réduit le radical extérieur avant les résidus du radicaux intérieur tandis que la dérivation e réduit d'abord le radical intérieur puis le résidu du radical extérieur. Standardiser c'est finalement réécrire les dérivations par permutations standardisantes modulo les permutations carrées. Nous définissons notre préordre de standardisation suivant cette idée.

Définition 4.4 (ordre plus standard) *On écrit $d \trianglelefteq^1 e$ lorsque $d\angle e$ ou $d\Diamond e$. Le préordre $\trianglelefteq$ est la clôture transitive de cette relation, et $d \triangleleft e$ lorsqu'il existe d' et e' tels que $d \trianglelefteq d'\angle e' \trianglelefteq e$. Une dérivation d est dite plus standard que e lorsque $d \trianglelefteq e$.*

Chaque classe de permutation carrée $\Diamond$ représente une manière de calculer qu'on peut standardiser au moyen des permutations standardisantes. Les classes $\Diamond$ sont donc stratifiées entre elles par le préordre $\trianglelefteq$ qui porte autant sur elles que sur les dérivations: si $d_1\Diamond d_2$ et $e_1\Diamond e_2$ alors $d_1 \trianglelefteq e_1$ équivaut à $d_2 \trianglelefteq e_2$. Dans cette stratification certaines classes $\Diamond$ sont plus standard que d'autres. On en arrive à la définition suivante de dérivation standard, fondée sur la *minimalité*.

Définition 4.5 (dérivation standard) *Une dérivation est standard lorsqu'elle appartient à une classe $\Diamond$ minimale pour le préordre $\trianglelefteq/\Diamond$.*

Rappel 4.1 *Un élément x dans un préordre $\prec$ est dit minimal lorsque $y \prec x$ implique que $x \prec y$.*

Autrement dit une dérivation e est standard lorsque pour toute dérivation d:

$$d \trianglelefteq e \Longrightarrow e \trianglelefteq d$$

Attention: $f \trianglelefteq g$ et $g \trianglelefteq f$ n'implique pas nécessairement que $f\Diamond g$. Nous donnons l'exemple en section 4.8.1 d'un système abstrait dans lequel $\trianglelefteq/\Diamond$ n'est pas un ordre mais seulement un préordre. Le processus de standardisation peut donc contenir des boucles ! L'axiome II que nous introduisons interdit ce comportement énigmatique quand il s'agit des dérivations standards. Si la dérivation e est standard, le lemme 4.55 montre que pour toute dérivation d:

$$d \trianglelefteq e \Longrightarrow e\Diamond d$$

Le fait que $\trianglelefteq/\Diamond$ n'est pas un ordre est le signe que des systèmes inaccoutumés peuvent être standardisés selon notre axiomatique. L'important est que nos axiomes A, B, FD, PERM, I et II permettent de prouver en section 4.6 qu'il existe pour chaque dérivation d une dérivation standard e plus standard que d. Cette axiomatique peut être renforcée de telle manière que $\trianglelefteq/\Diamond$ soit un ordre, comme nous le faisons en section 4.8.1.

L'axiome II de non-contextualité

Soit cinq radicaux radicaux r, u, v, u' et v' tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Dans le cas où r ne contient pas v l'axiome II impose que par réduction ce radical r ne peut:

-A- ni placer v sous le radical u:

$$u \not\leq v \Rightarrow u' \not\leq v'$$

-B- ni retirer v de son emboîtement:

$$u < v \Rightarrow u' < v'$$

Par contre, le radical r peut manipuler en toute liberté un radical v qu'il contient:

-C- soit en plaçant v sous le radical u: $u \not< v$ et $u' < v'$

-D- soit en le sortant de son emboîtement: $u < v$ et $u' \not< v'$,

sans que pour cela le radical r ait à contenir le radical u. Notre travail présenté en [GLM 92] était plus restrictif puisqu'il obligeait le radical r à contenir le radical u pour un comportement aussi libéral que -C- et -D-.

Axiome II Non-Contextualité
Soit r, u, v, u' et v' cinq radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Ils vérifient la propriété suivante:

$$(u < v \iff u' < v') \text{ ou } r < v.$$

L'axiome peut être représenté comme suit dans le cas des arbres:

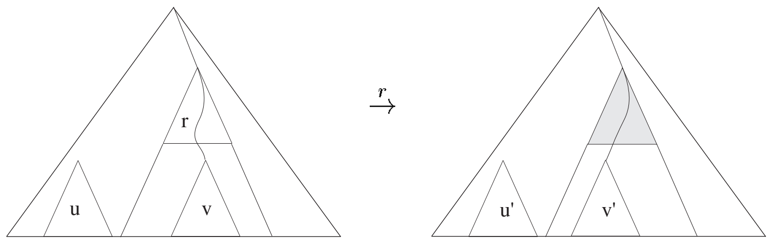


Figure 4.4: axiome de non contextualité

Les axiomes I et II décrivent de façon abstraite le comportement des systèmes contextuels libres et linéaires gauches. Nous montrons dans la partie 4.6 que toute dérivation dans ces systèmes peut être réorganisée en dérivation standard:

Théorème 4.1 (Existence) *Supposons qu'un système abstrait avec emboîtement $(\mathcal{D}, \leq)$ vérifie les axiomes A, B, C, D, FD+, PERM+, I et II. Alors, pour toute dérivation d il existe une dérivation standard d_{std} telle que $d_{std} \trianglelefteq d$.*

Unicité et radicaux nécessaires

Le théorème d'existence permet de ramener l'étude d'une classe d'équivalence $\equiv$ à celle des dérivations standards qu'elle contient. Chacune de ces dérivations décrit une façon particulière de mener le même calcul. L'exemple du "ou parallèle" *por* illustre bien cette situation:

$$\begin{array}{rl} A \to B & \\ por(B,x) \to B & \text{règle gauche} \\ por(x,B) \to B & \text{règle droite} \end{array}$$

Quatre dérivations réduisent $por(A,A)$ en B.

$$\begin{array}{lr} (1) & por(A,A) \xrightarrow{u} por(B,A) \xrightarrow{w_g} B \\ (2) & por(A,A) \xrightarrow{u} por(B,A) \xrightarrow{v'} por(B,B) \xrightarrow{w} B \\ (3) & por(A,A) \xrightarrow{v} por(A,B) \xrightarrow{w_d} B \\ (4) & por(A,A) \xrightarrow{v} por(A,B) \xrightarrow{u'} por(B,B) \xrightarrow{w} B \end{array}$$

Avec les conventions habituelles, ce calcul n'est pas orthogonal ce qui fait que les deux dérivations "standards" (1) et (3) ne sont pas dans la même classe de permutation. Si nous reprenons au contraire nos conventions de la sous-partie 2.7.7 nous identifions les deux radicaux de $por(B,B)$ en paire critique:

$$por(B,B) \xrightarrow{w_g} B \quad \text{et} \quad por(B,B) \xrightarrow{w_d} B$$

en un seul radical $por(B,B) \xrightarrow{w} B$. Le diagramme de réduction prend alors cette allure: En

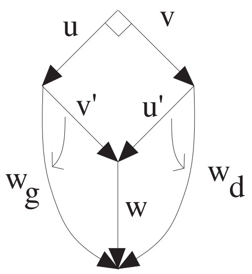


Figure 4.5: diagramme abstrait du "ou parallèle"

suivant cette interprétation les quatre dérivations sont réunies en une seule classe de permutation puisque $w \equiv v' \cdot w$ et $w \equiv u' \cdot w$. Dans cete seule classe de permutation les deux dérivations (1) et (3) sont standards, l'une qui réduit par la gauche, l'autre qui réduit par la droite

$$por(A,A) \to por(B,A) \to B, \text{ la dérivation standard gauche}$$

et

$$por(A,A) \to por(A,B) \to B, \text{ la dérivation standard droite}$$

Il n'y a donc pas unicité de la dérivation standard dans sa classe de permutation. Cette situation est à comparer avec le cas du λ-calcul: Jean-Jacques Lévy a montré qu'il n'y a dans ce cas qu'une dérivation standard par classe $\equiv$ d'équivalence. Cette unicité signifie l'existence d'une orientation privilégiée des calculs, gauche dans le cas du λ-calcul, qui entraîne la terminaison de la stratégie standard. On peut aussi exprimer ce résultat en terme de *nécessité*.

Définition 4.6 (participation, radical nécessaire) *On dit qu'un radical u participe à d lorsque $d = d_1 \cdot u' \cdot d_2$ et $u[\![d_1]\!]u'$. On dit qu'un radical u est nécessaire à d lorsque u participe à toutes les dérivations équivalentes à d par permutations.*

Les permutations standardisantes et carrées appliquées de d vers e, $e \trianglelefteq d$, ont la propriété de ne jamais faire apparaître dans e de radicaux autres que les ancêtres et résidus des radicaux de d. Il en découle que les radicaux qui participent à e participent aussi à d. Une conséquence du théorème 4.1 d'existence est qu'un radical est nécessaire à une dérivation d lorsqu'il participe à toutes les dérivations standards de sa classe de permutation. Avec le théorème d'unicité vérifié il suffit que le radical participe à l'unique dérivation standard d_{std} dans cette classe de permutation. On détermine ainsi un radical nécessaire: le premier radical réduit par d_{std}, qui par définition participe à d_{std}. Nous verrons dans le chapitre suivant que cette analyse joue un rôle important dans la compréhension des stratégies de calcul et de leur mécanisme de normalisation.

Bien entendu, la dérivation standard n'est pas exactement unique puisqu'il est possible de transformer par permutation carrée une dérivation standard en une autre dérivation standard. Notre résultat d'unicité est un résultat d'unicité modulo permutations carrées: nous montrons qu'il existe dans chaque classe d'équivalence par permutation une unique classe de permutation carrée $\trianglelefteq/\diamond$-minimale. Plus que minimale, cette classe est un $\trianglelefteq/\diamond$-minimum dans sa classe de permutation. Autrement dit, si $d \equiv e$ et e est standard alors $e \trianglelefteq d$.

Ce résultat d'unicité généralise le résultat de Lévy: dans le λ-calcul muni de l'ordre *total* "plus à gauche-plus extérieur" deux radicaux coinitiaux sont toujours emboîtés. Cela entraîne en particulier que les classes de permutation carrée sont des singletons. L'unicité de la dérivation standard modulo permutations carrées devient un résultat d'unicité stricte, comme l'énonce [Lév 78].

Deux axiomes nous permettent de prouver en section 4.4 ce résultat qu'il existe dans chaque classe de permutation une classe de permutation carrée $\trianglelefteq/\diamond$-minimum: l'axiome III d'enclave qui institue des zones de calcul et l'axiome IV de stabilité qui interdit le comportement du "ou parallèle", ce contre exemple à l'unicité vu un peu plus haut.

L'axiome III d'enclave

Le théorème de standardisation établit l'existence d'une position privilégiée au sein des calculs. En λ-calcul, un radical u "plus à gauche-plus extérieur" se trouve dans une position du λ-terme qu'il conserve au cours des réductions. Cette position "calculatoire" doit être jugée privilégiée parce que les résidus de u se retrouvent toujours "plus extérieurs-plus à gauches" dans leur λ-terme. Plus précisément, aucun radical r "plus interne-plus à droite" que u n'est capable de créer lors de sa réduction un radical s "plus à gauche-plus extérieurs" que u. De la même façon un radical r qui contient un radical v est incapable lors de sa réduction d'en exporter un résidu v' au dessus de u. Chaque radical u constitue donc sur sa droite ce que nous appelons une "enclave syntaxique": tout calcul y opérant n'a aucun effet hors de l'enclave. Ce caractére d'enclave peut être abstrait par l'énoncé qui suit: si u contient r et r crèe s ou r duplique u et $u[\![r]\!]s$ alors u contient s — où bien entendu "contient" signifie "être plus à gauche et plus extérieur".

Cette propriété de l'ordre "plus à gauche-plus extérieur" au sein λ-calcul se retrouve dans les systèmes du premier ordre avec l'ordre d'emboitement habituel. En effet, si un radical u emboîte un autre radical r alors r ne peut ni créer ni "exporter" de radical hors des limites imposées par u.

Nous poursuivons notre analyse abstraite des principes de la standardisation et proposons l'axiome III suivant, qui impose une nouvelle contrainte aux relations d'emboîtement et de résidu.

Axiome III d'enclave
Soit r, u, u' trois radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$.
(Création) si $u < r$ et r crée un radical s, c'est-à-dire $[\![r]\!]s = \emptyset$, alors $u' < s$.
(Emboîtement) soient deux radicaux v et v'. Si $u < r < v$ et $v[\![r]\!]v'$ alors $u' < v'$.

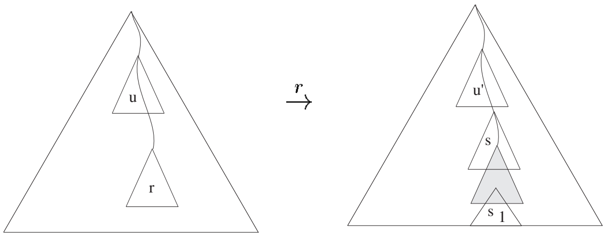


Figure 4.6: axiome d'enclave

L'axiome IV de stabilité

Il reste à interdire le comportement du *ou parallèle* tel qu'il est décrit en section 4.3. L'axiome IV de stabilité que nous proposons tirent son inspiration des travaux sémantiques menés sur le λ-calcul [Ber 79][Cur 86][HL 79]. Gérard Berry décrit syntaxiquement la stabilité comme l'existence pour chaque résultat d'un calcul *canonique* minimal. Si on choisit ici comme résultat la création d'un radical (modulo résidus) notre axiome IV énonce une stabilité *locale* du calcul: deux radicaux disjoints u et v sont incapables de créer séparément un même radical t'. Autrement dit, en supposant que u et v sont disjoints et $u[\![v]\!]u'$ et $v[\![u]\!]v'$, si les radicaux t_1 et t_2 ont pour résidu par v' et u' le même radical t', c'est-à-dire $t_1[\![v']\!]t'$ et $t_2[\![u']\!]t'$, alors ni t_1 ni t_2 n'a pu être créé par u ou v.

Notre axiome IV a le caractère double de l'axiome III avec sa partie "création" et sa partie "emboîtement". Ici encore la contrainte sur la création doit être accompagnée d'une contrainte analogue sur le déplacement des résidus dupliqués. Nous simplifierons cette présentation de l'axiome en section 4.4.

Axiome IV de stabilité
Soit deux radicaux disjoints u et v, et les radicaux u' et v' leurs résidus mutuels: $u[\![v]\!]u'$ et $v[\![u]\!]v'$. Soit t_1 un radical coinitial à v' et t_2 un radical coinitial à u'. Nous supposons qu'il existe un radical t' tel que $t_1[\![v']\!]t'$ et $t_2[\![u']\!]t'$.

Si $v' \not\leq t_1$ et $u' \not\leq t_2$ alors
(Création) il existe un radical t tel que $t[\![u]\!]t_1$ et $t[\![v]\!]t_2$.
(Emboîtement) ce radical t vérifie que $u \not\leq t$ ou $v \not\leq t$.

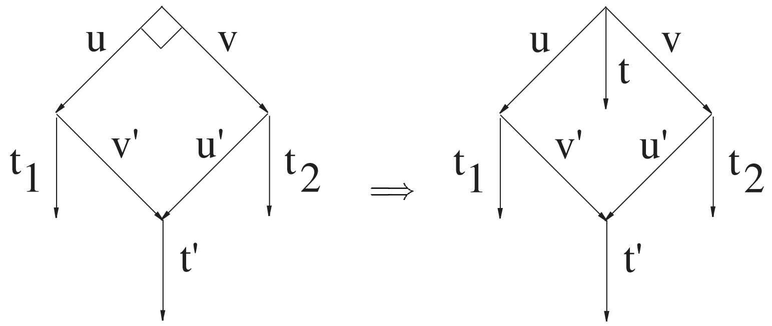


Figure 4.7: axiome de stabilité

Des variantes de cet axiome ont été proposées par [Sta 89] dans les *systèmes de transitition concurrents*. Voir aussi la définition 11.3.1(4) dans les *système de transition avec indépendance* présentés par [NW 95].

Théorème de standardisation

Les axiomes I de linéarité, II de non contextualité, III d'enclave et IV de stabilité permettent de prouver en section 4.4 le théorème de standardisation dans le cadre abstrait et orthogonal.

Théorème 4.2 (Existence et unicité) *Supposons qu'un système abstrait de standardisation* $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ *vérifie les axiomes A, B, C, D, FD+, PERM+, I, II, III et IV. Alors il existe pour chaque dérivation d une dérivation standard* d_{std} *plus standard que toutes les dérivations* d' *équivalentes à d par permutation:*

$$d \equiv d' \Longrightarrow d_{std} \trianglelefteq d'$$

Cette dérivation d_{std} *est unique à permutations carrées près dans la classe de permutation de d.*

4.4 Démonstration du théorème de standardisation

Nous démontrons le théorème de standardisation (existence et unicité) à partir des axiomes I, II, III et IV.

Le théorème de standardisation devra être généralisé aux systèmes non orthogonaux, voir la section 4.5. La prise en compte des paires critiques dans la démonstration du théorème nécessite de vérifier que chaque permutation rencontrée au cours de la preuve est effectivement permise (c'est-̀dire permute bien deux radicaux compatibles). En particulier il est interdit d'utiliser l'argument de confluence globale de la démonstration initiale donnée en [GLM 92]. Nous devons suivre un procédé très différent: introduire des relations sur les classes de permutation et démontrer des propriétés d'invariance par permutation de ces relations. La preuve que nous obtenons devient modulaire et fait apparaitre les propriétés fondamentales du processus. Nous prenons en compte les paires critiques dès cette section mais sans compliquer la structure de notre démonstration, exceptés dans ses étapes finales. Le formalisme que nous employons nous aide en cela. Il est techniquement plus approprié que les ordres d'emboitement mais oblige à adapter les axiomes I, II, III et IV à ses termes. Les axiomes prennent donc la forme d'une série de "critères" à la fois précis et élégants. Nous pensons avoir établi ainsi le bon angle d'étude pour une preuve "simple" à partir de mécanismes épurés.

Définition 4.7 *Un système axiomatique est un triplet $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ dans lequel $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ est un système abstrait, et $\uparrow$ et R sont deux relations binaires sur $\mathcal{R}$ telles que $\mathsf{R} \subset \uparrow$ et*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{R}^2, \quad u \uparrow v \Rightarrow \partial_0 u = \partial_0 v$$

La relation R que nous utilisons au lieu de l'ordre $<$ permet de traiter ensemble le cas des systèmes orthogonaux et des systèmes non orthogonaux. Voici le sens intuitif que nous donnons à cette relation:

- dans le cas d'un système orthogonal:

  R correspond à la négation $\not\leq$ de l'ordre d'emboîtement non strict $\leq$ entre radicaux co-initiaux

  $$u \mathsf{R} v \iff \partial_0 u = \partial_0 v \text{ et } u \not\leq v$$

- dans le cas d'un système non orthogonal:

  R correspond à la négation de $\leq$ entre deux radicaux co-initiaux et compatibles

  $$u \mathsf{R} v \iff \partial_0 u = \partial_0 v \text{ et } u \uparrow v \text{ et } u \not\leq v$$

On peut lire $u\mathsf{R}v$ comme u respecte v, c'est-à-dire ne l'emboîte pas et lui est compatible.

4.4.1 Développements/ ensembles de radicaux

Le travail qui suit est relativement autonome. Nous oublions tout ce qui a été écrit de la relation d'ordre $<$ pour considérer uniquement les constructions générales du chapitre 2 sur les systèmes non orthogonaux, c'est-à-dire du point de vue axiomatique les relations $[\![\cdot]\!]$ et $\uparrow$ ainsi que les axiomes A, B, C, FD+ et PERM+. Nous supposons de surcroît que le système vérifie l'axiome D rencontré en section 4.3, qui certifie que deux radicaux distincts n'ont pas de résidu en commun.

Petit axiome D (unicité de l'ancêtre)**:** Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $u' = v'$ alors $u = v$.

Nous nous donnons une relation R plus petite que la relation de compatibilité: $\mathsf{R} \subset \uparrow$. Nous écrivons $\mathsf{R}^{\neg}$ sa négation. Nous désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des ensembles finis de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles.

Traversée d'un radical

On suppose que R vérifie les deux propriétés suivantes qui correspondent aux axiomes I et II:

Critère 1 (Linéarité) $u\mathsf{R}v \Longrightarrow \exists! v', v[\![u]\!]v'$.

Critère 2 (Non contextualité) *Soit r et u deux radicaux tels que $r \uparrow u$, et $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $r\mathsf{R}v$ alors $(u\mathsf{R}v \iff u'\mathsf{R}v')$.*

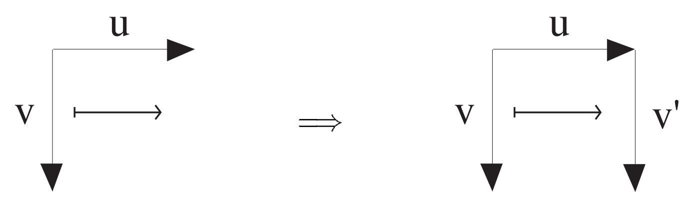


Figure 4.8: critère 1 = axiome I

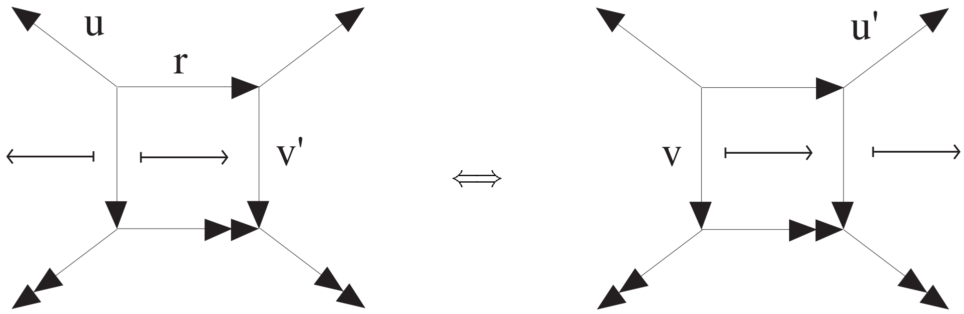


Figure 4.9: critère 2 = axiome II

Nous rappelons que légende des diagrammes est donné en section 2.5. Par exemple, la flèche qui va de v à v' dans le premier diagramme indique que $u\mathsf{R}v$ et que $v[\![u]\!]v'$, ce que nous écrirons plus loin $v \overset{u}{\mapsto} v'$.

Le critère 1 amène à la définition suivante:

Définition 4.8 *Soit une dérivation d et un radical x coinitiaux. On définit que x traverse d, ce qu'on écrit $d\mathsf{R}x$, par récurrence sur la longueur de d:*

- *lorsque d est vide,*
- *ou lorsque $d = u \cdot d'$ avec $u\mathsf{R}x$ et $d'\mathsf{R}x'$, où x' est l'unique résidu de x par u.*

Soit U un ensemble fini de radicaux deux à deux compatibles et f un développement de U. L'objectif de cette sous-section est de démontrer que U et f se comportent identiquement du point de vue de l'emboîtement, c'est-à-dire que si un radical x est coinitial à f alors:

$$f\mathsf{R}x \text{ si et seulement si } \forall u \in U, u\mathsf{R}x$$

Ce résultat sera la première étape de notre démonstration modulaire du théorème de standardisation, servant à comparer les comportements (quant à la traversée) d'un ensemble de radicaux U et de ses développements.

Nous commençons par démontrer le lemme suivant:

Lemme 4.9 (lemme préparatoire de développement) *Soit f un développement de $U \in \mathfrak{M}$. Si pour tout $u \in U$, $u\mathsf{R}x$ alors $f\mathsf{R}x$.*

Démonstration par récurrence sur la profondeur de U. La proposition est vérifiée si U est vide. Sinon $f = u \cdot f'$ où f' est un développement de $U' = U[\![u]\!]$. Le radical u par son appartenance à U doit vérifier $u\mathsf{R}x$. On note x' l'unique résidu de x par u. Soit v un radical dans U. Parce que $u\mathsf{R}x$ et $u \uparrow v$ on sait par le critère 2 que $v\mathsf{R}x$ implique $v'\mathsf{R}x'$. Il s'en suit que chaque radical v' de U', en tant que résidu d'un radical de U vérifie $v'\mathsf{R}x'$. Ceci implique par hypothèse de récurrence que $f'\mathsf{R}x'$. Nous en déduisons que $f\mathsf{R}x$, ce qui termine notre preuve par récurrence. □

Le premier critère pour R nous assure qu'un radical x a un résidu et un seul par une dérivation d qu'il traverse. Nous sommes amenés dans ce cas à spécialiser notre écriture $[\![d]\!]$:

Définition 4.10 *On écrit* $x \overset{d}{\mapsto} x'$ *lorsque* $d\mathsf{R}x$ *et* $x[\![d]\!]x'$. *On sait déduire de la traversée de* $d = u_1 \cdots u_n$ *par* x *une multi-dérivation* $D = (u_1[\![x_1]\!]) \cdots (u_n[\![x_n]\!])$ *où les radicaux* x_i, $1 \leq i \leq n+1$ *sont définis par* $x_1 = x$, $x_n = x'$ *et* $x_i[\![u_i]\!]x_{i+1}$ *pour* $1 \leq i \leq n$. *Dans le cas orthogonal, cette multi-dérivation vaut* $d[x]$. *Nous l'appellerons aussi* $d[x]$ *dans le cas général.*

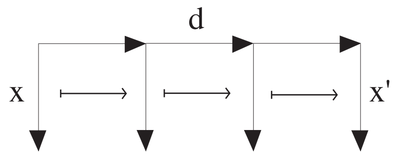


Figure 4.10: traversée de la dérivation d par le radical x

On a rencontré au chapitre 2 la notion d'équivalence par permutation. Les permutations n'ont lieu qu'entre des radicaux u et v compatibles, ce qu'on écrit $u \uparrow v$. Nous ajoutons maintenant une troisième propriété à R qui nous permet d'établir le résultat d'équivalence que nous voulons.

Critère 3 (Paires critiques) *Soit* u *et* x *deux radicaux coinitiaux compatibles. Si* $u\mathsf{R}v$ *et* $x[\![u]\!] = \emptyset$ *alors* $x\mathsf{R}v$.

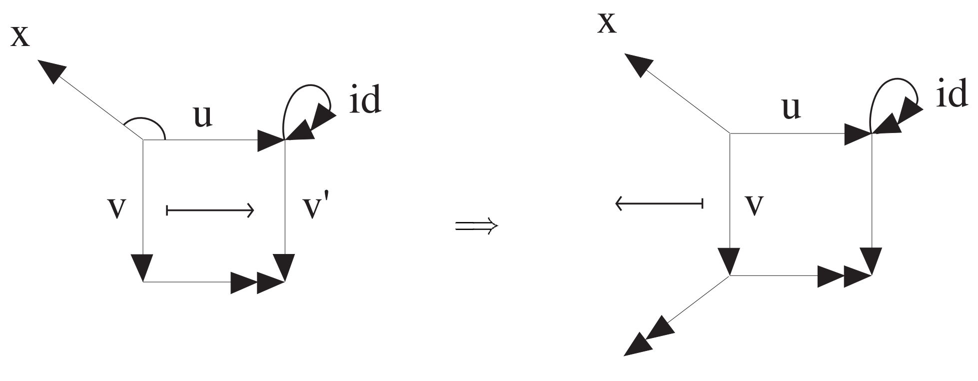


Figure 4.11: critère 3 = transitivité et axiome E

Nous justifions ce critère informellement: dans un système orthogonal, $x[\![u]\!] = \emptyset$ implique que u contient x, et par transitivité $x \not\leq v$ si $u \not\leq v$; dans un système non orthogonal, les radicaux x et v sont compatibles sinon u efface v (abstraitement, par l'axiome C').

Nous reprenons le cours de notre développement. Nous n'avons utilisé pour l'instant qu'un sens ($\Longrightarrow$) du critère 2 lors de la démonstration du lemme préparatoire 4.9 de développement. La direction ($\Longleftarrow$) nous sert maintenant.

Lemme 4.11 (lemme de développement) *Soit U un ensemble de $\mathfrak{M}$ et f un développement de U. Alors $f\mathsf{R}x$ équivaut à $\forall u \in U, u\mathsf{R}x$.*

Démonstration: le lemme préparatoire 4.9 de développement nous donne le sens $\Longleftarrow$. L'autre direction nous vient d'une récurrence sur la profondeur de U. Soit le développement f de U. Il s'écrit $f = u \cdot f'$ oú f' est un développement de $U' = U[\![u]\!]$ que traverse x', le résidu unique de x par u. On obtient par hypothèse de récurrence appliquée à U' que $\forall v' \in U', v'\mathsf{R}x'$. Soit un radical v de U. Si v a un résidu v' par u le critère 2 déduit de $u \uparrow v$, de $u\mathsf{R}x$ et de $v'\mathsf{R}x'$ que $v\mathsf{R}x$. Il s'en suit que seul un radical v effacé par u, c'est-à-dire tel que $v[\![u]\!]\emptyset$, peut se trouver dans U sans pourtant vérifier $v\mathsf{R}x$. On se trouve ici dans les conditions de notre critère 3: $u \uparrow v$, $x \overset{u}{\mapsto} x'$ et $v[\![u]\!] = \emptyset$; qui implique donc que $v\mathsf{R}x$. On obtient $\forall v \in U, v\mathsf{R}x$ comme convenu. $\square$

Le lemme 4.11 peut être appliqué pour démontrer ce qui suit.

Lemme 4.12 (lemme de traversée) *Soit d et e deux dérivations, x et x' deux radicaux. La relation $x \overset{d}{\mapsto} x'$ est stable par permutation sur d: si $d \equiv e$ alors $x \overset{d}{\mapsto} x' \iff x \overset{e}{\mapsto} x'$. Plus encore, si $d' \propto d[x]$ et $e' \propto e[x]$ alors $d' \equiv e'$.*

Démonstration: la première partie du lemme est une conséquence immédiate de l'axiome PERM+ de confluence locale forte et du lemme 4.11 de développement. En effet, si $u \uparrow v$ et $f_u \propto u[\![v]\!]$ et $f_v \propto v[\![u]\!]$ alors tout radical y tel que $(u \cdot f_v)\mathsf{R}y$ vérifie à la fois $y\mathsf{R}u$ et $y\mathsf{R}v$, par le lemme 4.11 de développement; il s'en suit avec l'axiome PERM+ que pour tout radical y':

$$y[\![u \cdot f_v]\!]y' \iff y[\![v \cdot f_u]\!]y'$$

On conclut la première partie du lemme 4.12. Nous utilisons l'axiome C pour démontrer la seconde partie du lemme: si $u \uparrow v$ et $r \uparrow u$, $r \uparrow v$ alors $\forall x, y \in \{u, v\}[\![r]\!], x \uparrow y$. Donc $\{u, v\}[\![r]\!] \in \mathfrak{M}$, ce qui oblige deux dérivations $g_1 \propto (u \cdot f_v)[r]$ et $g_2 \propto (v \cdot f_u)[r]$ à être équivalentes puisque toutes deux sont des développements de $\{u, v\}[\![r]\!]$. $\square$

4.4.2 Extraction d'un radical

La propriété de traversée $d\mathsf{R}x$ décrit des radicaux x qui ne participent au calcul de la dérivation d. Nous poursuivons notre étude par l'introduction de la notion d'extraction qui met en jeu elle aussi des radicaux "extérieurs", mais cette fois-ci réduits par d.

Définition 4.13 (extraction) *On dit que x peut être extrait de d, ce qui s'écrit $x \lhd d$ lorsque d peut être factorisé en $d = d_1 \cdot x' \cdot d_2$ où x traverse d_1 jusqu'en x': $x \overset{d_1}{\mapsto} x'$. L'extraction de x dans d détermine la multi-dérivation $D_1 \cdot d_2$ où D_1 est la multi-dérivation $d_1[x]$ introduite en définition 4.10.*

Nous avons montré qu'un ensemble U de $\mathfrak{M}$ a le même comportement envers la traversée d'un radical que ses développements $f \propto U$. Nous voudrions obtenir ici un résultat similaire dans le cadre de l'extraction. Contrairement à la traversée, le mécanisme d'extraction fait intervenir l'égalité entre radical. Nous devons donc l'intégrer dans le modèle général du lemme 4.11 en en faisant une relation bi-univoque, c'est-à-dire telle que $x \overset{d}{\mapsto} y$ et $x' \overset{d}{\mapsto} y$ entraînent que $x = x'$. Nous obtenons le critère suivant:

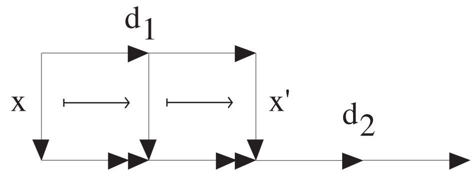


Figure 4.12: extraction de x dans $d_1 \cdot x' \cdot d_2$

Critère 4 (Loi d'égalité) *Soit cinq radicaux r, u, v , u' et v' tels que $r \uparrow u$ et $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $r \mathsf{R} v$ alors $(u = v \iff u' = v')$.*

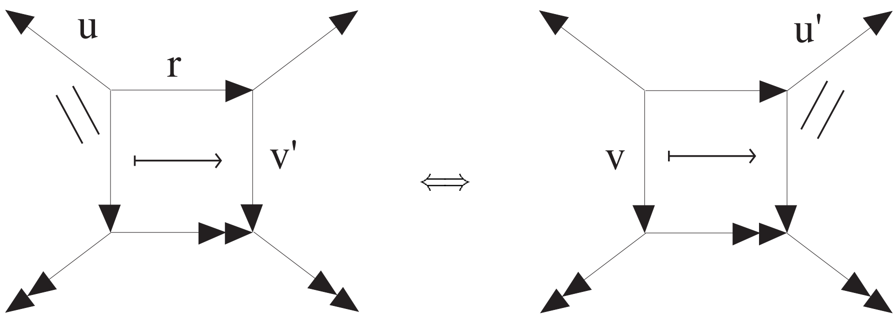


Figure 4.13: critère 4 = loi d'égalité

On trouve déjà le sens $\Longrightarrow$ dans l'axiome D. Nous n'ajoutons donc à nos hypothèses que le sens $\Longleftarrow$.

Le critère 4 permet de montrer trois résultats qui nous seront indispensables: tout d'abord, la dérivation d réduit les (résidus de) deux radicaux distincts x et y, avec $x \lhd d$ et $y \lhd d$, lors de deux étapes différentes.

Lemme 4.14 *Soit x et y deux radicaux tels que $x \lhd d$ et $y \lhd d$. On peut écrire alors $d = d_1 \cdot x' \cdot d_2$ où $x \overset{d_1}{\mapsto} x'$. Alors $y \lhd d_1$ ou $y \overset{d_1}{\mapsto} y' \overset{x'}{\mapsto} y''$ et $y'' \lhd d_2$.*

Ensuite, nous démontrons qu'un radical x ne peut être extrait d'un développement de U que s'il lui appartient: $x \in U$. Ce lemme correspond ici au lemme de développement dans la partie précédente.

Lemme 4.15 (lemme de l'extraction) *Soit U un ensemble fini de radicaux coinitiaux et f un développement de U. Si $x \lhd f$ alors $x \in U$.*

Démonstration par récurrence sur la longueur de f. Si f est vide alors x ne peut en être extrait. Sinon, si $f = u \cdot f'$ alors par définition u est un élément de U et f' est un développement de $U[\![u]\!]$. Si $x = u$ alors x est bien élément de U. Sinon $u \mathsf{R} x$ par définition de l'extraction et $x \overset{x}{\mapsto} x'$ pour un certain radical x'. Ce radical vérifie $x' \lhd f'$ par définition de l'extraction et donc par hypothèse de récurrence sur la dérivation f' nous obtenons que $x' \in U[\![u]\!]$. Nous en déduisons qu'il existe un radical v de U (qui vérifie donc $u \uparrow v$) tel que $v[\![u]\!]x'$. Par application du critère 4 nous obtenons que $x = v$ parce que $u\mathsf{R}x$ et $u \uparrow v$. Nous concluons que x est élément de U, ce qui termine la démonstration par récurrence. $\square$

Attention: la réciproque n'est pas vraie. Si par exemple r et x sont deux radicaux coinitiaux tels que $r < x$ alors $r \cdot f$ est un développement de $\{r, x\}$ si f développe $x[\![r]\!]$. Mais $x \not\triangleleft r.f$ puisque $r < x$.

Soit une dérivation d et deux radicaux x et y tels que $x \triangleleft d$ et $y \triangleleft d$. Nous montrons qu'une permutation sur la dérivation d ne peut pas empêcher à la fois d'extraire le radical x et le radical y.

Lemme 4.16 (lemme de l'extraction simultanée) *Soit d et e deux dérivations égales à une permutation près: $d \equiv^1 e$. Soit x et y deux radicaux distincts. Si $x \triangleleft d$ et $y \triangleleft d$ alors $x \triangleleft e$ ou $y \triangleleft e$.*

Démonstration: deux dérivations d et e telles que $d \equiv^1 e$ peuvent s'écrire: $d = f \cdot u \cdot d_v \cdot g$ et $e = f \cdot v \cdot d_u \cdot g$, où f, g sont des dérivations, u et v deux radicaux compatibles tels que $d_u \propto u[\![v]\!]$ et $d_v \propto v[\![u]\!]$. Nous prouvons le résultat par récurrence sur la longueur de d. Choisissons deux radicaux distincts x et y tels que $x \triangleleft d$ et $y \triangleleft d$.

Supposons que $f = r \cdot f'$. Soit $x = r$, soit $y = r$, soit il existe des radicaux x' et y' tels que $x \overset{r}{\mapsto} x'$ et $y \overset{r}{\mapsto} y'$ avec $x' \triangleleft (f' \cdot u \cdot d_v \cdot g)$ et $y' \triangleleft (f' \cdot u \cdot d_v \cdot g)$. Le lemme est démontré dans les deux premiers cas. Nous nous plaçons dans le dernier cas. Les deux radicaux x' et y' sont différents d'après le critère 4. En appliquant l'hypothèse de récurrence nous savons que l'un des deux radicaux x' ou y' peut être extrait de $f' \cdot v \cdot d_u \cdot g$. Supposons que c'est le radical x' qui est extrait. Dans ce cas le radical x peut être extrait de e.

Supposons que f est vide: $d = u \cdot d_v \cdot g$ et $e = v \cdot d_u \cdot g$. Premier cas: le radical x traverse $u \cdot d_v$, il traverse $v \cdot d_u$ d'après le lemme 4.12. Ce radical peut dès lors être extrait de e, ce qui remplit les conditions du lemme. Le même résultat est vrai si y traverse $u \cdot d_v$. Second cas: ni x ni y ne traverse $u \cdot d_v$. Alors les deux radicaux x et y peuvent être extraits de $u \cdot d_v$: $x \triangleleft u \cdot d_v$ et $y \triangleleft u \cdot d_v$. Le lemme de l'extraction affirme dans ce cas que $x \in \{u, v\}$ et $y \in \{u, v\}$. L'un des deux radicaux x ou y vaut donc v et peut pour cette raison être extrait de e.

Nous concluons ainsi notre démonstration par récurrence. $\square$

Le résultat de simplification a été démontré dans le cas orthogonal, au théorème 2.5. Il sera énoncé au lemme 4.58 dans le cadre des systèmes non orthogonaux. Ici, nous démontrons un cas particulier qui sera utilisé au cours de la démonstration du théorème de standardisation.

Lemme 4.17 (lemme préparatoire de simplification faible) *Soit d et e deux dérivations égales à une permutation près: $d \equiv^1 e$. Si $x \triangleleft d$ et $x \triangleleft e$ alors $d[x] \equiv e[x]$.*

Démonstration: nous utiliserons le même schéma de preuve que dans la preuve du lemme 4.16. Deux dérivations d et e telles que $d \equiv^1 e$ peuvent s'écrire $d = f \cdot u \cdot d_v \cdot g$ et $e = f \cdot v \cdot d_u \cdot g$, où f, g sont des dérivations, u et v deux radicaux compatibles tels que $d_u \propto u[\![v]\!]$ et $d_v \propto v[\![u]\!]$. Nous prouverons le résultat par récurrence sur la longueur de d. Prenons un radical x tel que $x \triangleleft d$. Nous supposons que $f = r \cdot f'$, et notons d' et e' les dérivations telles que $d = r \cdot d'$ et $e' = r \cdot e'$. Le radical x vaut r ou il existe un radical x' tel que $x \overset{r}{\mapsto} x'$ et $x' \triangleleft d'$. Dans le premier cas, $d[r] = d' = f' \cdot u \cdot d_v \cdot g \equiv^1 f' \cdot u \cdot d_v \cdot g = e' = e[r]$, ce qui donne le résultat. Sinon, $d'[x'] \equiv e'[x']$ par récurrence, et donc $d_r \cdot (d'[x']) \equiv d_r \cdot (e'[x'])$ pour $d_r = r[x]$. On peut réécrire ces deux multi-dérivations respectivement $(r \cdot d')[x]$ et $(r \cdot e')[x]$, ce qui prouve que $d[x]$ et $e[x]$ sont équivalentes par permutations. Supposons maintenant que f soit vide, c'est-à-dire $d = u \cdot d_v \cdot g$ et $e = v \cdot d_u \cdot g$. Nous utilisons le lemme 4.12 de traversée lorsque le radical x traverse $u \cdot d_v$: $x \overset{(u \cdot d_v)}{\mapsto} x'$. Les deux multi-dérivations $(u \cdot d_v)[x]$ et $(v \cdot d_u)[x]$ sont dans ce cas équivalentes $\equiv$, tandis que $d[x] = (v \cdot d_u) \cdot g[x']$ et $e[x] = (u \cdot d_v) \cdot g[x']$: les deux multi-dérivations $d[x]$ et $e[x]$ sont donc équivalentes $\equiv$, ce qui correspond au résultat du lemme. Nous terminons avec le cas où $x \lhd u \cdot d_v$, qui entraîne que x vaut u ou v d'après le lemme 4.15 d'extraction. Supposons que $x = u$ pour montrer que $d[x] \equiv e[x]$. Tout d'abord, $d_u = u'$ pour $u \overset{v}{\mapsto} u'$ parce que $u \lhd e$. On sait par extraction de u dans e que $e[u] = \{v[\![u]\!]\}_{\partial_1 u} \cdot g$, ce dont on déduit que $d_v \cdot g \equiv e[u]$. Cette dérivation $d_v \cdot g$ vaut justement $d[u]$, ce qui établit comme voulu la relation $d[u] \equiv e[u]$. Les cas $x = u$ et $x = v$ sont symétriques, et donc $d[v] = e[v]$, ce qui termine la preuve. L'assertion du lemme 4.17 de simplification faible est donc justifiée par récurrence. $\square$

Profondeur $\prec\!\prec$ d'extraction

La démonstration du théorème de standardisation part d'un principe d'extraction. On détermine d'abord le radical le plus "extérieur" parmi les radicaux qu'on peut extraire d'une dérivation d ; l'extraction successive des radicaux plus "extérieurs" permet de construire pas à pas la dérivation standard qui correspond à d. Il faut être sûr que la construction s'arrête. Jan Willem Klop a le premier eu l'idée d'utiliser le lemme des développements finis pour démontrer ce résultat, voir [Klo 80]. Nous reprenons sa construction d'un ordre $\prec\!\prec$ sur les dérivations dont nous démontrons la bonne fondation à partir du lemme 4.15 d'extraction.

Définition 4.18 *On note $d \prec\!\prec^1 e$ lorsque $d \propto e[u]$ où u est un radical extrait de e. La relation $\prec\!\prec$ est la clôture transitive de $\prec\!\prec^1$. On dit que e a une profondeur d'extraction plus grande que celle de d lorsque $d \prec\!\prec e$.*

Lemme 4.19 (bonne fondation de $\prec\!\prec$) *L'ordre $\prec\!\prec$ est bien fondé sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration: nous montrons par récurrence sur la longueur de d que $\prec\!\prec$ est bien fondé sous d, c'est-à-dire bien-fondé lorsqu'on le restreint aux dérivations e telles que $e \prec\!\prec d$.

Nous montrons d'abord un résultat intermédiaire. Soit U un ensemble fini de radicaux coinitiaux deux à deux compatibles, et $f \propto U$ un de ses développements. Soit d une dérivation au départ de $\partial_1 f$, c'est-à-dire telle qu'on puisse la composer avec f en $e = (f \cdot d)$. Supposons que $\prec\!\prec$ est bien fondé sous d. Nous montrons par récurrence lexicographique sur l'ordinal associé à d et la profondeur de U que $\prec\!\prec$ est bien fondé sous $f \cdot d$. En effet, soit $e' \prec\!\prec^1 e$ et x un radical tel que $x \lhd f \cdot d$ et $e' \propto e[\![x]\!]$. On distingue deux cas. Soit le radical x peut être extrait de f, et alors $x \in U$ en appliquant le lemme 4.15 d'extraction. Soit x traverse f jusqu'au radical x': $x \overset{f}{\mapsto} x'$, et x' peut être extrait de d. La dérivation $e' \prec\!\prec^1 e$ qu'on obtient après extraction de x dans $f \cdot d$ vaut dans le premier cas, $e' = f' \cdot d$, où $f' \propto U[\![x]\!]$ et $x \in U$; et dans le second cas, $e' = f' \cdot d'$ où $f' \propto U[\![x]\!]$ et $d' \propto d[\![x']\!]$, et donc $d' \prec\!\prec d$. Nous pouvons écrire:

$$e' \prec\!\prec^1 e = f \cdot d \text{ et } f \propto U \Longrightarrow e' = f' \cdot d' \text{ avec} \begin{cases} \text{soit } d' = d \text{ et } f' \propto U[\![x]\!] \text{ pour } x \in U \\ \text{soit } d' \prec\!\prec^1 d \text{ et } f \propto U[\![x]\!] \text{ avec } x \notin U \end{cases}$$

Nous en concluons récurrence que si $\prec\!\prec$ est bien fondé sous d — c'est-à-dire $\prec\!\prec$ restreint aux dérivations e' telles que $e' \prec\!\prec e$ est bien-fondé — alors $\prec\!\prec$ est bien-fondé sous $f \cdot d$.

Nous revenons à la démonstration du lemme. Supposons la propriété vraie pour toutes les dérivations de longueur n. Soit d une dérivation de longueur $n + 1$. On peut la factoriser en

$d = u \cdot d'$. Puisque u est le développement de $\{u\}$ et que $\prec\!\!\prec$ est bien fondée sous d', nous concluons que $\prec\!\!\prec$ est bien fondée sous d. Notre déonstration par récurrence établit donc que la relation $\prec\!\!\prec$ est bien-fondée sous chaque dérivation. Cette relation est par conséquent un ordre bien fondé. $\square$

L'axiome FD+ sert uniquement à démontrer le lemme 4.11 de développement et la bonne fondation de $\prec\!\!\prec$. Il ne joue aucun rôle aux autres étapes de la démonstration.

Le préordre standard, le préordre d'extraction

La définition 4.4 d'ordre plus standard doit être reprise dans la perspective de la relation R. La permutation carrée — où $u \uparrow v$ et $u \parallel v$ — et la permutation standardisante — où $u \uparrow v$ et $u < v$ — définies aux parties 4.3 et 4.5 peuvent être interprétées dans notre cadre formel comme des S-permutation — lorsque $v\mathsf{R}u$.

Définition 4.20 (S-permutation)

- *une dérivation d est dite obtenue d'une dérivation e par S-permutation lorsque $d = d_1 \cdot u \cdot f_v \cdot d_2$ et $e = d_1 \cdot v \cdot f_u \cdot d_2$ avec $v\mathsf{R}u$, où f_u et f_v sont des développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$. On écrit $d \trianglelefteq^1 e$.*
- *le préordre standard $\trianglelefteq$ est défini comme la clôture transitive de $\trianglelefteq^1$. Si $d \trianglelefteq e$ on dit que d est plus standard que e.*

Cette définition de préordre standard permet d'établir une définition nouvelle et plus générale de l'extraction. Nous démontrons d'abord

Lemme 4.21 (transitivité) *Si $x \lhd d$ et $d \trianglelefteq e$ alors $x \lhd e$.*

Démonstration: Soit $d \trianglelefteq^1 e$. On peut écrire $d = f \cdot u \cdot f_v \cdot g$ et $e = f \cdot v \cdot f_u \cdot g$ avec $v\mathsf{R}u$, f_u et f_v des développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$. Si $x \lhd d$ alors:

- soit $x \lhd f$ et alors $x \lhd e$,
- soit $x \overset{f}{\mapsto} x'$ et $x' \lhd u \cdot f_v$, donc par le lemme de l'extraction $x' = u$ ou $x' = v$, ce qui dans les deux cas implique que $x' \lhd v \cdot f_u$ parce que $v\mathsf{R}u$. Donc $x \lhd e$,
- soit $x \overset{f \cdot u \cdot f_v}{\mapsto} x'$ et $x' \lhd g$, ce qui implique que $x \overset{f \cdot v \cdot f_u}{\mapsto} x'$ par le lemme 4.12 de traversée, et donc $x \lhd e$.

$\square$

Soit une dérivation d et un radical x. Le lemme 4.21 de transitivité permet de prouver le résultat qui suit:

$$x \lhd e \text{ si et seulement si il existe une dérivation } d \text{ telle que } x \cdot d \trianglelefteq e$$

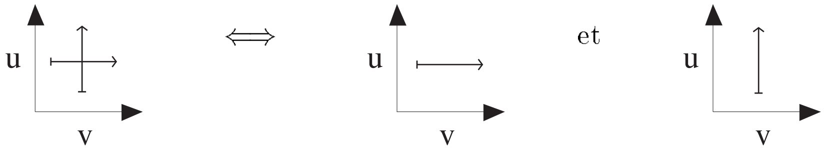
La définition de l'extraction donne le sens $\Longrightarrow$ et le lemme 4.21 de transitivité démontre la direction $\Longleftarrow$, puisque $x \lhd x \cdot d$. A la suite de cette équivalence nous pouvons généraliser la relation d'extraction en un préordre entre dérivations:

Définition 4.22 (extraction) *On dit qu'une dérivation d est extraite de e, ce qu'on écrit $d \lhd e$, lorsqu'il existe une dérivation d' telle que $d \cdot d' \trianglelefteq e$.*

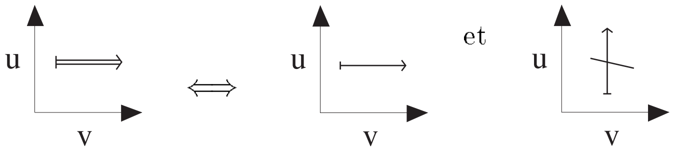
4.4.3 Deux nouveaux critères

Nous introduisons deux nouvelles relations $\mathsf{R}_\square$ et R_+ définies par:

$$u\mathsf{R}_\square v \iff u\mathsf{R}v \text{ et } v\mathsf{R}u$$



$$u\mathsf{R}_+ v \iff u\mathsf{R}v \text{ et } v\mathsf{R}^\neg u$$



Ces deux nouvelles relations cherchent à capturer les notions de $||$ et $<$ dans le cadre de la relation R. Nous dirons que deux radicaux u et v sont disjoints lorsque $u\mathsf{R}_\square v$ et que u emboîte v lorsque $v\mathsf{R}_+u$. Nous définissons de la même manière que pour $d\mathsf{R}x$ les relations $d\mathsf{R}_\square x$ et $d\mathsf{R}_+x$ pour une dérivation d et un radical x coinitiaux.

Définition 4.23 (traversée carrée ou au-dessus) *On écrit que $d\mathsf{R}_\square x$ récursivement sur la longueur de d:*

- *lorsque $d = id_a$ et $\partial_0 x = a$,*
- *lorsque $d = r \cdot d'$ et $r\mathsf{R}_\square x$ et $d'\mathsf{R}_\square x'$ où $x \overset{r}{\mapsto} x'$.*

($d\mathsf{R}_+x$)

- *si $d = id_a$ et $\partial_0 x = a$,*
- *si $d = r \cdot d'$ et $r\mathsf{R}_+ x$ et $d'\mathsf{R}_+ x'$ où $x \overset{r}{\mapsto} x'$.*

On écrit $x \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$ lorsque $x \overset{d}{\mapsto} x'$ et $d\mathsf{R}_\square x$; et on écrit $x \overset{d}{\underset{+}{\mapsto}}$ lorsque $x \overset{d}{\mapsto} x'$ et $d\mathsf{R}_+ x$.

Critère 5 (Critère d'enclave) *Si $u\mathsf{R}_+v$ et $x_1 \overset{v'}{\mapsto} x'$ alors il existe deux radicaux x et x_2 et un développement f de $v[x]$ tels que $x \overset{u}{\mapsto} x_1$, $x \overset{v}{\mapsto} x_2$ et $x_2 \overset{f}{\mapsto} x'$.*

Critère 6 (Stabilité) *si $u\mathsf{R}_\square v$ et $x_1 \overset{v'}{\mapsto} x'$, $x_2 \overset{u'}{\mapsto} x'$ alors il existe x tel que $x \overset{u}{\mapsto} x_1$ et $x \overset{v}{\mapsto} x_2$.*

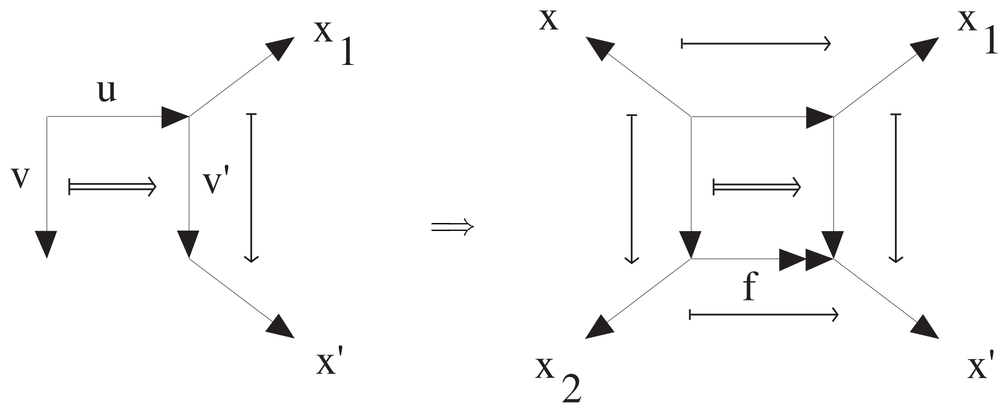


Figure 4.14: critère d'enclave = axiome III

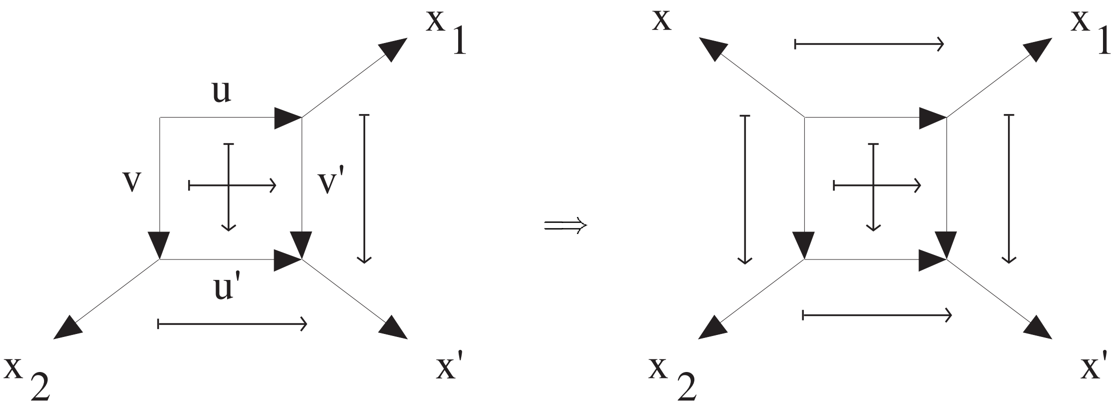


Figure 4.15: critère de stabilité = axiome IV

4.4.4 Lemme de l'alambic

Un radical x_1 qui traverse une dérivation $d = u_1 \cdots u_n$ a ses résidus successifs x_i en relation $\mathsf{R}_\Box$ ou R_+ avec les radicaux de d, c'est-à-dire:

$$\forall i \in [1...n],\ x_i \overset{u_i}{\underset{\Box}{\mapsto}} x_{i+1} \text{ ou } x_i \overset{u_i}{\underset{+}{\mapsto}} x_{i+1}$$

Le critère d'enclave fait qu'aucun radical u_i tel que $u_i \mathsf{R}_+ x_i$ ne peut créer de radical u_{i+1} tel que $u_{i+1}\mathsf{R}_\Box x_{i+1}$. Nous montrons qu'il est possible de standardiser la dérivation d en une dérivation $f \cdot g$ telle que $x_1 \overset{f}{\underset{\Box}{\mapsto}} x'$ et $x' \overset{g}{\underset{+}{\mapsto}} x_n$ pour un certain radical x'. Les étapes de traversée de la forme $x_i \overset{u_i}{\underset{+}{\mapsto}} x_{i+1}$ sont ainsi repoussées en fin de dérivation.

Nous commençons par démontrer un résultat intermédiaire.

Lemme 4.24 (lemme de remontée par enclave) *Soit $d\mathsf{R}_+x$ et $x \overset{d}{\mapsto} x'$.*

- *si $x'\mathsf{R}y'$ alors il existe y tel que $y \overset{d}{\mapsto} y'$ et $x\mathsf{R}y$,*

- *dans ce cas,* $(x\mathsf{R}_{\square}y \iff x'\mathsf{R}_{\square}y')$ *et* $(x\mathsf{R}_{+}y \iff x'\mathsf{R}_{+}y')$*.*

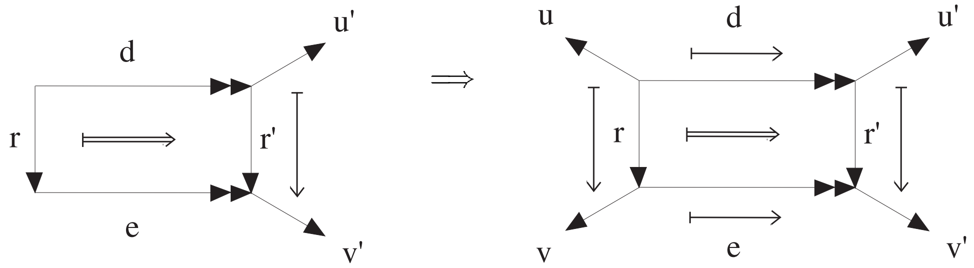


Figure 4.16: lemme de remontée par enclave

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. La première partie est démontrée par application du critère 5 d'enclave. La seconde partie est démontrée par le critère 2 qui combiné au critère d'enclave certifie que si $v \overset{u}{\underset{+}{\mapsto}} v'$ et $x_1 \overset{v'}{\mapsto} x'$ alors il existe x et x_2 tels que $x \overset{u}{\mapsto} x_1$, $x \overset{v}{\mapsto} x_2$ et $x_2 \overset{v'}{\mapsto} x'$ avec $(u\mathsf{R}_{\square}x \iff u'\mathsf{R}_{\square}x')$. Le cas avec R_{+} est bien sûr équivalent. $\square$

Lemme 4.25 (lemme de l'alambic) *Si* $x \overset{d}{\mapsto} x'$ *il existe une dérivation* $d_1 \cdot d_2$ *plus standard que* d *et un radical* y *tels que* $x \overset{d_1}{\underset{\square}{\mapsto}} y \overset{d_2}{\underset{+}{\mapsto}} x'$

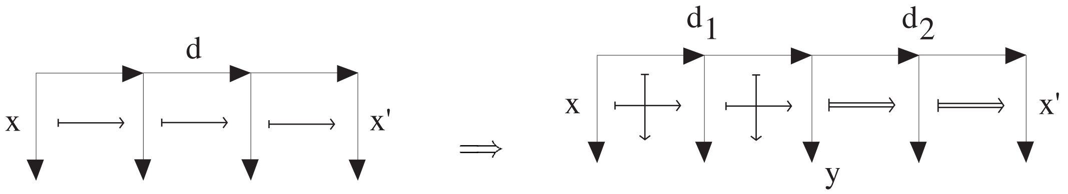


Figure 4.17: le lemme de l'alambic

Démonstration: par récurrence sur la profondeur $\prec\!\!\prec$ de d. La preuve est finie si $d\mathsf{R}_{+}x$. Sinon d s'écrit $f_1 \cdot u' \cdot f_2$ avec $f_1\mathsf{R}_{+}x$, et $u'\mathsf{R}_{\square}x'$ où $x \overset{f_1}{\mapsto} x'$. Le critère d'enclave nous certifie que le radical u' n'a pas pu être créé par la séquence f_1. Le lemme 4.24 nous indique qu'il existe bien un radical u tel que $u \overset{f_1}{\mapsto} u'$ et $x\mathsf{R}_{\square}u$. Une fois extrait de d, ce radical u induit l'égalité $u \cdot d'' = u \cdot f_1' \cdot f_2$, où $f_1' \propto f_1[u]$. Parce que $u \cdot f_1' \cdot f_2 \equiv d$ le lemme 4.12 de traversée implique que le radical x'' défini par $x \overset{u}{\mapsto} x''$ vérifie: $d''\mathsf{R}x''$. On conclut avec la remarque que l'hypothèse de récurrence s'applique à x'' et d'' puisque $d'' \prec\!\!\prec d$. Le résultat est alors immédiat. $\square$

4.4.5 Théorème de propagation

Nous avons prouvé jusqu'à maintenant des lemmes préparatoires très généraux: le lemme de développement, le lemme d'extraction, le lemme de transitivité, le lemme de l'alambic. Nous voulons maintenant aborder plus spécifiquement la démonstration du théorème de standardisation. Passons pour cela par une analyse courte du problème.

Si le théorème de standardisation est vérifié, il existe dans la classe $\equiv$ de d une dérivation e plus standard que toutes les autres. Le lemme 4.21 de transitivité montre que le premier radical x réduit par une dérivation e plus standard que f est aussitôt extractible de f, c'est-à-dire $x \lhd f$. Ce radical x est donc extractible de toutes les dérivations équivalentes à d par permutation.

Revenons à notre démonstration. En réponse à ce qui vient d'être noté nous chercherons à démontrer qu'il existe pour toute dérivation d un radical x extractible de toute dérivation f telles que $f \equiv d$. Cela justifie la définition suivante.

Définition 4.26 $\mathsf{Ext}\ d = \{x \mid \forall e \equiv d, x \lhd d\}$

Première remarque:

Lemme 4.27 (lemme de simplification faible) *Si* $r \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot f)$ *alors* $r \cdot f \equiv r \cdot g \Longrightarrow f \equiv g$.

Démonstration: nous utilisons le lemme préparatoire 4.17 de simplification faible. Il existe une séquence de dérivations $d_1 ... d_n$ telle que $d_1 = r \cdot f$, $d_n = r \cdot g$ et $\forall i, 1 \leq i \leq n-1, d_i \equiv^1 d_{i+1}$. Toutes ces dérivations d_i sont équivalentes à $r \cdot f$ par permutation. Le radical r appartient à $\mathsf{Ext}\ (r \cdot f)$. Il peut donc être extrait de chacun des d_i. Le lemme 4.17 de simplification faible établit $\forall i, 1 \leq i \leq n-1, d_i[r] \equiv d_{i+1}[r]$. Ce dont on déduit par transitivité de $\equiv$ que $d_1[r] \equiv d_n[r]$, c'est-à-dire $f \equiv g$. $\square$

Nous montrons tout d'abord que si $x \in \mathsf{Ext}\ d$ alors $r \in \mathsf{Ext}\ r \cdot d$ s'il n'existe pas de radical t tel que $t \overset{r}{\mapsto} x$. Nous aurons besoin pour cela d'un dernier critère sur la relation R.

Critère 7 *Soit* u *et* v *deux radicaux coinitiaux. Alors:* $u \uparrow v \Longrightarrow u = v$ *ou* $u \mathsf{R} v$ *ou* $v \mathsf{R} u$.

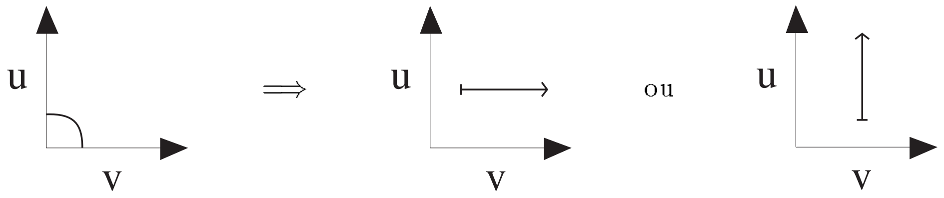


Figure 4.18: critère 7

Bien entendu la réciproque du critère 7 est entraînée par le fait que $\mathsf{R} \subset \uparrow$.

Définition 4.28 *On écrit* $r \rightsquigarrow x$ *lorsqu'il n'existe pas de radical* t *tel que* $t \overset{r}{\mapsto} x$.

Théorème 4.3 (théorème de propagation) *Si* $r \rightsquigarrow x$ *et* $x \in \mathsf{Ext}\ d$ *alors* $r \in \mathsf{Ext}\ r \cdot d$

Démonstration: soit d une dérivation telle que $r \notin \mathsf{Ext}\ r \cdot d$, et x un radical tel que $r \rightsquigarrow x$ et $x \in \mathsf{Ext}\ d$. Soit une séquence de dérivations $r \cdot d = d_1 \equiv^1 d_2 \equiv^1 ... \equiv^1 d_n \equiv^1 e$ telle que pour tout i on ait $r \lhd d_i$ — et $r \ntriangleleft e$. On peut factoriser la dérivation d_n en $d_n = e_1 \cdot v \cdot f_u \cdot e_2$ et la dérivation e en $e = e_1 \cdot u \cdot f_v \cdot e_2$, où u et v sont deux radicaux distincts et compatibles, f_u et f_v des développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$.

Nous allons prouver maintenant que $r \overset{e_1}{\mapsto} v$. Tout d'abord, si $r \lhd e_1$ alors $r \lhd e$. Cela signifie qu'il existe un radical r' tel que $r \overset{e_1}{\mapsto} r'$. Si $(v \cdot f_u) \mathsf{R} r'$ alors $(u \cdot f_v) \mathsf{R} r'$ d'après le lemme de développement, et donc $r \lhd e$, ce que nos hypothèses interdisent. De là $r' \lhd v \cdot f_u$, ce qui signifie que $r' = u$ ou $r' = v$ d'après le lemme d'extraction. Si $r' = u$ alors $x \lhd e$. Ne reste donc que $r' = v$, c'est-à-dire $r \overset{e_1}{\mapsto} v$.

D'après le critère 7 dernièrement introduit, $u \mathsf{R} v$ ou $v \mathsf{R} u$. Si $u \mathsf{R} v$ alors $r \lhd e$. Donc $v \mathsf{R} u$ sans que $u \mathsf{R} v$, c'est-à-dire $v \mathsf{R}_+ u$ — voir figure 4.4.5.

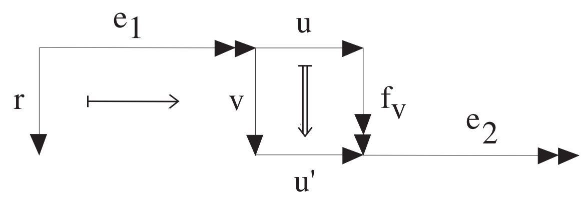


Figure 4.19: première étape = u contient v

Nous appliquons maintenant le lemme de l'alambic à la dérivation e_1, ce qui indique qu'il existe une dérivation $f \cdot g$ plus standard que e_1 telle que $r \underset{\square}{\overset{f}{\mapsto}} r_0 \underset{+}{\overset{g}{\mapsto}} v$. Standardiser e_1 en $f \cdot g$ nous donne le moyen de rapprocher x de u, pour les comparer. On utilise le lemme 4.24 pour faire "reculer" u jusqu'à r_0, et le lemme 4.29 qui suit pour faire traverser x jusqu'à $\partial_1 r_0$. Nous nous permettons d'insérer ici un lemme intermédiaire à la démonstration heureusement facile.

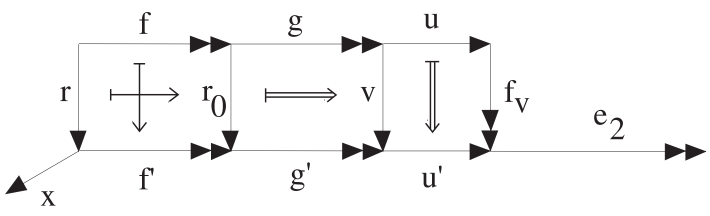


Figure 4.20: seconde étape = u va être remonté jusqu'à r_0

Lemme 4.29 (lemme intermédiaire de remontée par stabilité) *Soit $r \underset{\square}{\overset{d}{\mapsto}} r'$ et $e = d[r]$. Si $v \overset{e}{\mapsto} v'$ et $u' \overset{r'}{\mapsto} v'$ alors il existe un radical u tel que $u \overset{d}{\mapsto} u' \overset{r'}{\mapsto} v'$ et $u \overset{r}{\mapsto} v \overset{e}{\mapsto} v'$*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d, par application immédiate du critère 6 de stabilité.

□

Nous reprenons la démonstration du théorème 4.3 de propagation. Soit f' la dérivation résidu de f par r, et g' un développement de $g[r_0]$. Le radical x se trouve dans $\mathsf{Ext}\ d$, et $d \equiv f' \cdot g' \cdot u' \cdot e_2$ d'après le lemme 4.27 de simplification faible: pour cette raison, soit $x \lhd f'$, soit $x \overset{f}{\mapsto} x_0$ pour un radical x_0. Supposons le premier cas: si $x \lhd f'$, on peut décomposer f et f' en $f = f_1 \cdot w_1 \cdot f_2$ et $f' = f'_1 \cdot x_1 \cdot f'_2$ avec $x \overset{f'_1}{\mapsto} x_1$, $f'_1 = f_1[r]$, $r \overset{f_1}{\mapsto} r_1$ et $w_1 \underset{\square}{\overset{r_1}{\mapsto}} x_1$. On se retrouve avec f_1 et f'_1, x, w_1 et x_1 dans la situation du lemme 4.29 de remontée par stabilité: il existe un radical w tel que $w \overset{r}{\mapsto} x \overset{f'_1}{\mapsto} x_1$ et $w \overset{f_1}{\mapsto} w_1 \overset{r_1}{\mapsto}$. Ce qui contredit que $r \rightsquigarrow x$. Ne reste qu'une éventualité: $x \overset{f'}{\mapsto} x_0$; par le lemme 4.29 de remontée par stabilité, $r_0 \rightsquigarrow x_0$.

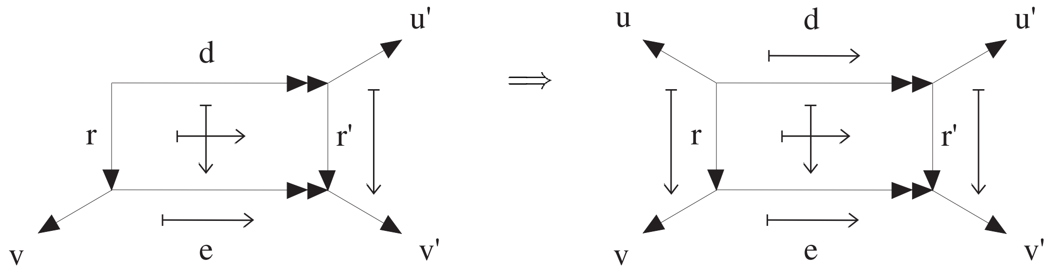


Figure 4.21: troisième étape = le lemme de remontée par stabilité

Cette étape importante dépassée, on montre avec le lemme 4.24 de remontée par enclave qu'il existe un radical u_0 tel que $u_0 \overset{g}{\mapsto} u$ et $r_0 \mathsf{R}_+ u_0$. On se retrouve dans la situation suivante:

$$r \overset{f}{\mapsto} r_0 \quad u_0 \overset{g}{\mapsto} u \quad x \overset{f'}{\mapsto} x_0 \quad r_0 \mathsf{R}_+ u_0 \quad r_0 \rightsquigarrow x_0$$

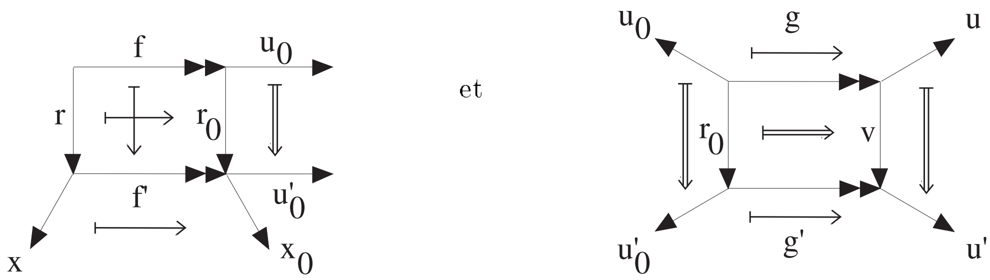


Figure 4.22: dernière étape, vue des deux côtés de r_0 ; le radical u'_0 contient-il x_0?

Nos constructions ont abouti: le critère 5 d'enclave et $r_0 \rightsquigarrow x_0$ entraînent que $u'_0 \mathsf{R}^{\neg} x_0$: le radical x ne peut pas être extrait de $f' \cdot u'_0$, ni la traverser. Nous montrons maintenant que $f' \cdot u'_0 \sqsubseteq d$, conclusion qui contredit l'appartenance de x à $\mathsf{Ext}\ d$. Reprenons la construction de $f' \cdot u'_0$: nous sommes passés par une série de permutations de $r \cdot d$ à $d_n = e_1 \cdot v \cdot f_u \cdot e_2$ puis à $f \cdot g \cdot v \cdot f_u \cdot e_2$; puis par les deux lemmes de remontée par enclave et stabilité à $f \cdot r_0 \cdot u'_0 \cdot g'' \cdot e_2$ où $g' \propto g[r_0]$ et $g'' \propto g'[u'_0]$. Nous avons pris garde au cours de ces mouvements que r reste extrait de chaque dérivation. Cette précaution nous permet d'affirmer qu'à chacune des permutations sur $r \cdot d$ correspond une série de permutations sur d par résidu par r — on applique ici le lemme préparatoire 4.17 de simplification faible. Pour finir, les deux dérivations d et $f' \cdot u'_0 \cdot g'' \cdot e_2$ sont équivalentes $\equiv$, avec un radical x qui ne peut pas être extrait de $f' \cdot u'_0 \cdot g'' \cdot e_2$ — alors que $x \in \mathsf{Ext}\ d$. La chaîne de dérivations $r \cdot d = d_1 \equiv^1 d_2 \equiv^1 \ldots \equiv^1 d_n \equiv^1 e$ que nous imaginions en début de preuve ne peut donc pas exister ; toujours le radical r peut être extrait de e si $(r \cdot d) \equiv e$ — ce qui signifie que $r \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$. Voilà démontré le théorème 4.3 de propagation.
□

4.4.6 Théorème du radical toujours extrait

Soit d une dérivation non vide. Nous démontrons dans cette section que l'ensemble $\mathsf{Ext}\ d$ n'est pas vide. Nous commençons par démontrer ce résultat quand d ne réduit qu'un seul radical x.

Lemme 4.30 *Soit x un radical quelconque. On a* $\mathsf{Ext}\ x = \{x\}$.

Démonstration: toute dérivation équivalente à x est de la forme $f \cdot x'$ où $x \overset{f}{\mapsto} x'$ et $f[x] = id_a$, $a = \partial_0 x$. En effet, supposons que d soit de cette forme: $d = f \cdot x'$, $x \overset{f}{\mapsto} x'$ et $f[x] = id_a$, et que $e \equiv^1 d$. Alors:

- si la permutation entre d et e a lieu dans f alors e s'écrit $e = f' \cdot x'$ avec $f \equiv^1 f'$ d'où $x \overset{f'}{\mapsto} x'$ par le lemme 4.12 de traversée. Du corollaire du lemme qui nous indique que les résidus de f et f' par x sont équivalents on tire que $f'[x] = id_a$.
- si x' intervient dans la permutation entre d et e alors $e = f \cdot x''$ et $d = f \cdot u \cdot x'$ avec $x \overset{f}{\mapsto} x'' \overset{u}{\mapsto} x'$. Par définition des résidus de dérivation: $u[\![x'']\!] = \emptyset$, et donc $e = f \cdot x''$ avec $f[x] = id_a$.

□

Théorème 4.4 (Théorème du radical toujours extrait) *Soit une dérivation $d : M \twoheadrightarrow P$. Si d est différente de id_M alors l'ensemble* $\mathsf{Ext}\ d$ *n'est pas vide.*

Démonstration: Notre démonstration se fait par récurrence sur l'ordre bien fondé $\prec\!\!\prec$. Supposons qu'il existe une dérivation non vide d telle que $\mathsf{Ext}\ d = \emptyset$. Parmi ces dérivations nous choisissons une dérivation d minimale pour l'ordre $\prec\!\!\prec$. Cette dérivation vérifie donc:

$$\forall x \lhd d, d' \propto d[x] \Longrightarrow (\mathsf{Ext}\ d' \neq \emptyset \text{ ou } \exists a, d' = id_a)$$

Notre objectif est bien évidemment de montrer qu'une telle dérivation n'existe pas. Avec le lemme 4.30 la dérivation d que nous avons choisie $\prec\!\!\prec$-minimale ne peut pas être équivalente à un radical par permutation. La dérivation d vérifie donc nécéssairement:

$$\forall x \lhd d, d' \propto d[x] \Longrightarrow \mathsf{Ext}\ d' \neq \emptyset$$

Pour montrer qu'aucune telle dérivation d n'existe nous construisons une relation $\rangle$ entre les radicaux x de $\partial_0 d$ tels que $x \lhd d$.

Définition 4.31 *Nous écrirons $x \rangle y$ lorsque $x \lhd d$, $y \lhd d$ et $y \overset{x}{\mapsto} z$ avec $z \in$* $\mathsf{Ext}\ d'$ *pour un certain $d' \propto d[x]$.*

Le lemme de conservation établit que pour chaque radical qui peut être extrait de d, $x \lhd d$, il existe un radical y tel que $x \rangle y$. En effet, si $z \in \mathsf{Ext}\ d'$ pour $d' \propto d[x]$ sans qu'il existe de radical y tel que $y \overset{x}{\mapsto} z$ alors $x \rightsquigarrow z$ et donc $x \in \mathsf{Ext}\ d$, ce qui nous est interdit par le choix de d. Il existe donc un radical y tel que $y \overset{x}{\mapsto} z \in \mathsf{Ext}\ d'$. Le lemme de transitivité assure finalement que $y \lhd d$ parce que $y \lhd x \cdot d'$ et $x \cdot d' \unlhd d$. Donc $x \rangle y$.

Nous montrerons maintenant que $\rangle$ contient des cycles. Il suffit pour cela de remarquer que le nombre de radicaux x qu'on peut extraire de d est borné par la longueur de d, d'après le critère 4 et le caractère bi-univoque de R.

Il existe donc un cycle de radicaux $x_1 \rangle x_2 \rangle ... \rangle x_k = x_1$ minimal en taille. Nous savons que par définition $x_i \neq x_{i+1}$ et $l > 1$. Aucun des radicaux x_i ne se trouve dans $\mathsf{Ext}\ d$. Il existe donc une suite d_i de dérivations $d = d_1 \equiv^1 d_2 \equiv^1 ... \equiv^1 d_n \equiv^1 e$ équivalentes telle qu'on puisse extraire les x_i de tous les d_j:

$$\forall i, \forall j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n \Longrightarrow x_i \lhd d_j$$

tandis qu'un certain x_l ne puisse pas être extrait de e: $x_l \not\trianglelefteq e$. Si $l = 1$ on décide de le remplacer par $l = k$, ce que nous autorise l'égalité: $x_1 = x_k$. Le lemme 4.16 des extractions simultanées nous informe que tous les radicaux x_i, $x_i \neq x_l$, peut être extrait de e. On peut donc extraire x_{l-1} de e et obtenir une dérivation $e' \propto e[x_{l-1}]$, équivalente $\equiv$ à $d[x_{l-1}]$ par le lemme 4.27 de simplification faible. On utilise le fait maintenant que $x_{l-1}\rangle x_l$. Le résidu y de x_l par x_{l-1}: $x_l \stackrel{x_{l-1}}{\mapsto} y$ se trouve dans $\mathsf{Ext}\ e'$, et donc peut en être extrait. Le radical x_l peut donc être extrait de $(x_{l-1} \cdot e')$ qui est plus standard que e. On obtient par le lemme de transitivité que x_l peut être extrait de e, ce qui contredit nos hypothèses. L'ensemble $\mathsf{Ext}\ d$ n'est donc vide que lorsque d elle aussi est une dérivation vide. $\square$

Il existe ainsi dans toutes les dérivations non vides un radical qu'aucune série de permutation n'empêche d'être extrait. $\square$

L'existence d'un radical dans $\mathsf{Ext}\ d$ constitue le fondement du théorème de standardisation et techniquement la partie la plus difficile à démontrer.

4.4.7 Démonstration du théorème de standardisation

Il ne nous reste à prouver après ce résultat que des propriétés simples des relations R, $\mathsf{R}_{\square}$ et R_{+} qui suffiront pour le théorème de standardisation. Tout d'abord nous distinguerons les permutations carrées et standardisantes parmi les S-permutations.

Définition 4.32 (permutation carré, permutation standardisante)

- *une dérivation d est dite obtenue d'une dérivation e par permutation carrée lorsque $d = f \cdot u \cdot v' \cdot g$ et $e = f \cdot v \cdot u' \cdot g$ avec $u\mathsf{R}_{\square}v$, où $u \underset{\square}{\overset{v}{\mapsto}} u'$ et $v \underset{\square}{\overset{u}{\mapsto}} v'$. On écrit $d\Diamond^1 e$.*
- *la relation d'équivalence $\Diamond$ est défini comme la clôture réflexive transitive de $\Diamond^1$. Si $d\Diamond e$ on dit que d est équivalent carré à e.*
- *une dérivation d est dite obtenue d'une dérivation e par permutation standardisante lorsque $d = f \cdot u \cdot f_v \cdot g$ et $e = f \cdot v \cdot u' \cdot g$ avec $v\mathsf{R}_{+}u$, où $u \underset{+}{\overset{v}{\mapsto}} u'$ et $f_v \propto v[\![u]\!]$. On écrit $d\angle e$.*
- *on écrit $d \lhd e$ lorsqu'il existe deux dérivations d' et e' telles que $d \trianglelefteq d'\angle e' \trianglelefteq e$.*

Définition 4.33 (dérivation standard) *Une dérivation e est standard lorsque pour toute dérivation $d \equiv e$, si $d \trianglelefteq e$ alors $e \trianglelefteq d$.*

La définition de dérivation standard a un inconvénient: rien n'assure si $f_1 \cdot f_2$ que f_1 et f_2 sont standards. Nous proposons la définition de "dérivation *très* standard" pour résoudre cette question: si $f_1 \cdot f_2$ est très standard alors f_1 et f_2 sont eux-mêmes très standards.

Définition 4.34 (dérivation très standard) *Une dérivation e est très standard si et seulement si il est impossible d'y appliquer une permutation standardisante après des permutations carrées:*

$$\forall e', e\Diamond e' \Longrightarrow \forall d, \neg(d\angle e')$$

Toute dérivation e très standard est une dérivation standard puisque $d \trianglelefteq e$ implique que $d\Diamond e$. Nous démontrerons la réciproque en lemme 4.38. Pour l'instant, nous préparons le lemme 4.36 de pré-caractérisation en démontrant le résultat suivant.

Lemme 4.35 (radicaux extérieurs et résidus) *Soit $r \cdot d$ une dérivation.*

- *si $x \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$ et $x \overset{r}{\mapsto} x'$ alors $x' \in \mathsf{Ext}\ d$,*
- *si $r \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$ et $x \overset{r}{\mapsto} y$ pour $y \in \mathsf{Ext}\ d$ alors $x \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$.*

Démonstration: nous prouvons la première assertion en remarquant que les dérivations $r \cdot d'$ sont équivalentes à $r \cdot d$ par permutations si $d \equiv d'$. Le radical $x \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$ peut donc en être extrait, ce qui oblige y à pouvoir être extrait de d' à cause du critère 1: $y \in \mathsf{Ext}\ d$. La preuve de la deuxième assertion utilise le lemme de transitivité. Soit $x \overset{r}{\mapsto} y$ et $y \in \mathsf{Ext}\ d$ pour $r \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$. Le radical r peut être extrait de toute dérivation e' si $e' \equiv r \cdot d$. La dérivation $d' \propto e'[r]$ est équivalente à d d'après le lemme 4.27 de simplification faible. Donc y peut être extrait de d', et x de $r \cdot d'$. La dérivation $r \cdot d'$ est plus standard que e', nous savons du lemme 4.21 de transitivité que x peut aussi être extrait de e'. Donc $x \in \mathsf{Ext}\ (r \cdot d)$. □On distingue parmi les dérivations très standard certaines dérivations très particulières.

Lemme 4.36 (lemme de pré-caractérisation) *Une dérivation $d = u_1 \cdots u_n$ est très standard lorsque:*

$$\text{à chaque étape } i\text{, le radical } u_i \text{ appartient à } \mathsf{Ext}\ (u_i \cdots u_n) \qquad (\star)$$

Démonstration: nous montrons que la propriété $(\star)$ est stable par permutation carrée. Soit un radical r et une dérivation d tels que r est un élément de $\mathsf{Ext}\ r \cdot d$. Soit deux radicaux x et y tels que $x \overset{r}{\mapsto} y$. Il découle du lemme 4.35 que

$$x \in \mathsf{Ext}\ r \cdot d \iff y \in \mathsf{Ext}\ d$$

On conclut: si $d = u_1 \cdots u_n$ et à chaque étape i, le radical u_i est dans $\mathsf{Ext}\ (u_i \cdots u_n)$, alors toute dérivation $e = v_1 \cdots v_n$ obtenue par permutations carrées sur d a la même propriété: à chaque étape i, le radical v_i appartient à $\mathsf{Ext}\ (v_i \cdots v_n)$. Nous en déduisons le résultat. □

Théorème 4.5 (Théorème de standardisation) *Soit un système axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ qui vérifie les axiomes A, B, C, D, FD+ et PERM+, et les critères 1,2,3,4,5,6 et 7. Il existe alors dans chaque classe $\equiv$ une et une seule dérivation standard à permutations carrées près.*

Démonstration:

Existence Nous démontrons par récurrence sur la profondeur $\prec\!\prec$ de d un résultat un peu plus fort: il existe pour tout f de profondeur $\prec\!\prec$ plus petite que d une dérivation $f' = v_1 \cdots v_n$ plus standard que f telle que $\forall i, v_i \in \mathsf{Ext}\ v_i \cdots v_n$. Soit x un radical dans $\mathsf{Ext}\ d$ et $f \propto d[x]$. La dérivation f est plus petite $\prec\!\prec$ que d. Il existe donc une dérivation $f' = v_1 \cdots v_n$ plus standard que f telle que $\forall i, v_i \in \mathsf{Ext}\ v_i \cdots v_n$. La dérivation $x \cdot f'$ est plus standard que $x \cdot f$, donc plus standard que d. $(x \cdot f')$ vérifie-t'elle notre critère? En effet, $x \in \mathsf{Ext}\ x \cdot f'$ parce que $x \cdot f' \equiv d$. Nous venons donc de démontrer par récurrence qu'il existe pour toute dérivation d une dérivation d' plus standard qui vérifie le critère du lemme 4.36 de pré-caractérisation. Cette dérivation d' est donc très standard.

Intermédiaire Nous démontrons ici que toute dérivation standard est très standard. Soit une dérivation standard e. Nous venons de montrer qu'il existe une dérivation d très standard telle que $d \trianglelefteq e$. La dérivation e est standard, c'est-à-dire que sa classe de permutation est $\trianglelefteq/\Diamond$-minimale. Il s'en suit que $e \trianglelefteq d$. Nous concluons que $e \Diamond d$ du fait que d est très standard. La dérivation e est donc très standard.

Unicité Supposons que e et f sont deux dérivations très standards équivalentes à d. Le résultat intermédiaire démontre que e et f sont très standards. Nous montrons que $e\Diamond f$ par récurrence sur la longueur de e. Soit x un radical élément de $\mathsf{Ext}\ d$. Les relations $x\lhd e$ et $x\lhd f$ sont renforcées en $x\lhd^{||}e$ et $x\lhd^{||}f$ parce que e et f sont très standards. Il s'en suit que $e[x]$ et $f[x]$ sont très standards (et donc standard) par décomposition; elles sont aussi équivalentes $\equiv$ d'après le lemme 4.27 de simplification faible et $x \in \mathsf{Ext}\ e$. On déduit par récurrence que $e[x]\Diamond f[x]$. La relation $e\Diamond f$ suit car par permutations carrées: $e\Diamond(x \cdot e[x])$ et $(x \cdot f[x])\Diamond f$. L'unicité de la classe $\Diamond$ standard est alors prouvée par notre récurrence.

□

Définition 4.37 *Nous appellerons axiomes de standardisation les axiomes A, B, C, D, FD+, PERM+ associés aux critères 1 à 7.*

Nous déduisons du résultat d'unicité une caractérisation des dérivations standards.

Lemme 4.38 (lemme de caractérisation) *Soit une dérivation $d = u_1 \cdots u_n$. Les trois propriété suivantes sont équivalentes:*

1. *la dérivation d est standard,*
2. *à chaque étape i entre 1 et n, le radical u_i appartient à* Ext $(u_i \cdots u_n)$,
3. *la dérivation d est très standard.*

Démonstration: le lemme 4.36 de pré-caractérisation montre ($2 \Longrightarrow 3$). Le résultat intermédiaire du théorème 4.5 de standardisation montre ($3 \Longrightarrow 1$), et ($1 \Longrightarrow 3$) est immédiat. Nous démontrons que ($1 \Longrightarrow 2$) est une conséquence de l'unicité de la dérivation standard dans sa classe de permutation, modulo $\Diamond$. Soit $e = u \cdot e'$ une dérivation standard équivalente à la dérivation d par permutation. L'unicité assure que e est plus standard que toutes les dérivations f équivalentes $\equiv$ à d:

$$f \equiv d \Longrightarrow e \unlhd f$$

Le lemme 4.21 de transitivité établit alors que u peut être extrait de toute dérivation f. le radical u se trouve donc dans $\mathsf{Ext}\ d$, qui vaut $\mathsf{Ext}\ e$. Le premier radical que réduit une dérivation $e = u \cdot e'$ standard se trouve dans $\mathsf{Ext}\ e$. La dérivation e est très standard, ce qui entraine que la dérivation e' qui la prolonge est très standard, donc standard. Ce qui démontre par récurrence ($1 \Longrightarrow 2$). □

4.5 Extension aux systèmes non orthogonaux

4.5.1 Les axiomes I, II, III et IV adaptés aux systèmes non orthogonaux

Cette partie explique comment introduire la relation d'incompatibilité et modifier les axiomes de standardisation pour démontrer le théorème dans le cadre de réécritures avec paires critiques. La rédaction de ces nouveaux axiomes s'appuie sur la relation de compatibilité $\uparrow$. Nous montrons en section 4.5.2 que les axiomes C, C', E, I, II, III et IV impliquent les critères 1 — 7 utilisés dans la section précédente.

Nous commençons par faire l'hypothèse des axiomes A, B et C du chapitre 2. Nous rappelons l'axiome C.

Petit axiome C (compatibilités): $u[\![r]\!]u'$, $v[\![r]\!]v'$, si $r \uparrow u$ et $r \uparrow v$ alors $u \uparrow v \Longrightarrow u' \uparrow v'$

Nous lui adjoignons une réciproque très faible:

Petit axiome C' (compatibilité des ancêtres): Soit quatre radicaux r, u, v et v' tels que $r \uparrow u$, $r \uparrow v$, $r \not\leq v$, et $v[\![r]\!]v'$. Si $u[\![r]\!] = \emptyset$ ou ($u[\![r]\!]u'$ et $u' \uparrow v'$) alors $u \uparrow v$.

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que deux radicaux incompatibles n'ont aucun résidu mutuels:

Petit axiome E (incompatibilité): Soit deux radicaux coinitiaux u et v. Si $u\#v$ alors $v[\![u]\!] = \emptyset$.

La relation de compatibilité $\uparrow$ est indispensable si on veut étendre correctement les deux axiomes de la partie 4.3.

Dans le cas orthogonal, la relation $\leq$ est un ordre, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, anti-symétrique et transitive. Dans le cas orthogonal, nous voudrons une relation $\leq$ réflexive, anti-symétrique et $\uparrow$-*transitive.*

Définition 4.39 *$\uparrow$-transitivité Soit un système à compatibilité et emboîtement $(\mathcal{D}, \uparrow, <)$.*

La relation $<$ est $\uparrow$-transitive lorsque pour tout triplet (u, v, w) de radicaux tels que $u \uparrow v$, $u \uparrow w$ et $v \uparrow w$, si $u \leq v$ et $v \leq w$ alors $u \leq w$.

Une relation binaire $<$ réflexive, anti-symétrique et transitive sur les radicaux est appelée un $\uparrow$-ordre dans $(\mathcal{D}, \uparrow)$.

L'axiome I une fois adapté indique qu'un radical r ne duplique ou n'efface que les radicaux x qu'il contient ou avec qui il forme une paire critique.

Axiome I# Linéarité

Soit deux radicaux coinitiaux r et u. Ils vérifient: $(r \not\leq u$ et $r \uparrow u) \Longrightarrow \exists! u', u[\![r]\!]u'$.

L'axiome II En effet, l'axiome E et l'hypothèse qu'il existe des résidus de u et v par réduction de r imposent $r \uparrow x$ et $r \uparrow y$.

Axiome II# Non-Contextualité

Soit r, u, v, u' et v' cinq radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Ils vérifient la propriété suivante:

$$(u < v \iff u' < v') \text{ ou } r < v.$$

La traduction que nous proposons des axiomes III et IV est assez naturelle. Le changement le plus intéressant se situe dans l'axiome III: un radical r emboité sous u et tel que $u \uparrow r$ peut créer (ou transformer un radical qu'il domine en) un radical s lui-même en paire critique avec u', le résidu unique de u par réduction de r: $u[\![r]\!]u'$.

Nous donnons un exemple syntaxique de ce comportement. Soit le système du premier ordre:

$$F(x) \to I \quad F(B) \to J \quad A \to B$$

Le radical $u : F(A) \to I$ contient le radical $r : F(A) \to F(B)$ et lui est compatible ; le radical r crèe un radical $s : F(B) \to J$ qui est incompatible avec $u' : F(B) \to I$, le résidu de u par r.

Axiome III# d'enclave

Soit r, u, u' trois radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$.

(Création) si $u < r$ et r crée s, c'est-à-dire $[\![r]\!]s = \emptyset$, alors $u' < s$ ou $u'\#s$.

(Emboîtement) si $u < r < v$ et $v[\![r]\!]v'$ alors $u' < v'$ ou $u'\#v'$.

Axiome IV# stabilité
Soit deux radicaux compatibles et disjoints u et v: $u \uparrow v$ et $u \parallel v$, et leurs résidus mutuels les radicaux u' et v': $u[\![v]\!]u'$ et $v[\![u]\!]v'$. Soit t_1 un radical coinitial à v' et t_2 un radical coinitial à u'. Nous supposons qu'il existe un radical t' tel que $t_1[\![v']\!]t'$ et $t_2[\![u']\!]t'$.

Si $v' \not\leq t_1$ et $u' \not\leq t_2$ alors
(Création) il existe un radical t compatible avec u et v tel que $t[\![u]\!]t_1$ et $t[\![v]\!]t_2$.
(Emboîtement) ce radical t vérifie que $u \not\leq t$ ou $v \not\leq t$.

Les permutations carrées et standardisantes sont définies de la même manière que dans le cas orthogonal, en permutant des radicaux compatibles disjoints ou emboîtés. Comme dans le cas orthogonal, on obtient un pré-ordre de standardisation $\trianglelefteq$ dont les dérivations minimales sont appelées "dérivations standards".

4.5.2 Vérification des critères

Nous devons maintenant vérifier que notre démonstration de standardisation s'applique aussi bien aux systèmes orthogonaux qui vérifient les axiomes A, B, D, FD, PERM, I, II, III et IV qu'aux systèmes non orthogonaux qui vérifient les axiomes A, B, C, C', D, E, FD+, PERM+, I#, II#, III# et IV#. Tout système $(\mathcal{D}, \uparrow, <)$ peut être traduit dans un système axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ en définissant la relation R comme suit:

$$\text{pour tout couple } (u, v) \text{ de radicaux, } u\mathsf{R}v \text{ lorsque } u \uparrow v \text{ et } u \not\leq v.$$

Nous démontrons que tout système non orthogonal $(\mathcal{D}, \uparrow, <)$ enrichi d'une relation d'emboîtement qui vérifie les axiomes A, B, C, C', D, E, FD+, PERM+, I#, II#, III# et IV# est traduit en un système de axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ qui vérifie les axiomes A, B, C, D, FD+, PERM+, et les critères 1 à 7. Le théorème de standardisation peut donc être appliqué à ces systèmes.

1. le critère 1 est démontré avec l'axiome I#,

2. le critère 2 est démontré à partir de l'axiome 2 et des axiomes C, C' et D. Soit des radicaux r, u et v tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Supposons que $r \uparrow u$ et $r\mathsf{R}v$, c'est-à-dire $r \uparrow v$ et $r \not< v$.

   Si $u\mathsf{R}v$ alors: $u' \uparrow v'$ par l'axiome C; $u' < v'$ impliquerait $u < v$ par l'axiome 2 et $r \not< v$; $u' = v'$ impliquerait $u = v$ par l'axiome D. Donc $u\mathsf{R}v$ implique $u'\mathsf{R}v'$.

   Si $u'\mathsf{R}v'$ alors: l'axiome C' implique $u \uparrow v$ parce que $r \uparrow u$, $r \uparrow v$, $r \not< v$ et $v[\![r]\!]v'$, et $u[\![r]\!]u'$ et $u' \uparrow v'$; si $u = v$ alors $u' = v'$ par l'axiome 1 et $r \not\leq v$; si $u < v$ alors $u' < v'$ par l'axiome 2 et $r \not< v$. Donc $u'\mathsf{R}v'$ implique $u\mathsf{R}v$.

3. le critère 3 est démontré à partir des axiomes 1 et E. Soit trois radicaux coinitiaux u, v et x tels que $u \uparrow x$ et $x[\![u]\!] = \emptyset$. Supposons que $u\mathsf{R}v$, c'est-à-dire $u \uparrow v$ et $u \not\leq v$.

   Nous démontrons que $v \uparrow x$ avec l'axiome C'. En effet, on a $u \uparrow x$, $u \uparrow v$, $u \not< v$ et $v[\![u]\!]v'$ et $x[\![u]\!] = \emptyset$.

   Pour démontrer que $x \not< v$ on utilise la $\uparrow$-transitivité de $<$. Tout d'abord, $u \uparrow v$, $u \uparrow x$ et $v \uparrow x$. Ensuite, par l'axiome 1, $u < x$. Si $x < v$ alors $u < v$, ce qui contredit $u\mathsf{R}v$.

4. le critère 4 est démontré à partir de l'axiome I# et l'axiome D. Prenons trois radicaux r, u, v, u' et v' tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $u = v$ et $r\mathsf{R}u$ alors u a pour résidu u' et v', ce qui par l'axiome 1 montre que $u' = v'$. Si $u' = v'$ alors u et v ont un résidu en commun par r: l'axiome D impose que $u = v$.

5. le critère 5 reprend l'axiome III#. Supposons cinq radicaux u, v, v', x_1 et x' tels que $v \overset{u}{\underset{+}{\mapsto}} v'$ et $x_1\mathsf{R}_+v'x'$. Cela traduit en terme de compatibilit]'e et d'ordre signifie que $u \uparrow v$, $v < u$, $v' \uparrow x_1$ et $v' \not< x_1$. L'axiome III# (création) indique que u ne crée pas x_1. Il existe donc un radical x tel que $x[\![u]\!]x_1$. L'axiome III# (emboîtement) indique que u ne contient pas x: $u \not< x$. Les axiomes A et E montrent que $u \neq x$ et $u \uparrow x$ du fait que x a un résidu par réduction de u. Autrement dit: $x \overset{u}{\mapsto} x_1$. Parce que les critères 1, 2 et 3 ont déja' été vérifiés, on peut appliquer le lemme de développement sur $\{u, v\}$ et démontrer qu'il existe un radical x_2 tel que $x \overset{v}{\mapsto} x_2$ et $x_2 \overset{f}{\mapsto} x$ pour tout développement f de $u[\![v]\!]$. Ce qui démontre que le critère 5 est vrai lorsque le système d'emboîtement vérifie les axiomes A, B, C, C', D, E, I#, II# et III#.

6. le critère 6 est démontré de la même manière que le critère 5 en remplaçant l'axiome III# par l'axiome IV#.

7. le critère 7 est facile à prouver: si $u \uparrow v$ alors soit $u = v$, soit $u < v$, soit $u \not\leq v$. La propriété d'ordre de $<$ implique dans le cas $u < v$ que $v \not< u$. On en déduit que $u \uparrow v$ implique soit $u = v$, soit $v\mathsf{R}u$, soit $u\mathsf{R}v$

Le théorème de standardisation

On conclut. La démonstration du théorème de standardisation donnée en section 4.4 s'applique au cas des systèmes orthogonaux *et* au cas des systèmes non orthogonaux, s'ils vérifient les axiomes de standardisation donnés jusqu'ici. Nous pouvons donc écrire:

Théorème 4.6 (Existence et unicité) *Soit un système $(\mathcal{D}, \uparrow, <)$ non orthogonal enrichi d'un $\uparrow$-ordre $<$ sur les radicaux coinitiaux. Nous supposons qu'il vérifie les axiomes A, B, C, C', D, E, PERM+, I#, II#, III# et IV#. Il existe alos dans chaque classe de permutation $\equiv$ une dérivation standard plus standard que toutes les dérivations de cette classe. Cette dérivation d_{std} est unique dans sa classe $\equiv$ à permutations carrées $\diamond$ près.*

Nous conseillons en première lecture d'arrêter le chapitre ici et de le reprendre en section 4.7.

Pour simplifier, nous appelons dorénavant axiomes I, II, III et IV les axiomes I#, II#, III# et IV#.

4.6 Théorème d'existence sans axiomes III et IV

Nous avons démontré l'existence et l'unicité d'une dérivation standard dans chaque classe de permutation à partir des axiomes I, II, III et IV. Nous voulons démontrer ici l'existence pour chaque dérivation d'une dérivation standard sans utiliser les axiomes III et IV. Autrement dit, nous démontrons ce résultat d'existence à partir des critères 1, 2 et 3, sans faire appel aux critères 4, 5, 6 et 7.

Hypothèse 4.1 *Dans cette section, le système axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ vérifie les axiomes A, B, C, D, et critères 1, 2 et 3.*

4.6.1 Résultats préliminaires

Nous commençons par donner l'équivalent des lemmes de *traversée* et de l'*extraction* pour les permutations carrées. Nous bénéficions du fait que les deux relations $\upuparrows$ et R' entre radicaux définies par

$$\upuparrows = \uparrow \cup \mathsf{R}_{\square} \quad \text{et} \quad \mathsf{R}' = \mathsf{R}_{\square}$$

vérifient les critères et axiomes énoncés pour $\uparrow$ et R au cours de la sous-partie 4.4.1. Les résultats d'alors peuvent être répris tels quels dans ce nouveau cadre, ce qui entraîne les lemmes suivant de développements carrés et de traversée carrée:

Lemme 4.40 (lemme de développement carré récriproque) *Soit U un ensemble de $\mathfrak{M}$ et f un développement de U. Si $\forall u, v \in U, u \neq v \implies u\mathsf{R}_{\square}v$ alors: $f\mathsf{R}_{\square}x$ équivaut à $\forall u \in U, u\mathsf{R}_{\square}x$.*

Lemme 4.41 (lemme de traversée carrée) *On en déduit avec l'axiome de confluence locale que la relation $x \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$ est stable par équivalence $\diamondsuit$ sur d: $x \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} x' \iff x \overset{e}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$ pour $d\diamondsuit e$. De plus, si $d' \propto d[x]$ et $e' \propto e[x]$ alors $d'\diamondsuit e'$.*

Nous reprenons pour $\mathsf{R}_{\square}$ la définition 4.13 d'extraction $\lhd$:

Définition 4.42 (extraction carrée) *On dit que x peut être extrait carré de d, ce qui s'écrit $x \lhd^{||} d$ lorsque d peut se décomposer en $d = d_1 \cdot x' \cdot d_2$ où $x \overset{d_1}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$.*

Lemme 4.43 (transitivité carrée) *Si $x \lhd^{||} d$ et $d\diamondsuit e$ alors $x \lhd^{||} e$ et $d[x]\diamondsuit e[x]$.*

Démonstration: la première partie du lemme est la reprise du lemme 4.21 de transitivité pour $\mathsf{R}_{\square}$, et la seconde partie la reprise du lemme 4.27 de simplification faible. $\square$
Les trois propriétés qui suivent ne peuvent pas être déduite de résultats précédents sur $\equiv$, au moins parce qu'elles font intervenir la relation $\angle$.

Lemme 4.44 *Si $d \angle e$ et $e\mathsf{R}_{\square}x$ alors $d\mathsf{R}x$ et $d' \angle e[x]$ pour $d' \propto d[x]$.*

Démonstration: ce lemme sort du schéma de traduction des lemmes de R dans ceux de $\mathsf{R}_{\square}$. La première propriété $d\mathsf{R}x$ est une application du lemme 4.12 de traversée. Pour démontrer la seconde propriété nous travaillons sur une permutation standardisante formée par les deux radicaux u et v emboîtés: $u \overset{v}{\underset{+}{\mapsto}} u'$ et $f \propto v[\![u]\!]$. Soit x, x' et x'' trois radicaux tels que $x \overset{v}{\underset{\square}{\mapsto}} x' \overset{u'}{\underset{\square}{\mapsto}} x''$. Soit v_1 et u'_1 tels que $v \overset{x}{\mapsto} v_1$ et $u' \overset{x'}{\mapsto} u'_1$. Il nous faut comparer $(u \cdot f)[x]$ et $(v \cdot u')[x]$ et démontrer qu'ils forment un diagramme de permutation standardisante. Les deux radicaux x' et u' sont disjoints tandis que $x \overset{v}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$ et $u \overset{v}{\underset{+}{\mapsto}} u'$: le critère 2 implique (parce que $v \uparrow u$ et $v \uparrow x$) que x et u sont disjoints: $x\mathsf{R}_{\square}u$. Soit u_1 et x_+ tels que $u \overset{x}{\underset{\square}{\mapsto}} u_1$ et $x \overset{u}{\underset{\square}{\mapsto}} x_+$. L'axiome PERM+ appliqué aux couples (x, v) et (u, v) établit que $u \overset{x}{\underset{\square}{\mapsto}} u_1 \overset{v_1}{\mapsto} u'_1$ et $x \overset{u}{\underset{\square}{\mapsto}} x_+ \overset{f}{\mapsto} x''$. Soit la dérivation h un développement de $(u \cdot f)[x]$. On peut écrire la dérivation h comme $u_1 \cdot f_1$ où f_1 développe $f[x_+]$. La dérivation $(v \cdot u')[x]$ vaut $v_1 \cdot u'_1$. Nous voulons montrer que $(u_1 \cdot f_1) \angle v_1 \cdot u'_1$ quel que soit $f_1 \propto f[x_+]$. On sait que u_1 emboîte v_1 du fait que u emboîte v et $u \overset{x}{\underset{\square}{\mapsto}} u'$, $v \overset{x}{\underset{\square}{\mapsto}} v'$. Reste à prouver que f_1 est un développement de $v_1[\![u_1]\!]$, puisqu'on sait que $u_1 \overset{v_1}{\underset{+}{\mapsto}} u'_1$. Nous utilisons pour cela le lemme 2.53: f_1 développe $f[x^+]$ où x^+ traverse f et où f est un développement de $v[\![u]\!]$. Le lemme de développement établit que le radical x^+ traverse tous les radicaux de $v[\![u]\!]$, et donc leur est compatible. La dérivation f_1 est donc un développement de l'ensemble $v[\![u]\!][\![x^+]\!]$ qui vaut $v[\![x]\!][\![u_1]\!]$ par application de l'axiome PERM+ de permutation. Voilà la démonstration terminée, puisque $f_1 \propto v_1[\![u_1]\!]$, et le diagramme de permutation standardisante complété. □

Corollaire 4.45 (lemme du pas) *Supposons que $x \lhd^{||} e$ et $d \angle e$ et $x \lhd d$. Toutes les dérivations d' qui développent $d[x]$ vérifient alors $d' \angle e[x]$.*

Démonstration: On peut écrire $e = f \cdot v \cdot u' \cdot g$ et $d = f \cdot u \cdot d_v \cdot g$ avec $v \mathsf{R}_+ u$, $u \overset{v}{\underset{+}{\mapsto}} u'$ et $d_v \propto v[\![u]\!]$. Nous résolvons le corollaire par une étude de cas:

- si $x \lhd^{||} f$ alors $x \lhd^{||} d$ et $d[x] \angle e[x]$,
- le radical x ne peut pas avoir v comme résidu par f: on ne pourrait pas l'extraire de d. Il ne peut pas avoir non plus avoir u' comme résidu par $f \cdot v$: on ne pourrait pas l'extraire carré de e.
- ne reste que le cas où $x \overset{f \cdot v \cdot u'}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$ et $x' \lhd^{||} g$, pour un certain radical x'. On utilise dans ce cas le lemme 4.44 pour établir que $x \overset{f \cdot u \cdot d_v}{\mapsto} x'$ et que $\delta \angle (f \cdot v \cdot u')[x]$ si $\delta \propto (f \cdot u \cdot d_v)[x]$. Tout développement d' de $d[x]$ est la composition d'un de ces $\delta \propto (f \cdot u \cdot d_v)[x]$ et de $g[x']$: $d' = \delta \cdot g[x']$. Quant à la dérivation $e[x]$, elle est la composition de $(f \cdot v \cdot u')[x]$ avec le même $g[x']$: $e[x] = (f \cdot v \cdot u')[x] \cdot g[x']$. La propriété $d' \angle e[x]$ est aussitôt établie, ce qui termine la démonstration du corollaire 4.45.

□

Une démonstration doit savoir trouver son chemin dans un environnement embarrassé. Rien n'indique dans le lemme du pas que x puisse être extrait de d. La réduction d'un radical disjoint de x peut placer des radicaux sous celui-ci et interdire ainsi à la relation $\lhd^{||}$ de rester stable lors des permutations standardisantes. L'emploi de cette relation doit être limité pour cette raison à un pas de standardisation. Il faut rattacher cette limitation à des comportements inattendus de la procédure de standardisation qui peut par exemple boucler, comme nous le verrons en section 4.8.1. Notre axiomatique est donc suffisamment faible pour ne pas imposer à $\unlhd / \Diamond$ d'être un ordre et suffisamment précise pour décider l'existence pour $\unlhd$ d'un élément minimum (ou minimal) dans chaque classe $\equiv$. Le lemme du pas est essentiel dans notre dispositif technique. En particulier, la preuve du théorème 4.7 d'existence fait usage du corollaire suivant:

Corollaire 4.46 *Si $x \lhd d$ et $d \lhd e$ avec $x \lhd^{||} e$ alors $e[x]$ n'est pas très standard.*

Démonstration: au moyen d'une contradiction. Si $d \lhd e$, alors il existe des dérivations d' et e' telles que $d \unlhd d'$ et $d' \angle e'$ avec $e' \Diamond e$. Soit x un radical tel que $x \lhd d$ et $x \lhd^{||} e$. Il suit du lemme 4.21 de transitivité et de $d \unlhd d'$ que $x \lhd d'$. Il suit du lemme 4.43 de transitivité carrée et de $e' \Diamond e$ que $x \lhd^{||} e'$ et $e[x] \Diamond e'[x]$. En appliquant le lemme du pas, corollaire 4.45, et $x \lhd^{||} e'$, on montre que $e'[x]$ n'est pas très standard. Puisque $e'[x]$ et $e[x]$ sont équivalentes $\Diamond$, il s'en suit que $e[x]$ n'est elle non plus pas très standard. □

4.6.2 Introduction d'une nouvelle relation: $\mathsf{R}_=$

Nous introduisons une relation $\mathsf{R}_=$ qui généralise la relation $\lhd^{||}$ — au sens où un radical x qui vérifie $x \lhd^{||} d$ vérifie aussi $x \mathsf{R}_= d$.

Définition 4.47 *Soit $\mathbf{Z}$, u et d un ensemble co-initial de radicaux deux à deux compatibles, un radical et une dérivation co-initiaux.*

$$\mathbf{Z}\mathsf{R}u \iff \forall z \in \mathbf{Z}, z\mathsf{R}u$$

$$\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}u \iff u \in \mathbf{Z} \textit{ ou } \mathbf{Z}\mathsf{R}u$$

$$\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d \iff \forall u,\ d = d_1 \cdot u \cdot d_2 \Longrightarrow \mathbf{Z}[\![d_{i-1}]\!]\mathsf{R}_{=}u$$

1. *$f \propto d[\mathbf{Z}]$ ne définit qu'une seule dérivation qu'on note $d[Z]$*

2. *on dit lorsque $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$ que $\mathbf{Z}$ ronge d, et on appelle projection interne la transformation de d à $d[\mathbf{Z}]$.*

Plus compliquée que les deux relations $\lhd$ et $\lhd^{||}$ de la section 4.4 la relation $\mathsf{R}_{=}$ est pourtant très naturelle. En particulier la relation $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$ certifie qu'aucun radical de d n'est dupliqué lors de la projection de d à $d[\mathbf{Z}]$: soit que le radical u que $d = d_1 \cdot u \cdot d$ réduit se trouve dans $\mathbf{Z}[\![d_1]\!]$ et pour cette raison se trouve réduit lors de la projection, soit qu'aucun des radicaux de $\mathbf{Z}[\![d_1]\!]$ ne contienne u, ce qui fait que u traverse lors de la projection le développement $f_{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{Z}[\![d_1]\!]$: $u \overset{\mathbf{Z}[\![d_1]\!]}{\mapsto} u'$. Il faut remarquer que la relation $\mathsf{R}_{=}$ généralise la relation $\lhd^{||}$ en ce sens que $x\lhd^{||}d$ implique $\{x\}\mathsf{R}_{=}d$. Plus générale, $\mathsf{R}_{=}$ vérifie aussi la même propriété que $\lhd^{||}$: si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$ alors la projeté $d[\mathbf{Z}]$ contient moins d'étapes de réduction que d.

Cette généralisation de $\lhd^{||}$ est utile. L'introduction de $\mathsf{R}_{=}$ résoud le problème technique que nous évoquions après le lemme du pas, corollaire 4.45. Certes, la dérivation projetée obtenue à partir d'une extraction carrée $x\lhd^{||}d$ conserve certains caractère de non standardisation (voir le corollaire 4.46). Néanmoins, lorsque

$$x\lhd^{||}e \text{ et } d\angle e$$

le radical x n'est pas toujours extractible carré de d. En effet, le radical extérieur u qu'on permute peut placer les résidus du radical intérieur v sous (le résidu de) x. Il faut remarquer ici la tolérance de notre axiomatique: le radical extérieur disjoint du résidu x' de x peut pourtant placer des résidus de v sous ce radical x'[1].

Si x n'est pas extractible carré de d mais $d[x]\diamond e[x]$ alors x a pour résidu le radical intérieur de la permutation de u sur v. Il s'en suit que x ne peut pas être extrait carré de $d = d_1 \cdot u \cdot d_2$ puisque x a pour résidu par d_1 le radical $x' = v$ emboité sous u. Nous montrons à quoi la relation $\mathsf{R}_{=}$ sert ici. Parce que $x\lhd^{||}e$, le singleton $\{x\}$ vérifie $\{x\}\mathsf{R}_{=}d$. Nous montrons que $\{x\}\mathsf{R}_{=}e$. En effet le radical v résidu de x par d_1 a pour résidu par u les radicaux de l'ensemble $v[\![u]\!]$. La dérivation d_2 que calcule d après réduction de Nous avons écrit $d = d_1 \cdot u \cdot d_2$; parce que $d\angle e$ la dérivation d_2 se factorise en $d_2 = f \cdot d_3$ où f est un développement de $v[\![u]\!]$. En aparté: on démontre facilement que si f est un développement de $\mathbf{Z}$, alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}f$ et plus généralement (du fait que $\mathbf{Z}[\![f]\!] = \emptyset$) que $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}f \cdot g$ quelle que soit la dérivation g. Il s'en suit que $\{v\}\mathsf{R}_{=}d_2$, et donc que $\{x\}\mathsf{R}_{=}d$.

Plus généralement, le lemme 4.52 assure que si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}e$ et $d\angle e$, alors $d[\mathbf{Z}]\angle e[\mathbf{Z}]$ ou $(d[\mathbf{Z}]\diamond e[\mathbf{Z}]$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d)$. La relation $\mathsf{R}_{=}$ bénéficie donc d'une invariance de plus que la relation $\lhd^{||}$, ce qui en fait une relation techniquement très satisfaisante.

Lemme 4.48 *Si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$, alors:*

- *$f \propto d[\mathbf{Z}]$ ne définit qu'une seule réduction,*

[1] Ce comportement était interdit par l'axiomatique proposée dans [GLM 92].

- *la longueur de cette dérivation notée $d[\mathbf{Z}]$ est bornée par la longueur de d.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur n de la dérivation d. Pour le cas $n = 1$: après réduction de $\mathbf{Z}$, un radical u ne peut avoir qu'un résidu au plus lorsque $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}u$. Si $u \in \mathbf{Z}$, alors $u[\mathbf{Z}] = \emptyset$. Si $\forall z \in \mathbf{Z}$, $z\mathsf{R}u$, alors il existe un résidu et un seul de u par $\mathbf{Z}$ d'après le lemme 4.11 du développement.

Si le résultat est démontré pour des longueurs de dérivation plus petites que n. Soit d une dérivation de longueur $n+1$. Si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$ et $d = u \cdot d'$, alors $\mathbf{Z}[\![u]\!]\mathsf{R}_{=}d'$ par définition. Si $u \in \mathbf{Z}$ alors $f \propto d[\mathbf{Z}]$ signifie $f \propto d'[\mathbf{Z}[\![u]\!]]$, et donc est unique par récurrence. Sa longueur est bornée par la longueur de d' et donc par celle de d. Dans l'autre cas, si $u \notin \mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}u$, alors il existe un radical u' tel que $u \overset{g}{\mapsto} u'$ pour $g \propto \mathbf{Z}$; $f \propto d[\mathbf{Z}]$ signifie dans ce cas $f = u' \cdot f'$ où $f' \propto d'[\mathbf{Z}[\![u]\!]]$. Il existe par récurrence une seule telle dérivation f', et donc une unique dérivation f. La longueur de f vaut celle de f' incrémentée de un, elle est donc bornée par celle de d' incrémentée de un, c'est-à-dire la longueur de d. □

Lemme 4.49 *Si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$ et $\mathbf{Y} \subset \mathbf{Z}$, alors $f \propto d[\mathbf{Y}] \Longrightarrow (\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!])\mathsf{R}_{=}f$.*

Démonstration: remarquons tout d'abord que $\mathbf{Y}$ ne vérifie pas nécessairement $\mathbf{Y}\mathsf{R}_{=}d$. En effet, si $d = d_1 \cdot u \cdot d_2$ et u appartient à $\mathbf{Z}[\![d_1]\!]$ un radical de $\mathbf{Y}[\![d_1]\!]$ peut très bien emboîter u. On montre ici que $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]$ rongera néanmoins toute dérivation $f \propto d[\mathbf{Y}]$. La preuve se fait par récurrence sur la longueur de d. Soit $d = u \cdot d'$. $\mathbf{Z}[\![u]\!]\mathsf{R}_{=}d'$ par définition et $\mathbf{Y}[\![u]\!] \subset \mathbf{Z}[\![u]\!]$. Soit $f \propto d[\mathbf{Y}]$. Cette dérivation f peut s'écrire $f_1 \cdot f_2$ où $f_1 \propto u[\mathbf{Y}]$ et $f_2 \propto d'[\mathbf{Y}[\![u]\!]]$. Par récurrence, $\mathbf{Z}[\![u]\!][\![\mathbf{Y}[\![u]\!]]\!]\mathsf{R}_{=}f_2$. L'axiome des développements finis nous assure que $\mathbf{Z}[\![u]\!][\![\mathbf{Y}[\![u]\!]]\!]$ vaut $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!][\![f_1]\!]$. Il suffit donc de prouver que $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]$ ronge f_1 pour prouver que $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]$ ronge f.

- si u est un élément de $\mathbf{Z}$, alors tous ses résidus par $\mathbf{Y}$ sont éléments de $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]$: $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]\mathsf{R}_{=}f_1$ puisqu'à chaque étape de que réduit f_1 le radical se trouve dans les résidus de $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]$.

- sinon $\mathbf{Z}\mathsf{R}u$ et alors $\mathbf{Y}\mathsf{R}u$ du fait que $\mathbf{Y} \subset \mathbf{Z}$. Il existe donc un résidu unique u' de u par $\mathbf{Y}$ qui vérifie d'après le lemme 4.9 de développement que $\mathbf{Z}[\![\mathbf{Y}]\!]\mathsf{R}_{=}u'$. Puisque dans ce cas $f_1 = u'$, le tour est joué.

□

Le lemme suivant reprend les mécanismes qui ont permis de démontrer le lemme 4.11 de développement réciproque.

Lemme 4.50 (lemme du rongeur) *Soit $\mathbf{Z}$ un ensemble de $\mathfrak{M}$, u et r deux radicaux coinitiaux à $\mathbf{Z}$. Si $r \uparrow \mathbf{Z}$ et $u \overset{r}{\mapsto} u'$ pour un certain radical u' alors:*

$$\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}u \iff \mathbf{Z}[\![r]\!]\mathsf{R}_{=}u'$$

Démonstration: si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}u$ et $u \overset{r}{\mapsto} u'$, alors $u \in \mathbf{Z} \Longrightarrow u' \in \mathbf{Z}[\![r]\!]$ tandis que $\mathbf{Z}\mathsf{R}u$ implique $\mathbf{Z}[\![r]\!]\mathsf{R}u'$ d'après le critère 2. Dans l'autre sens, si $\mathbf{Z}[\![r]\!]\mathsf{R}u'$ alors: si $u' \in \mathbf{Z}[\![r]\!]$ le critère 4 assure que $u \in \mathbf{Z}$ parce que $r \uparrow \mathbf{Z}$; si $\mathbf{Z}[\![r]\!]\mathsf{R}u'$, alors soit $z \in \mathbf{Z}$: si $z[\![r]\!]z'$, alors $z\mathsf{R}u$ d'après le critère 2, sinon $z[\![r]\!] = \emptyset$ et $z \uparrow r$, donc $z\mathsf{R}u$. □

Les deux lemmes de projection

Nous démontrons les deux lemmes de projection qui interviennent dans la démonstration du corollaire 4.53. Ce résultat corollaire permettra de démontrer ultérieurement le lemme 4.54.

Le premier lemme, dit de projection du carré, adapte pour $\mathsf{R}_=$ le lemme 4.43 de transitivité carrée.

Lemme 4.51 (lemme de projection du carré) *Si $d\Diamond e$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}_=e$ alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}_=d$ et $d[\mathbf{Z}]\Diamond e[\mathbf{Z}]$.*

Démonstration: nous allons démontrer la propriété en étudiant le diagramme de permutation carrée formé par deux radicaux u et v disjoints et leurs résidus mutuels u' et v'. Soit $\mathbf{Z}$ un ensemble de radicaux tel que $\mathbf{Z}\mathsf{R}_=v\cdot u'$. Le lemme 4.49 montre que $\mathbf{Z}$ ronge u parce que $\mathbf{Z}[\![v]\!]$ ronge u' et que $v\uparrow \mathbf{Z}$. Sitôt que $\mathbf{Z}$ ronge u, on sait que $u\uparrow\mathbf{Z}$ parce que $\mathbf{Z}\in\mathfrak{M}$. Puisque $\mathbf{Z}\mathsf{R}_=v$ et que $u\uparrow\mathbf{Z}$, l'ensemble $\mathbf{Z}[\![u]\!]$ ronge v'. L'ensemble $\mathbf{Z}$ ronge donc $u\cdot v'$ s'il ronge $v\cdot u'$.

Il faut étudier maintenant le rapport entre les dérivations $(u\cdot v')[\mathbf{Z}]$ et $(v\cdot u')[\mathbf{Z}]$. Notons que si u appartient à $\mathbf{Z}$ il est réduit ou effacé durant la réduction de $\mathbf{Z}$. Le radical u est lui-aussi effacé par $\mathbf{Z}[v]$. La permutation carrée que u et v constituent disparaît par la même occasion et

$$(u\cdot v')[\mathbf{Z}] = v'[\mathbf{Z}[\![u]\!]] = v[\mathbf{Z}] = (v\cdot u')[\mathbf{Z}]$$

De même si v appartient à $\mathbf{Z}$.

Lorsque $\mathbf{Z}$ ne contient ni u ni v, alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}u$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}v$. Les deux radicaux u et v possèdent des résidus uniques par développement de $\mathbf{Z}$: $u\overset{f}{\mapsto}u^+$ et $v\overset{f}{\mapsto}v^+$ où $f\propto\mathbf{Z}$. Une récurrence sur la longueur de f démontre que u^+ et v^+ sont disjoints comme u et v le sont, grâce au critère 2. Soit $u^\sim$ et $v^\sim$ les radicaux tels que $u^+\underset{\square}{\overset{v^+}{\mapsto}}u^\sim$ et $v^+\underset{\square}{\overset{u^+}{\mapsto}}v^\sim$. Le lemme 4.11 montre que $v\overset{f}{\mapsto}v^+\overset{u^+}{\mapsto}v^\sim$ implique $v\overset{u}{\mapsto}v'\overset{f'}{\mapsto}v^\sim$ si $f'\propto\mathbf{Z}[\![u]\!]$ parce que $f\cdot u^+$ et $u\cdot f'$ sont alors des développements de $\mathbf{Z}\cup\{u\}$. Symétriquement, $u'\overset{g'}{\mapsto}u^\sim$ si $g'\propto\mathbf{Z}[\![v]\!]$. Les dérivations $u\cdot v'$ et $v\cdot u'$ ont donc bien pour résidus par $\mathbf{Z}$ les dérivations $u^+\cdot v^\sim$ et $v^+\cdot u^\sim$, deux dérivations qui forment un diagramme de permutation carrée. $\square$

Le second lemme, dit de projection locale, corrige le lemme du pas, corollaire 4.45, dans le sens exposé en début de section 4.6.2.

Lemme 4.52 (projection locale de la standardisation) *Si $d\angle e$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}_=e$, alors $d[\mathbf{Z}]\angle e[\mathbf{Z}]$ ou $(d[\mathbf{Z}]\Diamond e[\mathbf{Z}]$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}_=d)$.*

Démonstration: la preuve de cette proposition ressemble à la précédente. Soit u et v deux radicaux tels que $v\mathsf{R}_+u$ avec $u\underset{+}{\overset{v}{\mapsto}}u'$ et $f_v\propto v[\![u]\!]$: $u\cdot f_v\angle v\cdot u'$. Supposons que $\mathbf{Z}$ est un ensemble de $\mathfrak{M}$ qui ronge $v\cdot u'$. Alors $\mathbf{Z}[\![v]\!]$ ronge u', donc $\mathbf{Z}$ ronge u parce que $\mathbf{Z}\uparrow v$. Deux cas se présentent:

1) Si $v\notin\mathbf{Z}$ alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}v$; bien qu'aucun radical z dans $\mathbf{Z}$ ne contienne v, il se peut qu'un des résidus z' de z par réduction de u contienne un radical dans $v[\![u]\!]$. On retrouve cette éventualité dans le λ-calcul lorsque deux radicaux disjoints z et v ont des résidus emboîtés après une réduction u plus extérieure. Il n'y a donc aucun espoir de voir l'ensemble $\mathbf{Z}[\![u]\!]$ vérifier $\mathbf{Z}[\![u]\!]\mathsf{R}_=f$ lorsque $f\propto v[\![u]\!]$.
Par contre, on sait dans ce cas que $u\notin\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}u$. Il n'existe donc qu'un seul résidu u^+ de u par $\mathbf{Z}$, et un seul résidu v^+ de v par $\mathbf{Z}$: $u\overset{f}{\mapsto}u^+$ et $v\overset{f}{\mapsto}v^+$ si $f\propto\mathbf{Z}$. Le critère 2 implique par récurrence sur la longueur de f que $v^+\mathsf{R}_+u^+$. De la même manière que pendant la preuve du lemme 4.51 on

montre avec le lemme 4.11 de développement appliqué à $\mathbf{Z}\cup\{u\}$ que $u^+[\![v^+]\!] = u'[\![f']\!] = \{u^\sim\}$ si $f' \propto \mathbf{Z}[\![u]\!]$, avec bien entendu $u^+ \overset{v^+}{\underset{+}{\hookrightarrow}} u^\sim$. Symétriquement, $v[\![u]\!][\![f']\!] = v^+[\![u^+]\!]$; puisque $f_v \propto v[\![u]\!]$ et $v[\![u]\!] \uparrow \mathbf{Z}[\![u]\!]$ d'après l'axiome C qui part de $\mathbf{Z} \uparrow v$, le lemme 2.53 indique que $\mathbf{Z}[\![u]\!] \uparrow f_v$ et que $g_v \propto f_v[\mathbf{Z}[\![u]\!]]$ est un développement de $v[\![u]\!][\mathbf{Z}[\![u]\!]] = v[\mathbf{Z}][\![u^+]\!]$. Le diagramme de permutation standardisante formé par $(v \cdot u')$ et $(u \cdot f_v)$ se retrouve donc dans $(v \cdot u')[\mathbf{Z}] = v^+ \cdot u^\sim$ et $(u \cdot f_v)[\mathbf{Z}] = u^+ \cdot g_v$.

2) Si v est un élément de $\mathbf{Z}$, alors le diagramme de standardisation formé par $(v \cdot u')$ et $(u \cdot f_v)$ disparaît lors de la projection par $\mathbf{Z}$:

$$(v \cdot u')[\mathbf{Z}] = u'[\mathbf{Z}[\![v]\!]] = u[\mathbf{Z}] = (u \cdot f_v)[\mathbf{Z}]$$

On sait tirer ici une information très particulière sur le comportement de $\mathbf{Z}$ à l'égard de $u \cdot f_v$: en effet $\mathbf{Z}$ ronge $u \cdot f_v$. Prouvons-le. Tout d'abord $\mathbf{Z}$ ronge u. Ensuite, la dérivation f_v qui développe $v[\![u]\!] \subset \mathbf{Z}[\![u]\!]$ est donc relative à $\mathbf{Z}[\![u]\!]$, qui la ronge de ce fait: $\mathbf{Z}[\![u]\!]\mathsf{R}_= f_v$.

Pour résumer: $u \cdot f_v$ et $(v \cdot u')$ forment un diagramme de permutation standardisante ; si v se trouve dans $\mathbf{Z}$, alors $(u \cdot f_v)[\mathbf{Z}] = (v \cdot u')[\mathbf{Z}]$ et $\mathbf{Z}$ ronge $(u \cdot f_v)$; si v ne se trouve pas dans $\mathbf{Z}$, alors $(u \cdot f_v)[\mathbf{Z}] \angle (v \cdot u')[\mathbf{Z}]$. Le lemme 4.52 est ensuite prouvé par passage aux dérivations. □

Nous atteignons notre objectif: montrer que si la dérivation $e[\mathbf{Z}]$ est (très) standard, alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= d$ pour toute dérivation d plus standard que e — qui permet ensuite de démontrer le théorème d'existence à partir d'une récurrence sur la longueur des dérivations.

Le corollaire 4.53 reprend le corollaire 4.46 dans le cadre de la relation $\mathsf{R}_=$, et permet de démontrer le lemme 4.54.

Corollaire 4.53 *Si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= e$ et $e[\mathbf{Z}]$ est très standard avec $d \trianglelefteq e$ alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= d$ et $d[\mathbf{Z}] \diamond e[\mathbf{Z}]$.*

Démonstration: On se place dans les hypothèses du corollaire. Il existe une chaîne de dérivations

$$d \diamond d'_1 \angle d_2 \diamond d'_2 \angle \ldots \diamond d'_{n-1} \angle d_n \diamond e$$

Nous ferons la preuve par récurrence sur n.

- puisque $d_n \diamond e$ le lemme 4.51 assure que $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= d_n$ et que $d_n[\mathbf{Z}] \diamond e[\mathbf{Z}]$. La dérivation $d_n[\mathbf{Z}]$ est donc très standard.
- puisque $d'_{n-1} \angle d_n$ et $d_n[\![\mathbf{Z}]\!]$ est très standard on obtient que $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= d'_{n-1}$ et que

  $$d'_{n-1}[\![\mathbf{Z}]\!] \diamond d_n[\![\mathbf{Z}]\!] \diamond e[\![\mathbf{Z}]\!]$$

  en suivant le lemme 4.52.

$\mathbf{Z}$ ronge donc d'_{n-1} tandis que $d'_{n-1}[\![\mathbf{Z}]\!]$ est très standard. On en déduit par récurrence que $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= d$ et que $d[\mathbf{Z}] \diamond d'_{n-1}[\mathbf{Z}]$, ce dont on déduit que $d[\mathbf{Z}] \diamond e[\mathbf{Z}]$. □

Dernière étape de démonstration

Nous utilisons le corollaire 4.53 pour démontrer le lemme 4.54. Une fois ce résultat prouvé, la démonstration de l'existence est presque immédiate.

Lemme 4.54 *Si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_= e$ et $e[\mathbf{Z}]$ est très standard, alors il existe $d \trianglelefteq e$ très standard.*

Démonstration par récurrence sur (longueur de $e[\mathbf{Z}]$, $\mathrm{prof}_{fd}(\mathbf{Z})$). Supposons que $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}e$ avec $e[\mathbf{Z}]$ très standard. L'ensemble $\{x, x \triangleleft f\}$ qui est fini pour toute dérivation f décroît lorsque l'on standardise f d'après le lemme 4.21 de transitivité. Il existe donc une dérivation $g \trianglelefteq e$ telle que cet ensemble ne puisse plus décroître:

$$\forall g' \in \mathcal{D}, \quad \text{si } g' \trianglelefteq g \text{ alors } (x \triangleleft g' \iff x \triangleleft g)$$

Soit x le premier radical réduit par g: il vérifie que $x \triangleleft g$ et $x \triangleleft^{\|} g$. Soit $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[\![x]\!]$.
Remarquons avant toute chose que $g[\mathbf{Z}] \Diamond e[\mathbf{Z}]$ suivant le corollaire 4.53: la dérivation $g[\mathbf{Z}]$ est pour cette raison très standard.

On distingue ensuite deux cas:

1. Si $x \in \mathbf{Z}$, alors la dérivation $g[x][\mathbf{Z}'] \Diamond e[\mathbf{Z}]$ est très standard, avec $\mathrm{prof}_{fd}(\mathbf{Z}') < \mathrm{prof}_{fd}(\mathbf{Z})$. Par récurrence il existe une dérivation très standard h plus standard que $g[x]$. La dérivation $x \cdot h$ est donc plus standard que $(x \cdot g)[x]$ qui vaut g, elle est donc plus standard que e. La dérivation $x \cdot h$ est-elle très standard, ce qui nous offrirait une réponse? La définition de g nous permet de démontrer cela. Supposons en effet qu'il existe une dérivation g' telle que $g' \triangleleft x \cdot h$. Puisque $(x \cdot h)[x] = h$ est très standard, le corollaire 4.46 établit que $x \not\triangleleft^{\|} x \cdot h$ ou x /
$vienstdg'$. Le premier cas est bien sûr interdit; le second aussi parce que g' est plus standard que g ce qui rend le radical x extractible de g' (se rappeler la construction du radical x). On conclut que la dérivation $x \cdot h$ est bien cette dérivation très standard et plus standard que e que nous recherchions.

2. Si $x \notin \mathbf{Z}$, alors $\mathbf{Z}\mathsf{R}x$ et il existe un radical x' tel que $x \overset{f}{\mapsto} x'$ pour tout développement f de $\mathbf{Z}$: $f \propto \mathbf{Z}$, voir le lemme 4.9 de développement. Soit G la dérivation telle que $g = x \cdot G$. Par définition, $\mathbf{Z}'\mathsf{R}_{=}G$, et la dérivation $g[\mathbf{Z}]$ se décompose en $g[\mathbf{Z}] = x' \cdot G[\mathbf{Z}']$. Parce que $g[\mathbf{Z}]$ est très standard la dérivation $G[\mathbf{Z}']$ est elle aussi très standard. La longueur de $G[\mathbf{Z}']$ est majorée strictement par celle de $g[\mathbf{Z}]$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence: il existe une dérivation très standard h plus standard que G. La dérivation $x \cdot h$ est plus standard que $x \cdot G = g$ et donc que e. Nous reprenons les mêmes arguments que dans la partie 1. de notre démonstration pour prouver que $x \cdot h$ est standard. En effet, s'il existe une dérivation g' telle que $g' \triangleleft x \cdot h$ alors $g' \trianglelefteq g$ ce qui entraîne par construction de x que $x \triangleleft g'$. Le corollaire 4.46 indique que la dérivation $(x \cdot h)[x] = h$ n'est pas très standard, ce qui entre en contradiction avec nos hypothèses. Donc $x \cdot h$ est très standard, ce qui finit la démonstration.

□

Théorème 4.7 (existence) *Avec les axiomes A, B, C, D, FD+ et PERM+, les critères 1, 2 et 3: Pour toute dérivation d il existe une dérivation standard d_{std} telle que $d_{std} \trianglelefteq d$.*

Démonstration: il suffit de remarquer que $u\mathsf{R}_{=}u \cdot d$, et donc que si d' est une dérivation très standard plus standard que d il existe par le lemme 4.54 une dérivation d'' très standard plus standard que $u \cdot d'$, et donc que $u \cdot d$. Une récurrence sur la longueur de d suffit alors à prouver le théorème. □

Avec le théorème d'existence on démontre que les dérivations standards sont exactement les dérivations très standards.

Corollaire 4.55 *Toute dérivation standard est très standard, et vice-versa.*

Démonstration: même démonstration qu'à l'étape intermédiaire du théorème 4.5 de standardisation. □

4.7 Huit résultats pour les chapitres suivants

Nous prouvons certains des résultats que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

4.7.1 Les classes $\diamond$ sont finies

Nous faisons intervenir le lemme 4.56 dans la démonstration du théorème 5.3.

Lemme 4.56 (les classes $\diamond$ sont finies) *Il n'existe qu'un nombre fini de dérivations dans chaque classe d'équivalence $\diamond$.*

Démonstration par récurrence sur la longueur des dérivations. Soit d une dérivation: le nombre de radicaux qu'on peut extraire de manière disjointe est fini, borné par la longueur de d. Toute dérivation d' qui vérifie $d' \diamond d$ commence par un de ces radicaux, selon le lemme 4.43 de transitivité carrée. Soit r un de ces radicaux, qui vérifie donc $r \lhd^{||} d$. En suivant le lemme 4.41 de traversée carrée, si une dérivation $r \cdot e$ est équivalente $\diamond$ à d, alors e est équivalente $\diamond$ à la dérivation d', puisque $d' \propto d[\![r]\!]$. On sait par hypothèse de récurrence qu'il n'existe qu'un nombre fini de telles dérivations e. Le nombre de dérivations $r \cdot e$ telles que $(r \cdot e) \diamond d$ est donc fini pour chaque r tel que $r \lhd^{||} d$. Il n'y a qu'un nombre fini de tels radicaux r: le nombre de dérivations équivalentes à d par permutations carrées est fini. □

4.7.2 Une application inattendue: le lemme de simplification

Nous donnons le lemme de simplification sur les systèmes qui vérifient les axiomes de standardisation. Le lemme peut être prouvé plus directement dans les systèmes orthogonaux comme nous l'avons vu dans le chapitre 2. Nous ne connaissons pas de preuve directe dans les systèmes non orthogonaux. Notre preuve correspond à celle proposée par Boudol [Bou 85] dans le cadre des systèmes non orthogonaux du premier ordre. Le résultat sert à construire au chapitre suivant le sous-espace des dérivations externes.

Lemme 4.57 *Soit d un développement de U dans $\mathfrak{M}$. Alors $d \cdot f \equiv d \cdot g \Longrightarrow f \equiv g$.*

Démonstration par récurrence sur la longueur de la standard de f puis la profondeur de U. On suppose sans perte de généralité que f et g sont standard. Soit r un radical dans $\mathsf{Ext}\ d \cdot f$. Si le radical r se trouve dans U alors par permutations de d: $r \cdot e \cdot f \equiv r \cdot e \cdot g$ pour $e \propto U[\![r]\!]$. On sait avec le lemme 4.27 de simplification faible que $e \cdot f \equiv e \cdot g$. La profondeur de $U[\![r]\!]$ est plus petite strictement que celle de U tandis que la longueur de f n'a pas changé. On obtient avec l'hypothèse de récurrence que $f \equiv g$. Si le radical r ne se trouve pas dans U il a un résidu r' par U tel que $r \overset{d}{\mapsto} r'$ et $r' \in \mathsf{Ext}\ f$. On sait par $d \cdot f \equiv d \cdot g$ que $r \lhd d \cdot g$ et donc que $r' \lhd g$; soit g' un résidu de g par r': $g' \propto g[\![r']\!]$. Soit f' la dérivation standard résidu de f par r': $f' \propto f[\![r']\!]$. Sa longueur est strictement plus petite que celle de f. On obtient par permutation que $r \cdot e \cdot f' \equiv d \cdot r' \cdot f' \equiv d \cdot r' \cdot g' \equiv r \cdot e \cdot g'$ où $e \propto U[\![r]\!]$. On a choisi r pour pouvoir appliquer maintenant le lemme 4.27 de simplification faible et obtenir $e \cdot f' \equiv e \cdot g'$. Par hypothèse de récurrence puisque la longueur de f' est strictement plus petite que celle de f, toutes les deux standards: $f' \equiv g'$. Donc $f \equiv r' \cdot f' \equiv r' \equiv g' \equiv g$, ce qui termine notre preuve. □

Le lemme 4.58 sera très souvent utilisé au chapitre 5. Il intervient lors des démonstrations des lemmes 5.12, 5.13 et 5.39, et des théorèmes 5.3 et 5.5.

Lemme 4.58 (lemme de simplification) *Si* $d \cdot f \equiv d \cdot g$ *alors* $f \equiv g$.

Démonstration: par récurrence sur la longueur de la dérivation d, en utilisant le lemme 4.57. □

4.7.3 Trois propriétés particulières à la dérivation standard

Lemme 4.59 *Si* $z \sqsubseteq u \cdot d$ *et* $u \cdot d$ *est standard, alors* $z \uparrow u$ *et* $\forall z', z[\![u]\!]z' \Longrightarrow z' \sqsubseteq d$.

Démonstration: supposons que $u \cdot d$ est standard et que $z \sqsubseteq u \cdot d$: il existe une dérivation d' telle que $u \cdot d \equiv z \cdot d'$, ou encore $u \cdot d \trianglelefteq z \cdot d'$. Le radical u peut donc être extrait de $z \cdot d'$, ce qui implique que $z = u$ ou bien que $z\mathsf{R}u$.
Nous démontrons maintenant que $\forall z' \in z[\![u]\!], z' \sqsubseteq d$, en utilisant le fait que $u \in \mathsf{Ext}\ d$ et le lemme 4.17 de simplification faible. Si $u = z$, alors $z[\![u]\!] = \emptyset$ avec l'axiome A et le résultat est prouvé. Sinon, il existe un radical u' tel que $u \overset{z}{\mapsto} u'$. En extrayant u de $z \cdot d'$ on a construit une dérivation $u \cdot f_z \cdot d''$ où f_z et d'' développent $z[\![u]\!]$ et $d'[u']$. Cette extraction est le produit d'une succession de permutations: $u \cdot f_z \cdot d''$ et $u \cdot d$ sont donc équivalents $\equiv$, ce qui entraîne que $f_z \cdot d''$ et d sont eux-même équivalents $\equiv$ suivant le lemme 4.17 — n'oublions pas ici que $u \in \mathsf{Ext}\ r \cdot d$. Donc $f_z \sqsubseteq d$. Tout radical z' de $z[\![u]\!]$ peut commencer un développement de $z[\![u]\!]$ qui est équivalent $\equiv$ à f_z. Ce qui établit que $z' \sqsubseteq f_v$ et que donc $z' \sqsubseteq d$. □

Il n'a pas été nécessaire pour démontrer le lemme 4.60 de montrer que:

pour toutes dérivations d et e et radical z, $e \uparrow z$ et $d \trianglelefteq e$ implique $d \uparrow z$

un résultat qui nécessite de rajouter un critère aux critères 1—7. Le lemme 4.59 suffit à cela en effet.

Lemme 4.60 *Si* d *est standard et* $z \sqsubseteq d$, *alors* $d \uparrow z$.

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. Si $z \sqsubseteq d$ et $d = u \cdot d'$ alors $z \uparrow u$ et si $z[\![z']\!]$, alors $z' \sqsubseteq d'$. Parce que d' est standard on sait par hypothèse de récurrence que pour ces $z' \in z[\![u]\!]$: $d \uparrow z'$. Donc $d \uparrow z$. □

Nous avons utilisé jusqu'ici sept critères sans qu'aucun ne traite explicitement de la $\uparrow$-transitivité de l'ordre d'emboîtement $<$. Nous introduisons ici un critère de transitivité faible qui nous permet de démontrer le corollaire 4.66. Ce résultat fondamental sera utilisé lors de la démonstration du théorème 5.5.

Critère 8 (critère de transitivité faible) *Soit* u, v, x *et* x_1 *quatre radicaux. Si* $u\mathsf{R}_+v$, $v\mathsf{R}_+x$ *et* $x \overset{u}{\mapsto} x_1$ *alors* $x \underset{+}{\overset{u}{\mapsto}} x_1$.

Nous ferons l'hypothèse supplémentaire du critère 8 pour démontrer le lemme suivant, qui intervient lors de la démonstration du lemme 5.8.

Lemme 4.61 *Avec le critère 8 de transitivité faible, si* $r \cdot d$ *est standard,* $u \uparrow d$ *et* $r\mathsf{R}_+u$, *alors* $d\mathsf{R}u$.

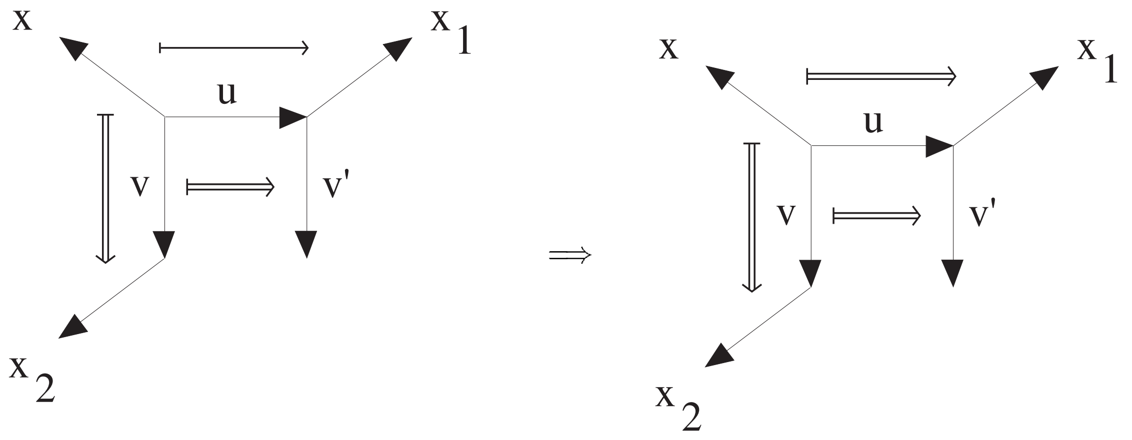


Figure 4.23: critère 8 de transitivité faible

Démonstration: supposons que $d = r \cdot d_1 \cdot v' \cdot d_2$ avec $u \overset{r\cdot d_1 \cdot v'}{\mapsto} u'$ et $v' \mathsf{R}^{\neg} u'$, $v' \neq u'$. Le lemme 4.25 de l'alambic nous permet d'écrire qu'une série de permutations carrées transforme $r \cdot d_1$ en une dérivation $f \cdot g$ telle que $u \overset{f}{\underset{\Box}{\mapsto}} u'' \overset{g}{\underset{+}{\mapsto}} u'$ pour un certain radical u''. On utilise le lemme 4.43 pour établir que la dérivation g n'est pas vide: sinon $(r \cdot d_1) \Diamond f$ et de là $u \overset{r\cdot d_1}{\underset{\Box}{\mapsto}} u'$, ce dont on déduirait que $u \mathsf{R}_{\Box} r$. Rappelons notre hypothèse que $v' \mathsf{R}^{\neg} u'$ et $v' \neq u'$. Nous savons que $u \uparrow d$, et donc que $u' \uparrow v'$. Il s'en suit par application du critère 7 que $u' \mathsf{R}_+ v'$. Nous voulons démontrer que $g \cdot v'$ n'est pas standard. Soit w le dernier radical que g réduit: $g = g' \cdot w$. Il existe un radical u^+ tel que $u \overset{f\cdot g'}{\mapsto} u^+ \overset{w}{\underset{+}{\mapsto}} u'$. Le critère 5 d'enclave établit l'existence d'un radical v^+ tel que $v^+ \overset{w}{\mapsto} v'$ à partir de $u' \mathsf{R} v'$. Avec le critère 2 appliqué à $u' \mathsf{R}_+ v'$ on montre que $v^+ \mathsf{R}_+ u^+$. Reste à employer le critère 8 de transitivité faible: $v^+ \mathsf{R}_+ u^+$, $u^+ \mathsf{R}_+ w$ et $w \mathsf{R} v^+$, dont on déduit que $w \mathsf{R}_+ v^+$. Les deux radicaux w et v^+ que réduit la dérivation $f \cdot g \cdot v'$ sont en position d'effectuer une permutation standardisante. Les dérivations $f \cdot g \cdot v'$ et e ne sont pas standard, ce qui prouve le lemme 4.61.

$\Box$

Le lemme suivant sera utile pour démontrer le lemme 5.14 de décomposition à gauche.

Lemme 4.62 (lemme de l'extraction précisée) *Soit $f \cdot g$ une dérivation et $(f \cdot g)_{std}$ une de ses dérivations standards. Une dérivation d qu'on peut extraire de $(f \cdot g)_{std}$: $d \lhd (f \cdot g)_{std}$ et telle que $d \sqsubseteq f$ peut être extraite de f: $d \lhd f$.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. Supposons que $d = r \cdot d'$, $(r \cdot d') \lhd (f \cdot g)_{std}$ et $(r \cdot d') \sqsubseteq f$. Il existe une dérivation d'' telle que $r \cdot d' \cdot d'' \unlhd (f \cdot g)_{std}$, c'est-à-dire $r \cdot d' \cdot d'' \Diamond (f \cdot g)_{std}$ puisque $(f \cdot g)_{std}$ est standard. Le lemme 4.43 de transitivité carrée établit que le radical r peut être extrait carré de $(f \cdot g)_{std}$ et que $d' \cdot d'' \Diamond (f \cdot g)_{std}[r]$. La dérivation $(f \cdot g)_{std}$ est plus standard que la dérivation $f \cdot g$: on peut d'après le lemme 4.21 de transitivité extraire le radical r de $(f \cdot g)$ et obtenir une dérivation $h \propto (f \cdot g)[r]$. Nous savons que $d \sqsubseteq f$: il existe donc une dérivation de la classe $\equiv$ de f que r ne traverse pas; le lemme 4.12 de traversée établit que le radical r ne traverse pas non plus f. Le radical r peut être extrait de $f \cdot g$ mais ne traverse pas f: il doit donc être extrait de f avec $h = f' \cdot g$ pour un certain $f' \propto f[r]$. Nous savons que $d' \lhd (f \cdot g)_{std}[r]$. Nous terminons en montrant que $(f \cdot g)_{std}[r]$ est une dérivation standard de $(f' \cdot g)$, et que $d' \sqsubseteq f'$. Les dérivations $(f \cdot g)_{std}[r]$ et $(f' \cdot g) \propto (f \cdot g)[r]$ vérifient $r \cdot ((f \cdot g)_{std}[r]) \Diamond (f \cdot g)_{std}$ et

$r \cdot (f' \cdot g) \equiv f \cdot g$. Les deux dérivations $f \cdot g$ et $(f \cdot g)_{std}$ sont équivalentes par permutations. On en déduit avec le lemme 4.58 de simplification que $(f' \cdot g) \equiv (f \cdot g)_{std}[r]$. La dérivation $(f \cdot g)_{std}[r]$ est standard, ce qui établit la première partie de ce qu'il nous restait à prouver. La seconde partie est la conséquence elle aussi du lemme 4.58 de simplification: $r \cdot d \sqsubseteq f \equiv r \cdot f'$ signifie qu'il existe une dérivation d_1 telle que $r \cdot d \cdot d_1 \equiv r \cdot f'$, ce qui entraîne que $d \cdot d_1 \equiv f'$ et donc $d \sqsubseteq f'$. Le lemme est prouvé par récurrence. $\square$

Définition 4.63 *Soit $\mathbf{Z}$ un ensemble de radicaux co-initiaux deux à deux compatibles et d une dérivation. Si $\mathbf{Z}\mathsf{R}_{=}d$ et $e = d[\mathbf{Z}]$ réduit le même nombre de radicaux que d, on écrit $d \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} e$.*

Il est possible de donner une définition équivalente de $d \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} e$ par récurrence sur la longueur de d:

- *$id_a \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} id_b$ si $a = \partial_0^{\mathfrak{M}}\mathbf{Z}$ et $b = \partial_1^{\mathfrak{M}}\mathbf{Z}$.*

- *$u \cdot d \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} v \cdot e$ si $u \overset{f}{\mapsto} v$ pour $f \propto \mathbf{Z}$, et $d \overset{\mathbf{Z}[\![u]\!]}{\mapsto} e$*

Le lemme 4.64 permet de démontrer le lemme 4.65.

Lemme 4.64 (lemme de projection disjointe) *Soit d une dérivation standard et u un radical co-initial à d. Si $u \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} v$ alors $d[u]$ est standard.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. On note $e = d[u]$; soit y un radical de $\mathsf{Ext}\ e$: il existe deux dérivations f et g telles que $e = f \cdot y' \cdot g$ et $y \overset{f}{\mapsto} y'$. Les deux dérivations f et g proviennent par résidu de deux dérivations f_0 et g_0 qui forment d: $d = f_0 \cdot x' \cdot g_0$, c'est-à-dire: $u \overset{f_0}{\underset{\square}{\mapsto}} u' \overset{x'}{\underset{\square}{\mapsto}} v' \overset{g_0}{\underset{\square}{\mapsto}} v$, $f = f_0[u]$, $y' = x'[u']$ et $g = g_0[v']$. Le lemme 4.29 de remontée par stabilité démontre l'existence d'un radical x tel que $x \overset{u}{\mapsto} y \overset{f}{\mapsto} y'$ et $x \overset{f}{\mapsto} x' \overset{u'}{\mapsto} y'$. Le radical x peut en cela être extrait de d ; l'extraction est carrée: $x \lhd^{||} d$ parce que d est standard. On peut construire une dérivation $d' \Diamond d$ telle que $d' = x \cdot d''$ — ce qui correspond d'après le lemme 4.41 à la construction de $e' \Diamond e$ telle que $e' = y \cdot e''$ et $e' = d'[u]$. Soit $u \overset{x}{\underset{\square}{\mapsto}} u_1$: parce que $u_1 \overset{d''}{\underset{\square}{\mapsto}} v$ et d'' est standard, la dérivation $e'' = d''[v']$ est standard par hypothèse de récurrence. La dérivation $y \cdot e''$ est donc elle aussi standard du fait que $y \in \mathsf{Ext}\ e$; la dérivation e est elle-même standard par $e \Diamond y \cdot e''$; la preuve par récurrence de notre lemme 4.64 est finie. $\square$

Le corollaire 4.66 du lemme 4.65 sera utilisé pour démontrer le théorème 5.5 de normalisation de l'appel par nécessité.

Lemme 4.65 (lemme de la projection interne) *Soit $\mathbf{Z}$ un ensemble de radicaux co-initiaux deux à deux compatibles et d une dérivation standard. Si $d \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} e$ alors e est standard.*

Démonstration: Soit g un développement de $\mathbf{Z}[\![d]\!]$: $g \propto \mathbf{Z}[\![d]\!]$. Nous montrons que e est standard par récurrence sur la longueur de d, puis sur la profondeur de $\mathbf{Z}$. Soit $u \in \mathsf{Ext}\ (d \cdot g)$. Deux cas se présentent: soit $u \lhd d$, soit $u \overset{d}{\mapsto} v$ et $v \lhd g$. Nous traitons les deux cas séparément.

1) Supposons que $u \lhd d$. Puisque la dérivation d est standard, on peut en extraire par permutations carrées le radical u, et obtenir une dérivation $d' = u \cdot d''$ telle que $d' \Diamond d$. Des permutations carrées sur e correspondent aux permutations dans d d'après le lemme 4.51 de projection du carré, de telle façon qu'il existe une dérivation e' telle que $e' \Diamond e$ et $d' \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} e'$. Soit u' le résidu de u par $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire $u \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} u'$. La dérivation e' peut être factorisée en $u' \cdot e''$, où la dérivation

e'' vaut $d''[\mathbf{Z}[\![u]\!]]$ (rappelons que $(\mathbf{Z}[\![u]\!])\mathsf{R}_{=}d''$). Parce que le radical u est élément de $\mathsf{Ext}\ d \cdot g$, son résidu u' par $\mathbf{Z}$ est un radical de $\mathsf{Ext}\ e$ d'après la première assertion du lemme 4.35. On note que la dérivation d'' est standard et plus courte que d. Par hypothèse de récurrence et du fait que $d'' \overset{\mathbf{Z}[\![u]\!]}{\mapsto} e''$, la dérivation $e'' = d''[\mathbf{Z}[\![u]\!]]$ est standard. Du fait que $u' \in \mathsf{Ext}\ e$, la dérivation $u' \cdot e''$ est elle aussi standard. La dérivation e qui est équivalente à $u' \cdot e''$ par permutations carrées est standard elle aussi.

2) Supposons que $u \overset{d}{\mapsto} v$ et $v \lhd g$. Le lemme 4.15 certifie que $v \in \mathbf{Z}[\![d]\!]$, ce dont on déduit que $u \in \mathbf{Z}$ avec le critère 4 (on utilise que $\mathbf{Z} \uparrow d$). Soit un radical r tel que d peut se factoriser en $d = d_1 \cdot r \cdot d_2$. Soit u' le résidu de u par d_1, c'est-à-dire le radical tel que $u \overset{d_1}{\mapsto} u'$. Ce radical u' se trouve dans $\mathbf{Z}[\![d_1]\!]$. Du fait que $d \overset{\mathbf{Z}}{\mapsto} e$ le radical u' respecte le radical r: $u\mathsf{R}r$. Bien sûr le radical r respecte u' parce que $d\mathsf{R}u$. Il s'en suit que $u'\mathsf{R}_{\square}r$. On conclue que $u \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} v$. Cette propriété permet d'appliquer le lemme 4.64 qui établit que $d[u]$ est standard parce que d est standard et $u \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} v$. En appliquant le lemme 4.49 on obtient que $\mathbf{Z}[\![u]\!]\mathsf{R}_{=}d[u]$. Les longueurs de d, de e et de $d[u]$ sont égales, ce qui démontre que $d[\![u]\!] \overset{\mathbf{Z}[\![u]\!]}{\mapsto} e$. La profondeur de $\mathbf{Z}[\![u]\!]$ est plus petite que la profondeur de $\mathbf{Z}$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur $d[u]$, $\mathbf{Z}[\![u]\!]$ et e. On obtient que la dérivation e est standard.

On peut conclure notre démonstration par récurrence avec les résultats obtenus dans les deux cas. $\square$

Corollaire 4.66 *Avec le critère 8 de transitivité faible, si $u \sqsubseteq d$ et d est standard, alors $d[u]$ est standard.*

Démonstration: nous démontrons d'abord que u ronge d lorsqu'on se place dans les hypothèses du lemme. Supposons que u ne ronge pas d. Alors $d = d_1 \cdot x \cdot d_2$ et un résidu u' de u par d_1: $u[\![d_1]\!]u'$ emboîte le radical x: $u'\mathsf{R}_{+}x$. Le lemme 4.61 certifie — parce que la dérivation $x \cdot d_2$ est standard et que $u' \uparrow x \cdot d_2$ puisque $u \uparrow d$ d'après le lemme 4.60 — que $u' \overset{x \cdot d_2}{\mapsto} u''$ pour un certain radical u''. Par application du lemme 2.45 deux dérivations équivalentes $\equiv$ induisent les mêmes lois de traversée, c'est-à-dire que $u \overset{d'}{\mapsto} u''$ quel que soit la dérivation d' équivalente à d par permutation. En particulier, $u \sqsubseteq d$ signifie qu'il existe une dérivation $u \cdot d_1$ telle que $u \cdot d_1 \equiv d$. Il faut donc que $u\mathsf{R}u$, ce qui contredit notre construction de R. Nous en concluons que le radical u ronge la dérivation d.

Nous montrons un peu plus que le corollaire 4.66. Soit $\mathbf{Z}$ un ensemble de radicaux coinitiaux et deux à deux compatibles, c'est-à-dire $\mathbf{Z} \in \mathfrak{M}$. Soit d une dérivation standard d coinitiale aux radicaux de $\mathbf{Z}$. Supposons que tous les radicaux z de $\mathbf{Z}$ vérifient $z \sqsubseteq \mathbf{Z}$. Nous venons de montrer que tous ces radicaux rongent $\mathbf{Z}$. Il s'en suit que $\mathbf{Z}$ ronge d, ce qui permet d'écrire $d[\mathbf{Z}]$. Nous montrons que $d[\mathbf{Z}]$ est standard. La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de d. On peut factoriser d en $x \cdot d'$ avec $x \in \mathsf{Ext}\ d$ d'après le lemme 4.38 de caractérisation. La dérivation d est (très) standard donc d' est standard. Soit $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[\![x]\!]$. Le lemme 4.59 établit que $z' \sqsubseteq d'$ si $z' \in \mathbf{Z}'$. Par hypothèse de récurrence nous avons que $d'[\mathbf{Z}']$ est standard. Deux cas se présentent: soit $x \in \mathbf{Z}$ et alors $d[\mathbf{Z}] = d'[\mathbf{Z}']$ est standard ; soit $x \notin \mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}\mathsf{R}x$. Dans ce dernier cas, soit f un développement de $\mathbf{Z}$. Il existe un radical x' tel que $x \overset{f}{\mapsto} x'$. On démontre facilement par récurrence sur la longueur de d que $f \cdot (d[\mathbf{Z}]) \equiv d$, en appliquant le lemme 2.45 autant de fois que la longueur de d le nécessite. Le lemme 4.35 certifie que le radical x' se trouve dans $\mathsf{Ext}\ d[\mathbf{Z}]$ du fait que le radical u se trouve dans $\mathsf{Ext}\ d$. On termine en appliquant le lemme 4.38 de caractérisation qui dit que $d[\mathbf{Z}] = x' \cdot d'[\mathbf{Z}[\![x]\!]]$ est standard lorsque $x' \in \mathsf{Ext}\ d[\mathbf{Z}]$ et que $d'[\mathbf{Z}[\![x]\!]]$ est standard. $\square$

4.8 Appendice

4.8.1 Renforcer le second critère

Il semble difficile d'affaiblir encore les axiomes ou critères que nous avons utilisés pour démontrer le théorème de standardisation. On peut par contre les renforcer pour obtenir certaines propriétés intéressantes. Nous aimerions en particulier obtenir un processus de standardisation qui ne boucle jamais. Pour l'instant nos axiomes sont suffisament faibles pour ne pas interdire au préordre $\trianglelefteq$ de contenir des cycles sur les classes $\diamond$. Quel axiome permettrait d'assurer que $\trianglelefteq$ quotienté par $\diamond$ est un ordre?

Nous donnons d'abord un exemple de standardisation qui "boucle". Les trois radicaux 1, 2 et 3 sont disjoints. Pour simplifier nous identifierons les noms de radicaux liés par résidus. Chaque radical i crèe un radical c suivant l'espace de abstrait suivant:

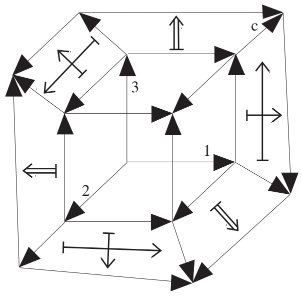


Figure 4.24: un exemple de boucle dans l'ordre de standardisation

On obtient la série de standardisation suivante:

$$\begin{array}{lllllll} & 1\cdot 2\cdot c\cdot 3 & \angle & 1\cdot c\cdot 2\cdot 3 & \diamond & 1\cdot c\cdot 3\cdot 2 & \diamond & 1\cdot 3\cdot c\cdot 2 \\ \diamond & 3\cdot 1\cdot c\cdot 2 & \angle & 3\cdot c\cdot 1\cdot 2 & \diamond & 3\cdot c\cdot 2\cdot 1 & \diamond & 3\cdot 2\cdot c\cdot 1 \\ \diamond & 2\cdot 3\cdot c\cdot 1 & \angle & 2\cdot c\cdot 3\cdot 1 & \diamond & 2\cdot c\cdot 1\cdot 3 & \diamond & 2\cdot 1\cdot c\cdot 3 \\ \diamond & 1\cdot 2\cdot c\cdot 3 & & & & & & \end{array}$$

Nous introduisons le critère 2+ qui renforce le critère 2 en interdisant à un radical r qui n'emboite pas pas u de placer des résidus de radicaux sous u. Par exemple l'ordre d'emboîtement strict du λ-calcul rencontré en partie 2.7.2 ne vérifie pas ce critère puisque le radical

$$r : (\lambda x.\Delta x)(Ia)$$

place le radical $v : Ia$ sous le radical $u : \Delta x$, alors que r et u sont disjoints pour cet ordre.

Critère 9 (critère 2+) *Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que r et u sont compatibles et $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$.*

$$\textit{Si } r\mathsf{R}u \textit{ alors } (u\mathsf{R}v \iff u'\mathsf{R}v')$$

Lemme 4.67 (développement carré +) *Soit f un développement de $U \in \mathfrak{M}$. Avec le critère 2+: Si pour tout $u \in U$, $u\mathsf{R}_\Box x$ alors $f\mathsf{R}_\Box x$.*

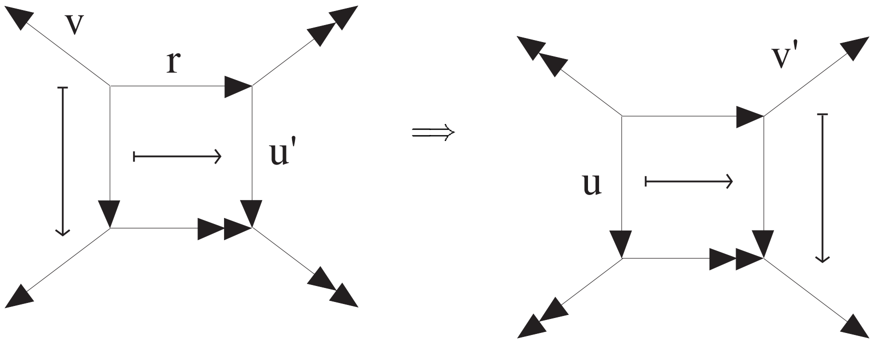


Figure 4.25: critère 9 = critère 2+

Démonstration: par récurrence sur la profondeur de U. Supposons que $U \in \mathfrak{M}$ vérifie: $\forall u \in U, u\mathsf{R}_{\square}x$. Soit $r \in U$: Il existe un radical x' tel que $x \overset{r}{\underset{\square}{\mapsto}} x'$. Soit u' un radical de $U[\![u]\!]$: il existe un radical $u \in U$ tel que $u[\![r]\!]u'$. Bien sûr, $u\mathsf{R}x$ et $x\mathsf{R}u$; puisque $r\mathsf{R}x$: le critère 2 donne $u'\mathsf{R}x'$ et le critère 2+ $x'\mathsf{R}u'$. Donc $x'\mathsf{R}_{\square}u'$, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence: $f'\mathsf{R}_{\square}x'$; et donc $f\mathsf{R}_{\square}x$. Le lemme est prouvé par récurrence. $\square$

Lemme 4.68 (traversée carrée +) *Avec le critère 2+: Si $e\mathsf{R}_{\square}r$ et $d \unlhd e$ alors $d\mathsf{R}_{\square}r$.*

Démonstration: le lemme 4.41 certifie que $e\mathsf{R}_{\square}r$ et $d\Diamond e$ impliquent $d\mathsf{R}_{\square}r$. Il suffit de montrer que $e\mathsf{R}_{\square}r$ et $d\angle e$ entraînent $d\mathsf{R}_{\square}r$ pour prouver notre lemme 4.68 On peut limiter son raisonnement sur un diagramme de permutation standardisante. Soit deux radicaux u et v tels que $v\mathsf{R}_{+}u$, et u' le résidu de u par v: $u \overset{v}{\underset{+}{\mapsto}} u'$ et f_v un développement de $v[\![u]\!]$. Supposons que $v \cdot u'\mathsf{R}_{\square}x$. Soit x' le résidu de x par v: alors $u'\mathsf{R}_{\square}x'$, Parce que $v\mathsf{R}x$ le critère 2 implique que $u\mathsf{R}x$ et le critère 2+ que $x\mathsf{R}u$. Donc $u\mathsf{R}_{\square}x$ et $v\mathsf{R}_{\square}x$. Avec le lemme 4.67, $u \cdot f_v\mathsf{R}_{\square}x$ parce que $u \cdot f_v \propto \{u, v\}$. $\square$

Corollaire 4.69 (+) *Soit x un radical, d et e deux dérivations. Avec le critère 2+: Si $x \lhd d \unlhd e$ et $x \lhd^{||} e$ alors $x \lhd^{||} d$*

Démonstration: parce que $d \unlhd e$ il existe une chaîne de dérivations

$$d \Diamond d'_1 \angle d_2 \Diamond d'_2 \angle \ldots \Diamond d'_{n-1} \angle d_n \Diamond e$$

On vérifie avec le lemme 4.21 de transitivité que $\forall i, x \lhd d_i$ et $x \lhd d'_i$. Si pour $j \in \{1, \ldots, n\}, x \lhd^{||} d'_j$ alors $x \lhd^{||} d_j$ du fait que $d_j \Diamond d'_j$, voir le lemme 4.43 de transitivité carrée. Pour démontrer notre corollaire, il suffit de prouver que $\forall j, x\Diamond d_{j+1} \Longrightarrow d'_j$, ou plus précisément que:

Pour toutes dérivations f et g, si $x \lhd f \angle g$ et $x \lhd^{||} g$ alors $x \lhd^{||} f$

On peut écrire $f = f_1 \cdot u \cdot f_v \cdot f_2$ et $g = f_1 \cdot v \cdot u' \cdot f_2$ où u et v sont des radicaux tels que $v\mathsf{R}_{+}u$ et $u \overset{v}{\mapsto} u'$, $f_v \propto v[\![u]\!]$. Supposons que $x \lhd f \angle g$ et $x \lhd^{||} g$. Nous passons en revue les cas d'apparition de x dans g. Si $x \overset{f_1 \cdot v \cdot u'}{\underset{\square}{\mapsto}} x' \lhd^{||} f_2$ alors $f_1 \cdot u \cdot f_v\mathsf{R}_{\square}x$ avec le lemme 4.68 de traversée carrée + ; et donc $x \lhd^{||} f$ parce que $x \overset{f_1 \cdot u \cdot f_v}{\underset{\square}{\mapsto}} x' \lhd^{||} f_2$. Si $x \overset{f_1 \cdot v}{\underset{\square}{\mapsto}} u'$ alors $x \overset{f_1}{\underset{\square}{\mapsto}} u$ d'après le critère 4, et donc $x \lhd^{||} f$. Si $x \overset{f_1}{\underset{\square}{\mapsto}} v$ alors $x \not\lhd f$, ce qui est exclus par hypothèse. Pour finir, si $x \lhd f_1$, alors $x \lhd f$. Dans tous les cas, $x \lhd^{||} f$. Ce qui prouve notre corollaire 4.69. $\square$

Lemme 4.70 (+) *Avec le critère 2+: Si $d \angle e$ tandis que $x \lhd^{||} d$ et $x \lhd^{||} e$ alors $d[x] \angle e[x]$.*

Démonstration: si $d = d_1 \cdot u \cdot f_v \cdot d_2$ et $e = d_1 \cdot v \cdot u' \cdot d_2$ avec $u \overset{v}{\underset{+}{\mapsto}} u'$ et $f_v \propto v[\![u]\!]$, il suffit de remarquer que ni $x \overset{d_1}{\mapsto} u$ ni $x \overset{d_1}{\mapsto} v$ parce que $x \lhd^{||} d$ et $x \lhd^{||} e$. Soit $x \lhd^{||} d_1$ et alors

$$d[x] = d_1[x] \cdot u \cdot f_v \cdot d_2 \ \angle \ d_1[x] \cdot v \cdot u' \cdot d_2 = e[x]$$

Soit $x \overset{d_1}{\underset{\square}{\mapsto}} x' \overset{u \cdot f_v}{\underset{\square}{\mapsto}} x'' \lhd^{||} d_2$ et $x \overset{d_1}{\underset{\square}{\mapsto}} x' \overset{v \cdot u'}{\underset{\square}{\mapsto}} x'' \lhd^{||} d_2$. Puisque $u \cdot f_v \angle v \cdot u'$ on déduit que le lemme 4.44 établit que $(u \cdot f_v)[x'] \angle (v \cdot u')[x']$; donc

$$d[x] = d_1[x] \cdot (u \cdot f_v)[x'] \cdot d_2[x''] \ \angle \ d_1[x] \cdot (v \cdot u')[x'] \cdot d_2[x''] = e[x]$$

□

Lemme 4.71 (lemme de simplification standard +) *Avec le critère 2+: Si $d \cdot e \trianglelefteq d \cdot f$ alors $e \trianglelefteq f$.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. Soit u le premier radical que d réduit: $d = u \cdot d'$. Alors $u \lhd d \cdot e \trianglelefteq d \cdot f$ et $u \lhd^{||} d \cdot f$. Donc $d' \cdot e \lhd d' \cdot f$ par récurrence sur la chaîne

$$d \diamond d'_1 \ \angle \ d_2 \diamond d'_2 \ \angle \ \ldots \diamond d'_{n-1} \ \angle \ d_n \diamond e$$

suivant les lemmes 4.43 et 4.70. □

Théorème 4.8 (+) *Dans un système axiomatique qui vérifie les axiomes de standardisation et le critère 2+. la relation $\trianglelefteq / \diamond$ est un ordre.*

Démonstration: par récurrence sur les longueurs des dérivations. Supposons que toute dérivation d de longueur n vérifie

$$\forall e, \ d \trianglelefteq e \trianglelefteq d \Longrightarrow d \diamond e$$

Soit $d = u \cdot d'$ une dérivation de longueur $n+1$. Supposons que $d \trianglelefteq e \trianglelefteq e$. Le radical u vérifie alors $u \lhd e$ par lemme 4.21 de transitivité et $u \lhd d \trianglelefteq e$. Il vérifie aussi $u \lhd e \trianglelefteq d$ et $u \lhd^{||} d$, c'est-à-dire $u \lhd^{||} e$, suivant le corollaire 4.69 de transitivité carrée. On sait donc trouver une dérivation e' telle que:

$$d = u \cdot d' \ \trianglelefteq \ e \diamond u \cdot e' \ \trianglelefteq \ d$$

Le lemme 4.71 de simplification standard établit que $d' \trianglelefteq e' \trianglelefteq d'$, c'est-à-dire par hypothèse de récurrence que $d' \diamond e'$. Finalement, $d = u \cdot d' \diamond u \cdot e' \diamond e$. □

4.8.2 Définir un pré-ordre extérieur

On sait construire un ordre sur les dérivations co-initiales qui généralise l'ordre d'emboîtement dans le cas des systèmes orthogonaux.

Soit

$$\mathbf{Tr} d = \{ f \text{ standard } | \exists g, d \sqsubseteq f \cdot g \}$$

On définit alors

$$d <_{\text{der}} e \iff \mathbf{Tr} d \supset \mathbf{Tr} e$$

Nous proposons un critère affaibli de transitivité.

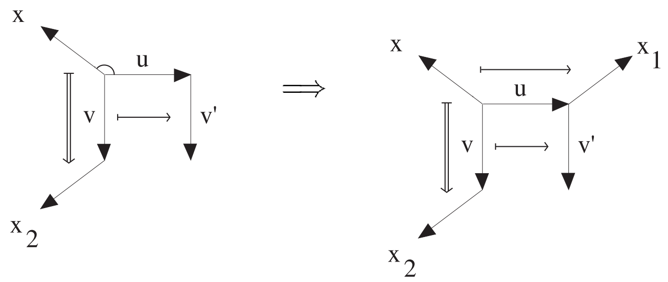


Figure 4.26: critère 10 = une nouvelle forme de transitivité faible

Critère 10 *Si $u\mathsf{R}v$, $v\mathsf{R}_+x$ et $u \uparrow x$ alors $u\mathsf{R}x$.*

Ce critère nous permet de prouver ce qui suit.

Lemme 4.72 *Soit deux dérivations d et e de M à P et d' une dérivation de P à Q. Soit u et v deux radicaux coinitiaux.*

1. $d \lhd e \Longrightarrow d <_{\mathrm{der}} e$,
2. $d <_{\mathrm{der}} d \cdot d'$
3. $u\mathsf{R}_+v \Longrightarrow u <_{\mathrm{der}} v$ *lorsque le système axiomatique $\mathcal{D}$ est orthogonal et vérifie les critères 8 et 10.*

Démonstration: on démontre le premier point en utilisant la transitivité de $\lhd$: si f est une dérivation de $\mathbf{Tr}e$, alors il existe une certaine dérivation g telle que $e \lhd f \cdot g$. Si $d \lhd e$ alors $d \lhd f \cdot g$ et donc $f \in \mathbf{Tr}d$. Pour démontrer le second point, si $f \in \mathbf{Tr}d \cdot d'$, alors $d \cdot d' \lhd f \cdot g$ pour un certaine dérivation g, et donc $d \lhd f \cdot g$. Donc $f \in \mathbf{Tr}d$. Pour démontrer le troisième point nous décomposons la propriété $f \in \mathbf{Tr}v$ en deux sous-cas: soit $v \lhd f$, soit $f\mathsf{R}v$. Dans le premier cas $f\mathsf{R}u$ suivant le lemme 4.61 en utilisant le fait que f (et donc la dérivation $v \cdot f'$ obtenue par permutations carrées sur f) est standard. Dans le second cas, si $f\mathsf{R}v$, alors le critère 10 assure que $f\mathsf{R}u$. Nous venons de démontrer que, dans les deux cas, la dérivation f se trouve dans $\mathbf{Tr}u$. Ce qui démontre le résultat. $\square$Les critères 8 et 10 sont des critères affaiblis de $\uparrow$-transitivité. Nous donnons maintenant le critère 11 qui traduit exactement la propriété de $\uparrow$-transitivité de $<$ dans le cadre de la relation R. Autrement dit, ce critère signifie que si $u < v < w$ lorsque $u \uparrow v$, $u \uparrow w$ et $v \uparrow w$, alors $u < w$.

Critère 11 (transitivité) *Si $u\mathsf{R}_+v$, $v\mathsf{R}_+x$ et $u \uparrow x$ alors $u\mathsf{R}_+x$.*

Il est naturel que les deux critères 8 et 10 de transitivité faible en découlent. Le critère 8 est une conséquence du critère 11 parce que son hypothèse $u\mathsf{R}x$ est plus forte que l'hypothèse $u \uparrow x$. Pour déduire le critère 10 du critère 11 on procède comme suit. Soit trois radicaux xoinitiaux u, v et x tels que $u\mathsf{R}v$, $v\mathsf{R}_+x$ et $u \uparrow x$. En particulier $v \uparrow u$. Par application du critère 7, $u = x$ ou $u\mathsf{R}x$ ou $x\mathsf{R}u$. Le premier cas est interdit par $u\mathsf{R}v$ et $x\mathsf{R}^\neg v$. Nous montrons par l'absurde que $u\mathsf{R}x$. Supposons que $u\mathsf{R}^\neg x$. On en déduit que $x\mathsf{R}_+u$ et par application du critère 11 sur $v\mathsf{R}_+x$, $x\mathsf{R}_+u$ et $v \uparrow u$ que $v\mathsf{R}_+u$. Cela contredit notre hypothèse que $u\mathsf{R}v$. Nous concluons que $u\mathsf{R}x$, ce qui démontre le critère 10 à patri des critère 7 et 11.

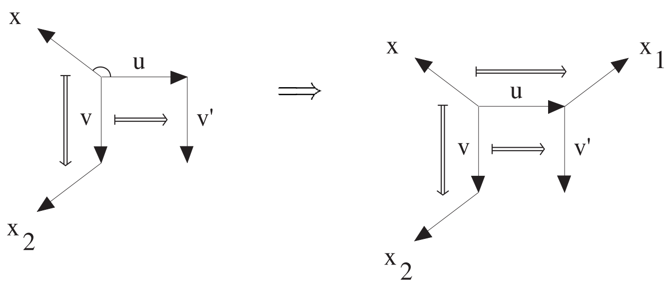


Figure 4.27: critère 10 = la vraie transitivité

4.9 Les graphes et nos axiomes

Richard Kennaway nous a fait remarquer que notre description axiomatique ne s'applique pas aux systèmes de réduction de graphe. On recense deux ordres d'emboîtement: l'ordre "il existe" qui considère que deux radicaux u et v sont emboîtés $u < v$ lorsqu'il existe un chemin de la racine à l'occurrence de v qui traverse l'occurrence de u ; et l'ordre "pour tout" qui emboîte les radicaux u et v: $u < v$ lorsque tous les chemins de la racine à l'occurrence de v traversent l'occurrence de u. Dans les deux cas un axiome n'est pas vérifié.
L'axiome III est faux avec l'ordre "il existe":

$$A \to B, \quad FB \to J, \quad Gx \to Hx$$

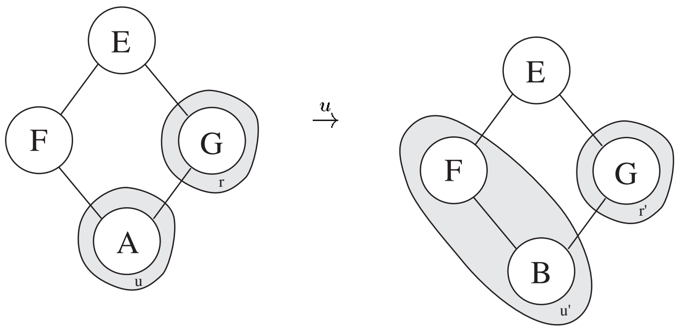


Figure 4.28: un contre-exemple à l'axiome III avec l'ordre "il existe"

Nous avons entouré de gris les radicaux possibles et indiqué leur nom dans l'orbe. Le radical r contient le radical u dans le premier terme, mais son résidu r' par u ne contient pas le radical u' que vient de créer u.

Avec l'ordre "pour tout", c'est l'axiome II qui n'est plus vérifié:

$$A \to B, \quad Kx \to J, \quad Gx \to Hx$$

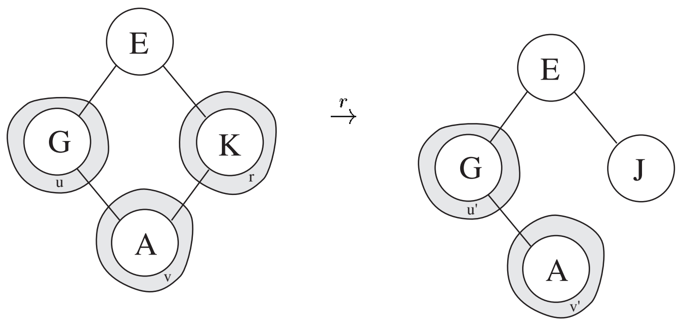


Figure 4.29: un contre-exemple à l'axiome II avec l'ordre “pour tout”

Les radicaux r et u ne contiennent pas le radical u avec l'emboîtement “pour tout”. Les radicaux r, u et v sont ici deux à deux disjoints. Pourtant, après la réduction de r les deux radicaux u' et v' résidus de u et v sont emboîtés: $u < v$.

Cependant Richard Kennaway et David Clark montrent comment généraliser la méthode de Huet-Lévy et démontrer le théorème de standardisation pour les graphes acycliques [CK 95]. Leur analyse ne porte pas sur les radicaux et sur leurs rapports, mais sur les différents chemins d'un radical à la racine [2]. Nous parions que qui veut raisonner ici de manière abstraite doit nécessairement considérer l'espace des chemins: alternativement il compliquera la structure des radicaux en y adjoignant celle des chemins ou il enrichira la loi d'emboîtement pour décrire ces chemins. Il lui faudra en tout cas compliquer le modèle initial pour obtenir le théorème de standardisation *sur les radicaux* avec l'ordre “pour tout”. Au lieu de se lancer dans des constructions mal assurées mais dont nous avons déjà l'idée, nous avons préféré éclaircir notre preuve et la rendre modulaire. Un fait simple nous pousse à croire que le traitement ultérieur des graphes en sera la “factorisation”.

En effet, un graphe $\mathcal{G}$ dans une structure *acyclique* correspond lorsqu'on le déplie à un arbre $\mathcal{A} = \mathsf{Unfold}(\mathcal{G})$ pour lequel le théorème de standardisation est assuré par nos axiomes. Si $\mathcal{G}$ se réécrit en $\mathcal{G}'$: $\mathcal{G} \overset{d}{\twoheadrightarrow} \mathcal{G}'$ il existera une dérivation $\delta : \mathcal{A} \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} \mathcal{A}'$ avec $\mathcal{A} = \mathsf{Unfold}(\mathcal{G})$, $\mathcal{A}' = \mathsf{Unfold}(\mathcal{G}')$ qui développe $\mathsf{Unfold}(d)$: $\delta \propto \mathsf{Unfold}(d)$; on appelle ici $\mathsf{Unfold}(d)$ la multi-dérivation qui réduit à chaque étape R_i de d: $\mathcal{G}_i \overset{r_i}{\to} \mathcal{G}_{i+1}$ les radicaux qui correspondent à R_i dans $\mathsf{Unfold}(\mathcal{G}_i)$. La propriété 4.4 du radical toujours extrait affirme dans ce cas l'existence d'un radical u dans $\mathsf{Ext}\ \delta$. Ce radical u provient d'un radical U de $\mathcal{G}$: $u \in \mathsf{Unfold}(U)$. Il est facile de vérifier dans ce cas que le radical U est extérieur pour l'ordre d'emboîtement “pour tout”: ce qui démontre que $\mathsf{Ext}\ d \neq \emptyset$, et entraîne par extractions successives des radicaux extérieurs le résultat de standardisation. Le point essentiel tient au caractère *dérivé* du théorème de standardisation quand il s'agit de graphes: les calculs de $\mathcal{G}$ sont orientés à cause d'une orientation des calculs (des radicaux) de $\mathcal{A} = \mathsf{Unfold}(\mathcal{G})$. Dit autrement: l'orientation des calculs de $\mathcal{G}$ dérive d'une orientation des chemins de $\mathcal{G}$ (=radicaux de $\mathsf{Unfold}(\mathcal{G})$), et non pas des radicaux de $\mathcal{G}$. Le théorème de standardisation sur les graphes trouve sa source dans le résultat pour les arbres.

Ce qui est vrai des graphes acycliques l'est a fortiori des graphes cycliques. La différence dans ce cas est qu'aucun théorème de standardisation n'est encore prouvé. Nous conjecturons l'existence d'un traitement abstrait proche du notre pour tous ces systèmes.

[2] Il est possible en effet de trouver dans un graphe plusieurs chemins qui relient un radical à la racine du graphe.

4.10 Exemples

4.10.1 Le $\lambda\sigma$-calcul et les systèmes du premier ordre

Si on les traduit de la manière habituelle ("canonique") dans les systèmes abstraits, les calculs du premier ordre vérifient les axiomes I, II, III et IV. Le théorème de standardisation est donc vérifié comme l'avaient montré [HL 91] et [Bou 85]. Notre résultat a seulement l'avantage d'une formulation plus élégante, formulation qui permettra les développements du chapitre 5.

4.10.2 Le λ-calcul

Les axiomes I, II, III et IV sont vérifiés dans le λ-calcul, quelque soit l'ordre choisi parmi ceux introduits au chapitre 2.7.2:

1. l'ordre plus extérieur plus à gauche,
2. l'ordre d'arbre,
3. l'ordre d'emboîtement strict.

Il est remarquable que le dernier ordre vérifie l'axiome II malgré un comportement inhabituel: les deux radicaux

$$u : (\lambda x.(\lambda y.P)x)(Ia) \to (\lambda y.P)(Ia) \quad \text{et} \quad v : (\lambda x.(\lambda y.P)x)(Ia) \to (\lambda x.P[x/y])(Ia)$$

sont disjoints mais u pourtant place la réduction $Ia \to a$ sous v. Ce comportement calculatoire s'apparente plus à celui d'un graphe.

Au chapitre 5 en théorème 5.2, nous rappellerons que le théorème de standardisation sur l'ordre d'arbre syntaxique assure que la stratégie suivante normalise:

$$(\beta) \quad (\lambda x.M) \ \rhd_{\mathsf{std}} \ M[x := N]$$

$$(\mathrm{app}_l) \quad \frac{M \ \rhd_{\mathsf{std}} \ M'}{MN \ \rhd_{\mathsf{std}} \ M'N} \quad \text{si } M \text{ n'est pas de la forme } M = \lambda x.M_1$$

$$(\mathrm{app}_r) \quad \frac{N \ \rhd_{\mathsf{std}} \ N'}{MN \ \rhd_{\mathsf{std}} \ MN'} \quad \text{si } M \text{ est une forme normale } xM_1...M_k$$

$$(\xi) \quad \frac{M \ \rhd_{\mathsf{std}} \ M'}{\lambda x.M \ \rhd_{\mathsf{std}} \ \lambda x.M'}$$

Cette stratégie appelée parfois "stratégie normale" calcule à chaque étape le radical le plus exterieur le plus à gauche du λ-terme. Avec notre théorème de standardisation sur l'ordre d'emboîtement strict, d'autres stratégies apparaissent, la suivante par exemple:

$$(\beta) \quad (\lambda x.M) \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ M[x := N] \quad \text{si } M \text{ est de la forme } \lambda x_1...\lambda x_k.(xM_1...M_n)$$

$$(\mathrm{app}_l) \quad \frac{M \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ M'}{MN \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ M'N}$$

$$(\mathrm{app}_r) \quad \frac{N \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ N'}{MN \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ MN'} \quad \text{si } M \text{ est une forme normale } xM_1...M_k$$

$$(\xi) \quad \frac{M \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ M'}{\lambda x.M \ \rhd_{\mathsf{STD}} \ \lambda x.M'}$$

Cette stratégie $\rhd_{\mathsf{STD}}$ réduit à chaque étape un radical plus intérieur que le radical réduit par $\rhd_{\mathsf{std}}$. Le théorme de standardistion montre que tout comme $\rhd_{\mathsf{std}}$, cette stratégie $\rhd_{\mathsf{STD}}$ normalise.

4.10.3 Systèmes avec règles d'équivalence: le cas général

Nous poursuivons le travail des sections 2.7.3 et 3.6.2. Nous faisons l'hypothèse d'un système abstrait $(\mathcal{D}, \uparrow, <)$ qui vérifie les axiomes A, B, C, C', D, E, I, II, III et IV, et d'une relation $\simeq$ telle qu'elle est présentée par les sections 2.7.3 et 3.6.2.

1. l'axiome E est vérifié par construction de $(\mathcal{D}_{\simeq}, \uparrow_{\simeq})$,

2. l'axiome I est démontré sur $\mathcal{D}_{\simeq}$ à l'aide des hypothèses 2 et 5 avancées en section 2.7.3 et 3.6.2,

3. l'axiome II est démontré avec les hypothèses 2, 4 et 5 et l'axiome E. En effet, si $r \uparrow_{\simeq} u$, $u\langle r\rangle u'$ et $v\langle r\rangle v'$, alors l'axiome E vérifié ci-dessus implique $r \uparrow_{\simeq} u$ et $r \uparrow_{\simeq} v'$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse 4, et de conclure avec les hypothèses 2 et 5.

L'hypothèse suivante permet de démontrer l' axiome D:

7. Soit r, u, v, u', v' cinq radicaux libres tels que $u[\![r]\!]v$ et $u'[\![r']\!]v'$.

La vérification de l'axiome C' est facilitée dans le cas où pour tout triplet $(r, u, v) \in \mathcal{R}^3_{\simeq}$ de radicaux tels que $r \uparrow_{\simeq} u$, $r \uparrow_{\simeq} v$ et $r < u$, on sait déduire de $\neg(u \uparrow_{\simeq} v)$ que $r < v$. Dans ce cas en effet, l'axiome C' devient:

$$\text{pour tout triplet } (r, u, v, u', v') \in \mathcal{R}^5_{\simeq} \text{ tel que } r \uparrow u, r \uparrow v, u\langle r\rangle u', v\langle r\rangle v', r \not\leq u \text{ et } r \not\leq v\text{:}$$
$$u' \uparrow_{\simeq} v' \text{ implique } u \uparrow_{\simeq} v$$

Cette remarque facilitera la démonstration de l'axiome C' dans le cadre du γ-calcul et du Π-calcul.

Restent les axiomes III et IV que nous préférons ne pas démontrer ici. Il faudrait pour faire ce travail générique des hypothèses sur $\simeq$ un peu difficiles, et qui de toutes façons ne seraient pas vérifiées par nos exemples de relations $\simeq$ dans le γ-calcul et le Π-calcul.

4.10.4 Le γ-calcul

Nous reprenons les définitions de compatibilité et d'emboîtement introduites en sections 2.7.4 et 3.6.3. Comme cas particulier de la section 4.10.3, les axiomes E, I et II sont vérifiés. L'hypothèse 7 de la section 4.10.3 est vérifiée par $\simeq$, ce qui fait que l'axiome D est vrai dans $\mathcal{D}_{\simeq}$. La remarque suivante dans la section 4.10.3 s'applique au γ-calcul, ce qui facilite la démonstration de l'axiome C'. Nous laissons au lecteur intéressé la démonstration de l'argument final, et des axiomes III et IV.

4.10.5 Les réseaux de preuve

Nous prouvons le théorème de standardisation pour l'ordre d'emboitement défini en partie 3.6.4. Nous voulons utiliser le théorème 4.6.

1. Les axiomes A, B, C, FD+, PERM+ ont été démontrés aux chapitres précédents. Les axiomes C', D, E et I sont évidents. Restent les axiomes II, III et IV.

2. L'axiome II n'est pas très difficile non plus. Soit u et v deux radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$, $v[\![r]\!]v'$. Nous avons démontré en partie 3.6.4 que si u' contient v', alors u contient v. Réciproquement si u contient v, alors u interagit avec une boite $!\pi$ qui contient v. Dans ce cas u' interagit lui aussi avec une boite $!\pi'$; nécessairement, cette boite contient v' parce que $u \uparrow r$.

3. L'axiome III vient d'une propriété dynamique des boites exponentielles: un radical r dans $!\pi$ ne peut pas interagir avec des éléments hors de la boite. En particulier, si u contient r, le radical r ne peut ni créer ni déplacer de radical en dehors du domaine $!\pi$ circonscrit par u.

4. L'axiome IV est un peu plus difficile à prouver. Si $u \uparrow v$, $u \parallel v$, $u[\![v]\!]u'$, $v[\![u]\!]v'$, $v' \uparrow t_1$, $v' \not\leq t_1$, $u' \uparrow t_2$ et $u' \not\leq t_2$ avec $t_1[\![v']\!]t'$ et $t_2[\![u']\!]t'$: si un élément α (cellule ou boite) en jeu dans t' se trouve nécessairement dans t — en effet, aucun radical ne contient de radical dans sa règle droite. Le radical t' se situe sur un port i particulier de l'élément α: son port principal, ou un port auxiliaire si t est une réduction commutative. Soit le port i_0 dans $\partial_0 u = \partial_0 v$ dont i provient. Un seul radical u ou v réduit des éléments liés à ce port i_0 directement. Seul ce radical peut créer t_i ; il existe donc un radical t tel que $t[\![u]\!]t_1$ et $t[\![v]\!]t_2$. De plus, le radical t ne peut pas être emboité sous u et v sans que u contienne v, ou le contraire. L'axiome IV est donc vrai.

On peut appliquer le théorème de standardisation dans ce cas de calcul non orthogonal: les calculs de réseaux de preuves peuvent être standardisés.

4.10.6 Le Π-calcul

Nous poursuivons le travail des sections 2.7.6 et 3.6.5 et introduisons un calcul Π_{ev} d'évaluation partielle du Π_g-calcul. Tout d'abord, les axiomes D, E, I et II sur le Π-calcul sont la conséquence de la section 4.10.3. Nous laissons au lecteur intéressé la démonstration des axiomes C', III et IV.

Ensuite, remarquons que les axiomes de standardisation sont aussi vérifiés par le Π_g-calcul. Le théorème de standardisation a dans ce cas là un petit intérêt puisque tous les radicaux du Π_g-calcul sont disjoints: en effet, un radical qui duplique un terme $!P$ ne duplique aucun radical du Π_g-calcul. Pour cette raison toutes les dérivations du Π_g-calcul sont standards. Nous pourrons dire après le prochain chapitre que toutes ces dérivations sont "externes" dans le Π-calcul.

Le Π_{pr}-calcul: un calcul d'évaluation partielle pour le Π_g-calcul

Le Π_{pr}-calcul (*pr* pour "privé") est le fragment du Π-calcul défini par les règles d'inférence PAR, RES, STRUCT, ATOM, BANG, SUM vues en section 2.7.6 et les deux règles de réduction suivantes:

$$\begin{array}{llll} (\nu x)(!x(y).P \mid \bar{x}z.Q) & \to_{\mathrm{pr}} & (\nu x)(!x(y).P \mid P[y := z] \mid Q) & (1_{pr}) \\ (\nu x)(x(y).P \mid \bar{x}z.Q) & \to_{\mathrm{pr}} & (\nu x)(P[y := z] \mid Q) & (2_{pr}) \end{array}$$

Le fragment Π_{ev} du Π-calcul est défini par:

$$\Pi_{ev} = \Pi_g \cup \Pi_{pr}$$

Les radicaux du Π_{ev}-calcul sont aussi des radicaux du Π-calcul. On écrit que $u \in \Pi$ lorsque u est un radical du Π-calcul et $u \in \Pi_{ev}$ lorsque en plus il est dans le fragment Π_{ev}. Le fragment Π_{ev} vérifie la propriété suivante:
Soit un triplet $(r, u, u') \in \mathcal{R}^3_{\simeq}$ tel que $u\langle r\rangle u'$.

$$u \in \Pi_{ev} \Rightarrow u' \in \Pi_{ev}$$

Avec cette propriété on peut transférer les relations de résidu, de compatibilité et d'emboîtement du Π-calcul sur le Π_{ev}-calcul. Les axiomes A, B, C, C', D, E , I, et II sont préservé par l'opération et sont donc vérifiés le fragment Π_{ev} du Π-calcul.
De manière inattendue, nous montrons que le Π_{ev}-calcul ne vérifie pas l'axiome III. Soit le radical $r \in \Pi_{ev}$ qui réduit le sous-terme

$$(\nu d)(d(e)|\bar{d}c) \rightarrow \text{nil}$$

dans le terme:

$$P = (\nu c)(\nu a)(\ !a(x).(\nu d)(d(e)|\bar{d}c)\ |\ \bar{a}y\ |\ c(w)\ |\ \bar{c}v\ )$$

En effaçant le nom c, le radical $r : P \rightarrow Q$ crèe un radical $s \in \Pi_{ev}$ qui communique sur c:

$$s : Q \simeq (\nu a)(!a(x).\text{nil}\ |\ \bar{a}y)|(\nu c)(c(w)|\bar{c}v) \rightarrow (\nu a)(!a(x).\text{nil}\ |\ \bar{a}y)|\text{nil})$$

Contrairement à r, le radical s ne calcule pas sous l'opérateur "!". Si $u : P \rightarrow P'$ désigne le radical de Π_{ev} qui communique en a et duplique r, c'est-à-dire $u < r$, alors s n'est pas contenu par $u' : Q \rightarrow Q'$, l'unique résidu de u par r:

$$u' : (\nu c)(\nu a)(\ !a(x)\ |\ \bar{a}y\ |\ c(w)\ |\ \bar{c}v\ ) \rightarrow (\nu c)(\nu a)(\ !a(x)\ |\ c(w)\ |\ \bar{c}v\ )$$

L'axiome III n'est donc pas vérifié dans Π_{ev}, avec l'ordre d'emboitement naturel. Une solution pour rétablir la situation serait d'orienter l'égalité:

$$(\nu x)(P|Q) \simeq P|(\nu x)Q$$

pour interdire les transformations (implicites) de la sorte:

$$(\nu x)(P|Q) \leadsto P|(\nu x)Q$$

et ne garder que les mécanismes dits de "scope extrusion".

Nous préférons ici ne pas transformer la syntaxe initiale du Π-calcul, et profiter d'une bonne propriété du Π_{ev}-calcul, le fait qu'un radical $v \in \Pi_{ev}$ emboîté sous un radical $u \in \Pi_{ev}$ n'est jamais calculé par Π_g. Tout Π_g-radical qu'une Π_{ev}-dérivation d réduit se trouve en conséquence être un radical externe de cette dérivation. Ce que j'ai formalisé jusqu'ici:

$$\forall u \in \Pi_g, \forall d \in \mathcal{D} : \quad u \sqsubseteq d \Rightarrow u \in \mathsf{Ext}\ d \qquad (*)$$

Cette propriété $(*)$ est trop faible pour le théorème de standardisation mais suffit à démontrer un résultat de factorisation à la Freyd-Kelly, voir [FK 72]. Toute dérivation $d : P \twoheadrightarrow Q$ du Π_{ev}-calcul peut être factorisée en

$$d \equiv e \cdot m$$

où $\equiv$ est l'équivalence par permutations à la Lévy, avec e une Π_g-dérivation et m une Π_{pr}-dérivation. Contrairement à la définition originale (voir [FK 72]) la factorisation n'est pas unique parce qu'il existe des radicaux à la fois dans Π_g et Π_{pr}. Pour retrouver l'unicité de la factorisation $e \cdot m$ il suffit de considérer un Π_{pr*}-calcul à la place de Π_{pr}, où Π_{pr*} est défini ainsi:

$$\Pi_{pr*} = \Pi_{ev} - \Pi_g$$

Il est possible de démontrer la proposition suivante:

Théorème 4.9 (théorème de factorisation) $(\Pi_g/\equiv, \Pi_{pr*}/\equiv)$ *est un système de factorisation dans* $\Pi/\equiv$*, c'est-à-dire:*

1. Π_g *et* Π_{pr*} *sont fermés par composition,*

2. *toute* Π*-dérivation* d *peut être factorisée en:*

$$d \equiv e \cdot m$$

   où e *est une* Π_g*-dérivation et* m *une* Π_{pr*} *dérivation,*

3. *si* $e \cdot m \cdot v \equiv u \cdot f \cdot n$ *où* $e, f \in \Pi_g$ *et* $m, n \in \Pi_{pr*}$*, il y a un unique dérivation (à permutations près)* w *qui rend le diagramme commutatif (par permutation):*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, dotted, "w"] & Z \arrow[d, "v"'] \\ X' \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[r, "n"] & Z' \end{tikzcd}$$

Les deux points suivants sont mis là pour valider notre calcul d'évaluation partielle du Π_g-calcul, cette variante plus "calculatoire" du π-calcul que nous avons voulu étudier.

- Le théorème de factorisation confère à tout calcul d de l'évaluation partielle Π_{ev} un sous-calcul "canonique" dans Π_g: la dérivation e telle que $d \equiv e \cdot m$ pour m dans Π_{pr*}. Pour cette raison, nous considérons ce théorème comme l'ingrédient indispensable pour une analyse rigoureuse de l'évaluation partielle.

- On vérifie qu'aucun Π_{pr*}-calcul n'opère de choix non déterministe. Pour cette raison, les sémantiques par bisimulation sont respectées par le calcul d'évaluation partielle, ce qui fait partie des objectifs naturels de l'exercice.

4.10.7 Les systèmes à réduction combinatoire (CRS)

Le calcul combinatoire est traité en chapitre 7.

Chapitre 5

Problèmes de normalisation

Plan du chapitre:

Démontrer la normalisation de stratégies "externes" est une application connue du théorème de standardisation. Ce chapitre expose une extension de la méthode aux systèmes non-orthogonaux. Nous établissons un lien inédit entre terminaison des stratégies et finitude du non déterminisme. Cette analyse est inspirée des λ-calculs avec substitutions explicites. Ces systèmes ne sont pas orthogonaux, mais la proximité du λ-calcul leur confère certaines particularités, de confluence par exemple. Celui qui en chercherait une description orthogonale, poussé par l'envie de dépasser certaines limitations de la syntaxe, y renoncerait assez tôt. La confluence est ici un caractère d'adéquation au λ-calcul plus qu'un effet d'une dynamique de réécriture. Plusieurs stratégies d'évaluation doivent pouvoir être simulées dont la variété est a priori irréductible à un schéma de permutation. Les λ-calculs avec substitutions explicites sont pour cela de nature profondément non-orthogonale. Nous devrons les étudier comme tels, et établir les outils nécessaires à ce nouveau cadre.

Les λ-calculs avec substitutions explicites ont pour langue souche un $\lambda\sigma$-calcul introduit par [ACCL 90]. Son pouvoir d'expression est riche. Les substitutions peuvent y être retardées, propagées, composées, et substituées. Notre étude dynamique des substitutions explicites a eu pour résultat inattendu un exemple de non terminaison forte dans la version simplement typée du $\lambda\sigma$-calcul. Nous donnons cet exemple en section 5.1, traduit de [Mel 95]. Nous avons depuis établi d'autres exemples de non terminaison dans des systèmes voisins, voir [Mel 94] [Mel 95a]. On peut à notre connaissance adapter l'exemple dans tous les systèmes avec substitutions explicites et composition.

Les λ-calculs à substitutions explicites servent à simuler des machines abstraites [HMP 96]. Il est bon de savoir, une fois effectuée la traduction de sa machine, que la stratégie obtenue est normalisante. Un travail important a été mené pour établir des résultats de normalisation à partir d'une restriction de la dynamique de réécriture du $\lambda\sigma$-calcul. Deux principes généraux ont été obtenus: on retrouve la normalisation forte en interdisant la composition [BBLR 95], ou en passant au calcul faible [HMP 96]. Nous proposons en section 5.2 un troisième point de vue, encore peu abordé, celui des stratégies externes.

La stratégie "externe" du λ-calcul normalise, [Cur 58]: il suffit de réduire à chaque étape le radical le plus externe, le plus à gauche du terme pour atteindre la forme normale. Nous voudrions adapter cette stratégie au $\lambda\sigma$-calcul et conserver la propriété de normalisation. Plus généralement, nous voudrions savoir dans quels cas la stratégie "externe" normalise dans les systèmes non-orthogonaux. C'est un problème important qui n'a été abordé encore que dans des cas très particuliers [Toy 92]. Notre traitement du théorème de standardisation permet d'introduire la notion de stratégie externe dans le domaine non-orthogonal. Nous en profitons pour reprendre la démonstration de Curry et ramener son résultat de normalisation à la finitude du nombre de classe $\equiv$ d'un terme à sa forme normale. L'argument peut être renversé, ce qui nous amène à un théorème de correspondance entre normalisation des stratégies et ω-déterminisme.

Nous revenons finalement au $\lambda\sigma$-calcul. Deux définitions exogènes de stratégie externe se trouvent en vis-à-vis: celle que nous allons définir pour tous les systèmes non-orthogonaux, et celle qu'on peut dériver du λ-calcul — une stratégie du $\lambda\sigma$-calcul est externe si son interprétation, voir [Har 87], est "externe" au sens du λ-calcul. Nous montrons que la première définition implique la seconde pour des termes normalisables: la projection d'une dérivation $\lambda\sigma$-externe est alors λ-externe. Cette propriété très forte d'adéquation syntaxique marque le rapport étroit des dynamiques du λ-calcul et du $\lambda\sigma$-calcul quand il s'agit de réussir un calcul et d'atteindre une forme normale, ce qui donne un contre-point positif à notre preuve de non-terminaison.

5.1 Le $\lambda\sigma$-calcul typé ne termine pas toujours

Nous donnons ici l'exemple d'un λ-terme simplement typé dont la réduction dans le $\lambda\sigma$-calcul ne termine pas toujours.

5.1.1 Introduction au $\lambda\sigma$-calcul

Toutes les implémentations réalistes du λ-calcul contrôlent les substitutions pour profiter du partage de graphe [Wad 71] et éviter une explosion en taille immédiate. Le λ-calcul ne peut pas décrire ce contrôle de manière simple. Le $\lambda\sigma$-calcul a été introduit dans [ACCL 90] comme un pont entre le λ-calcul "classique" et ses implémentations concrètes. Les substitutions deviennent explicites, on peut les retarder et les garder en mémoire. Le $\lambda\sigma$-calcul permet d'étudier les substitutions et de vérifier les implémentations de façon simple [HMP 96].

La syntaxe du $\lambda\sigma$-calcul contient deux classes d'objets: les termes et les substitutions. Les termes sont écrits selon la notation de De Brujn [DeB 72].

$$\begin{array}{ll} \textbf{Termes} & a ::= \mathbf{1} | ab | \lambda a | a[s] \\ \textbf{Substitutions} & s ::= id | \uparrow | a \cdot s | s \circ t \end{array}$$

La règle *Beta* correspond à la β-règle du λ-calcul. Les autres règles, qu'on appelle les σ-règles, décrivent comment les substitutions sont propagées à l'intérieur des termes et effectuées.

$$
\begin{array}{ll}
Beta & (\lambda a)b \to a[b \cdot id] \\
\\
App & (ab)[s] \to a[s]b[s] \\
Abs & (\lambda a)[s] \to \lambda(a[\mathbf{1} \cdot (s \circ \uparrow)]) \\
Clos & a[s][t] \to a[s \circ t] \\
Map & (a \cdot s) \circ t \to a[t] \cdot (s \circ t) \\
Ass & (s_1 \circ s_2) \circ s_3 \to s_1 \circ (s_2 \circ s_3) \\
\\
VarId & \mathbf{1}[id] \to \mathbf{1} \\
VarCons & \mathbf{1}[a \cdot s] \to a \\
IdL & id \circ s \to s \\
ShiftId & \uparrow \circ\, id \to \uparrow \\
ShiftCons & \uparrow \circ\, (a \cdot s) \to s
\end{array}
$$

Si on calcule dans le λ-calcul un λ-terme typé M, toute réduction de M atteint sa forme normale. Parmi les $\lambda\sigma$-réductions de M, celles qui imitent les λ-réductions termineront elles aussi. D'autres réductions suivent des chemins plus subtils et peuvent donc calculer M d'une manière nouvelle. Dans ces conditions la réduction d'un terme typé au sein du $\lambda\sigma$-calcul termine-t'elle nécessairement? La question a été largement débattue et étudiée dans l'espoir d'une réponse positive. Déjà, on avait su prouver que le calcul des substitutions engendré par les σ-règles est fortement normalisant [HaLa 86][CHR 92][Zan 93]: quel que soit le $\lambda\sigma$-terme toute stratégie de propagation des substitutions termine. Ce résultat oblige un $\lambda\sigma$-calcul qui ne termine pas à créer et réduire continuellement de nouveaux *Beta*-radicaux, ce qui semble contredire la structure typé du terme.

Pourtant nous présentons ici un λ-terme clos et simplement typé dont le calcul dans $\lambda\sigma$-calcul ne termine pas toujours. L'espace des $\lambda\sigma$-réductions n'est donc pas lié strictement à celui des λ-réductions, ce qui est une surprise.

5.1.2 Intuitions initiales

Soit M le λ-terme simplement typé $\lambda v.(\lambda x.(\lambda y.y)((\lambda z.z)x))((\lambda w.w)v)$. Comme tous les termes typés, il existe une $\lambda\sigma$-réduction qui le normalise. Nous montrons dans la partie suivante qu'il peut aussi ne jamais terminer.

Construire une stratégie qui ne termine pas sur M demande de la précision. Les σ-règles offrent un calcul fortement normalisant pour n'importe quel $\lambda\sigma$-terme. La *Beta*-règle imite la β-règle dont les réductions appliquées à un λ-terme bien typé terminent toujours. Ce qui montre que la non terminaison doit provenir d'interactions fines en la *Beta* et les σ-règles. Soit $(\lambda a)b$ un λ-terme et s une substitution de tête. Nous étudions maintenant les deux stratégies possibles pour réduire le *Beta*-radical de tête et commencer la propagation de s.

Une stratégie classique commence par réduire le *Beta*-radical

$$((\lambda a)b)[s] \to (a[b \cdot id])[s] \quad Beta$$

et propage ensuite les deux substitutions s et $(b \cdot id)$ à l'intérieur de a au moyen des σ-règles. Si on la mène à son terme, la σ-propagation termine sur le λ-terme $M[N/x]$ lorsque l'interprétation de $(\lambda a)b[s]$ dans le λ-calcul est $(\lambda x.M)N$.

Une autre stratégie possible commence par les deux σ-règles *App* et *Lambda* afin de propager s à travers le *Beta*-radical. Nous écrirons s et s' les deux copies de s par *App*.

$$\begin{array}{ll} ((\lambda a)b)\ [s] & \\ \to ((\lambda a)[s])\ b[s'] & App \\ \to (\lambda(a[\mathbf{1}\cdot s\circ\uparrow]))\ b[s'] & Lambda \end{array}$$

Elle effectue ensuite le *Beta*-radical de racine:

$$\to a[\mathbf{1}\cdot s\circ\uparrow][b[s']\cdot id] \quad Beta$$

Les deux substitutions $(\mathbf{1}\cdot(s\circ\uparrow))$ et $(b[s']\cdot id)$ sont ensuite propagées à l'intérieur de a à l'aide des σ-règles. Si on le continue, le processus termine encore sur le λ-terme $M[N/x]$.

La propriété de normalisation forte semble naturelle dans les deux cas. Cependant, on remarque que la seconde stratégie duplique la substitution s avec la règle *App*. Cette duplication par *App* n'empêche pas le calcul de terminer fortement quand on reste dans le σ-calcul de propagation. En gros, une fois dupliquées, les substitutions restent disjointes au cours des σ-réductions, et ne peuvent donc pas interagir. Nous montrons maintenant comment le rajout de la *Beta*-règle permet de combiner deux substitutions disjointes — le point de départ possible pour une stratégie non normalisante.

La stratégie duplicante commence de la même façon que la deuxième stratégie, en utilisant les deux σ-règles *App* et *Lambda* pour propager la substitution s à travers le *Beta*-radical:

$$\begin{array}{ll} ((\lambda a)b)[s] & \\ \to ((\lambda a)[s])b[s'] & App \\ \to (\lambda a[\mathbf{1}\cdot s\circ\uparrow])b[s'] & Lambda \end{array}$$

Nous appelons $s_1 = s$. La situation jusqu'à maintenant est claire. Les deux substitutions $\mathbf{1}\cdot(s_1\circ\uparrow)$ et s' se trouvent au dessus des deux termes disjoints: a et b. Attention: le *Beta*-radical les mélange!

$$\to a[\mathbf{1}\cdot s_1\circ\uparrow][b[s']\cdot id] \quad Beta$$

La substitution $\mathbf{1}\cdot(s_1\circ\uparrow)$ agit encore sur a tandis que $(b[s']\cdot id)$ et donc s' peuvent être propagés à travers a et aussi $s_1\circ\uparrow$. La propagation commence par une série de σ-règles:

$$\begin{array}{lll} \to a[(\mathbf{1}\cdot s_1\circ\uparrow)\circ(b[s']\cdot id)] & Clos & \\ \to a[\mathbf{1}[b[s']\cdot id]\cdot(s_1\circ\uparrow)\circ(b[s']\cdot id)] & Map & \\ \to a[b[s']\cdot(s_1\circ\uparrow)\circ(b[s']\cdot id)] & VarCons & \\ \to a[b[s']\cdot s_1\circ\underbrace{(\uparrow\circ(b[s']\cdot id))}_{s_2}] & Ass & (\star) \end{array}$$

La règle *Map* duplique $(b[s']\cdot id)$ et divise sa propagation en deux opérations distincts. La première est essentielle. Elle s'occupe de substituer $b[s']$ dans a via la substitution de $\mathbf{1}$. La seconde est superflue. Elle cherche à substituer $b[s']$ dans $s_1\circ\uparrow$ alors qu'aucune variable de s_1 n'est liée à b: s_2 est donc une substitution inutile. Appliquer *ShiftCons* à ce point clarifierait la situation en $a[b[s']\cdot(s_1\circ id)]$ qui correspond en gros au terme obtenu à partir de $((\lambda a)b)[s]$ avec la première stratégie:

$$\begin{array}{ll} ((\lambda a)b)[s] & \\ \to (a[b\cdot id])[s] & Beta \\ \to a[(b\cdot id)\circ s] & Clos \\ \to a[b[s']\cdot(id\circ s_1)] & Map \\ \to a[b[s']\cdot s_1] & IdL \end{array}$$

Maintenant faisons l'hypothèse que s_1 vaut $((\lambda a)b) \cdot id$. La substitution s_1 dans $(\star)$ peut alors capturer la substitution s_2 inutile avec des σ-règles et la dupliquer:

$$\begin{array}{ll}
s_1 \circ s_2 = ((\lambda a)b) \cdot id) \circ s_2 & \\
\to ((\lambda a)b)[s_2] \cdot (id \circ s_2) & Map \\
\to^2 ((\lambda a)[s_2])(b[s_2]) \cdot s_2 & App + IdL \\
\to (\lambda(a[\mathbf{1} \cdot s_2 \circ \uparrow]))(b[s_2]) \cdot s_2 & Lambda \\
\to a[\mathbf{1} \cdot s_2 \circ \uparrow][b[s_2] \cdot id] \cdot s_2 & Beta \\
\to a[(\mathbf{1} \cdot s_2 \circ \uparrow) \circ (b[s_2] \cdot id)] \cdot s_2 & Clos \\
\to a[\mathbf{1}[b[s_2] \cdot id] \cdot (s_2 \circ \uparrow) \circ (b[s_2] \cdot id)] \cdot s_2 & Map \\
\to a[b[s_2] \cdot (s_2 \circ \uparrow) \circ (b[s_2] \cdot id)] \cdot s_2 & VarCons \\
\to a[b[s_2] \cdot s_2 \circ \underbrace{(\uparrow \circ (b[s_2] \cdot id))}_{s_3}] \cdot s_2 & Ass
\end{array}$$

Soit t une substitution quelconque. Appelons $\mathbf{rec}(t) = \uparrow \circ (b[t] \cdot id)$.

La substitution $s_1 \circ s_2$ contient après réduction la substitution $s_2 \circ s_3 = s_2 \circ \mathbf{rec}(s_2)$. Plus généralement, $s_1 = (\lambda a)b \cdot id$ se comporte comme un duplicateur: toute substitution $s_1 \circ t$ peut être transformée en une substitution qui contient $t \circ \mathbf{rec}(t)$. Si la substitution $s_2 = \mathbf{rec}(s_1)$ se comporte elle même comme un duplicateur alors $s_2 \circ s_3$ peut être réduit en une substitution qui contient $s_3 \circ \mathbf{rec}(s_3)$.

Tout ceci indique la possibilité d'une itération infinie. Appelons $(s_n)_{n>0}$ la suite définie par s_1 et $s_{n+1} = \mathbf{rec}(s_n)$ et supposons que $(s_k \circ t)$ puisse être réduit pour tout k en une substitution qui contient $t \circ \mathbf{rec}(t)$. La substitution $s_k \circ s_{k+1}$ peut être transformée en une substitution qui contient $s_{k+1} \circ \mathbf{rec}(s_{k+1}) = s_{k+1} \circ s_{k+2}$. Le procédé peut donc être réitéré pour induire une réduction infinie du λ-terme $((\lambda a)b)[s]$.

5.1.3 Le contre-exemple

La preuve

Soit la suite $(s_i)_{i>0}$ de substitutions:

Définition 5.1 *Nous fixons deux $\lambda\sigma$-termes a et b.*

- $s_1 = (\lambda a)b \cdot id$
- $\mathbf{rec}(t) = \uparrow \circ (b[t] \cdot id)$
- $s_{n+1} = \mathbf{rec}(s_n)$
- $\mathbf{C}_x(y) = \uparrow \circ (b[y] \cdot x)$
- $\mathbf{D}_x(y) = a[b[x] \cdot y] \cdot x$

Le lemme suivant décrit comment s_1 duplique une substitution t et emboîte ses deux copies.

Lemme 5.2 (Etape de duplication) $s_1 \circ t \to^+ \mathbf{D}_t(t \circ \mathbf{rec}(t))$

Démonstration:

$$\begin{array}{ll}
((\lambda a)b \cdot id) \circ t & \\
\to ((\lambda a)b)[t] \cdot id \circ t & Map \\
\to^2 (\lambda a)[t]b[t] \cdot t & App + IdL \\
\to (\lambda a[\mathbf{1} \cdot t \circ \uparrow])b[t] \cdot t & Abs \\
\to (a[\mathbf{1} \cdot t \circ \uparrow][b[t] \cdot id] \cdot t & Beta \\
\to a[(\mathbf{1} \cdot t \circ \uparrow) \circ (b[t] \cdot id)] \cdot t & Clos \\
\to a[\mathbf{1}[b[t] \cdot id] \cdot (t \circ \uparrow) \circ (b[t] \cdot id)] \cdot t & Map \\
\to^2 a[b[t] \cdot t \circ (\uparrow \circ (b[t] \cdot id))] \cdot t & VarCons + Ass \\
= a[b[t] \cdot t \circ \mathbf{rec}(t)] \cdot t &
\end{array}$$

□

Le lemme suivant explique étape par étape comment s_n capture toute substitution t.

Lemme 5.3 (Etape de capture) $\mathbf{rec}(s) \circ t \to^+ \mathbf{C}_t(s \circ t)$

Démonstration:

$$\begin{array}{ll}
(\uparrow \circ (b[s] \cdot id)) \circ t & \\
\to \uparrow \circ ((b[s] \cdot id) \circ t) & Ass \\
\to \uparrow \circ (b[s][t] \cdot (id \circ t)) & Map \\
\to^2 \uparrow \circ (b[s \circ t] \cdot t) & Clos + IdL
\end{array}$$

□

Nous appliquons nos deux lemmes à $s_n \circ s_{n+1}$:

$$s_n \circ s_{n+1} \;=\; \mathbf{rec}(\mathbf{rec}(...\mathbf{rec}(s_1))) \circ s_{n+1} \qquad \text{avec } (n-1) \text{ niveaux de } \mathbf{rec}.$$

Une étape de capture permet de le transformer en

$$\to^+ \mathbf{C}_{s_{n+1}}(\mathbf{rec}(\mathbf{rec}(...\mathbf{rec}(s_1))) \circ s_{n+1}) \qquad \text{avec } (n-2) \text{ niveaux de } \mathbf{rec}.$$

...puis $(n-2)$ étapes de capture le transforment en:

$$\to^+ \mathbf{C}_{s_{n+1}}(\mathbf{C}_{s_{n+1}}(...\mathbf{C}_{s_{n+1}}(s_1 \circ s_{n+1}))) \qquad \text{avec } (n-1) \text{ niveaux de } \mathbf{C}_{s_{n+1}}(.).$$

...et enfin l'étape de duplication en:

$$\to^+ \mathbf{C}_{s_{n+1}}(\mathbf{C}_{s_{n+1}}(...\mathbf{C}_{s_{n+1}}(\mathbf{D}_{s_{n+1}}(s_{n+1} \circ \mathbf{rec}(s_{n+1})))))$$

$$= \mathbf{C}_{s_{n+1}}(\mathbf{C}_{s_{n+1}}(...\mathbf{C}_{s_{n+1}}(\mathbf{D}_{s_{n+1}}(s_{n+1} \circ s_{n+2}))))$$

Nous obtenons ainsi une substitution qui contient $(s_{n+1} \circ s_{n+2})$. Cela prouve que le $\lambda\sigma$-calcul de $(s_n \circ s_{n+1})$ peut se borner à incrémenter k dans $(s_{n+k} \circ s_{n+k+1})$ et donc peut ne jamais terminer.

Nous donnons ici un rapport explicite du processus. Nous écrivons C^n pour une fonction C appliquée n fois:

Lemme 5.4

a. $s_{k+1} \circ s_{n+1} \to^+ \mathbf{C}_{s_{n+1}}(s_k \circ s_{n+1})$

b. $s_n \circ s_{n+1} \to^* \mathbf{C}^{n-1}_{s_{n+1}}(s_1 \circ s_{n+1})$

c. $s_1 \circ s_{n+1} \to^+ \mathbf{D}_{s_{n+1}}(s_{n+1} \circ s_{n+2})$

d. $s_n \circ s_{n+1} \to^+ \mathbf{C}^{n-1}_{s_{n+1}}(\mathbf{D}_{s_{n+1}}(s_{n+1} \circ s_{n+2}))$

e. $s_1 \circ s_1 \to^+ \mathbf{D}_{s_1}(s_1 \circ s_2)$

Corollaire 5.5 *Il existe un $\lambda\sigma$-calcul infini de* $(s_1 \circ s_1)$.

Le λ-terme

Soit M le λ-terme clos et simplement typé:

$$\lambda v.(\lambda x.(\lambda y.y)((\lambda z.z)x))((\lambda w.w)v)$$

Sa traduction dans la notation de De Brujn donne:

$$\lambda(\ (\lambda(\lambda\mathbf{1})((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}))\ ((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1})\ )$$

Nous allons montrer que le $\lambda\sigma$-calcul de M peut ne pas terminer. Cependant, de nombreuses $\lambda\sigma$-réductions conduisent M jusqu'à sa forme normale. Par exemple:

$$\begin{array}{ll}
\lambda(\ (\lambda(\lambda\mathbf{1})((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}))\ ((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1})\ ) & \\
\to^2 \lambda(\ (\lambda(\lambda\mathbf{1})(\mathbf{1}[\mathbf{1}\cdot id]))\ (\mathbf{1}[\mathbf{1}\cdot id])\ ) & Beta + Beta \\
\to^2 \lambda(\ (\lambda((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}))\ \mathbf{1}\ ) & VarCons + VarCons \\
\to \lambda(\ (\lambda(\mathbf{1}[\mathbf{1}\cdot id]))\ \mathbf{1}\ ) & Beta \\
\to \lambda(\ (\lambda\mathbf{1})\ \mathbf{1}\ ) & VarCons \\
\to \lambda(\ \mathbf{1}[\mathbf{1}\cdot id]\ ) & Beta \\
\to \lambda\mathbf{1} & Varcons
\end{array}$$

Lemme 5.6 *Choisissons $a = \mathbf{1}$ et $b = \mathbf{1}$ pour les $\lambda\sigma$-termes a et b de la définition 5.1. La substitution s_1 vaut alors $(\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}\cdot id$ et*

$$\lambda((\lambda(\lambda\mathbf{1})((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}))((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1})) \to^* \lambda(\mathbf{1}[s_1 \circ s_1])$$

Démonstration:

$$\begin{array}{ll}
\lambda((\lambda(\lambda\mathbf{1})((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}))((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1})) & \\
\to \lambda((\lambda(\mathbf{1}[(\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}\cdot id]))((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1})) & Beta \\
\to \lambda(\mathbf{1}[s_1][(\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}\cdot id]) & Beta \\
\to \lambda(\mathbf{1}[s_1 \circ s_1]) & Clos
\end{array}$$

□

Nous avons donc démontré:

Théorème 5.1 *Le $\lambda\sigma$-calcul de M ne termine pas toujours.*

Démonstration: appliquer le corollaire 5.5 et le lemme 5.6.$\square$

On peut vérifier de manière similaire qu'il existe un $\lambda\sigma$-calcul infini de tout terme

$$\lambda v.(\lambda x.(\lambda y.C)((\lambda z.A)B))((\lambda w.A)B)$$

où A,B et C sont des λ-termes.

Il est bon de remarquer que les deux règles $VarId$ et IdL sont utilisées uniquement pour simplifier certaines expressions. Elles sont inutiles au contre-exemple. En fait, six règles seulement sont vraiment utilisées : *Beta*, *App*, *Abs*, $Clos$, Map et Ass.

5.1.4 Une traduction monoïdale

Nous avons eu l'idée une fois ce contre-exemple présenté en [Mel 95] de le donner sous une forme plus simple. En effet, la syntaxe du $\lambda\sigma$-calcul complique l'analyse de mécanismes de non terminaison qu'on retrouve dans leurs principes dans un calcul de monoïde.

Certains auteurs comme [DeB 72] et [Rev 85] ont proposé de simuler la β-réduction $(\lambda x.M)N \to M[N/x]$ en propageant le β-radical $(\lambda x.M)N$ à travers le λ-terme M. Les règles de propagation de la substitution $(\lambda x.-)N$ sont de la forme:

$$\begin{array}{ll}
(\lambda x.M_1M_2)N \to ((\lambda x.M_1)N)((\lambda x.M_2)N) & App \\
(\lambda x(\lambda y.M))N \to \lambda y.((\lambda x.M)N) \text{ si } x \neq y & Lambda \\
(\lambda x.x)N \to N & VarId \\
(\lambda x.y)N \to y & VarCons
\end{array}$$

On obtient de la sorte un calcul de substitution explicite élémentaire dont la syntaxe reste du λ-calcul. Malheureusement le calcul de substitution trop élémentaire ne termine pas fortement. Par exemple, on peut faire le calcul de substitution suivant:

$$\begin{array}{rcll}
(\lambda y.(\lambda x.M)P)Q & \to & ((\lambda y.(\lambda x.M))Q)((\lambda y.P)Q) & App \\
& \to & (\lambda x.((\lambda y.M)Q))((\lambda y.P)Q) & Lambda \\
& \to & \ldots &
\end{array}$$

Ici, la substitution $(\lambda y.-)Q$ est propagée en deux étapes *App* et *Lambda* à l'intérieur de la substitution $(\lambda x.-)P$. Nous décidons d'écrire $P[\![Q_x]\!]$ à la place de $(\lambda x.P)Q$, et d'interpréter les deux étapes de propagation *App* et *Lambda* en une seule étape de la forme:

$$M[\![P_x]\!][\![Q_y]\!] \to M[\![Q_y]\!][\![P_x[\![Q_y]\!]]\!]$$

Le calcul monoïdal nous libère de la formulation pénible et dissimulatrice de la syntaxe originale. Nous redonnons sous cette forme l'exemple de non terminaison du calcul de substitution:

$$M[\![P_x]\!][\![Q_y]\!] \to M[\![Q_y]\!][\![P_x[\![Q_y]\!]]\!] \to M[\![P_x[\![Q_y]\!]]\!][\![Q_y[\![P_x[\![Q_y]\!]]\!]]\!] \to \ldots$$

L'introduction d'un symbole supplḿentaire $[-]$ permet de rétablir dans le $\lambda\sigma$-calcul la terminaison forte du calcul de substitution, le σ-calcul.

Nous redonnons sous une forme monoïdale notre contre-exemple à la normalisation forte du $\lambda\sigma$-calcul simplement typé. Si on écrit $a[\![b]\!] = (\lambda a)b$, les règles de propagation se traduisent sous une forme très simplifiée[1] en:

$$\begin{array}{rcll}
a[\![b]\!][c] & \to & a[c][\![b[c]]\!] & App + Lambda \\
a[b][c] & \to & a[b[c]] & Clos + Map
\end{array}$$

[1]Nous oublions les symboles parasites comme $\uparrow$ et *id* pour nous concentrer sur l'aspect dynamique du contre-exemple.

La règle *Beta* devient élémentaire:

$$a[\![b]\!] \to a[b] \quad Beta$$

Nous définissons les "$\lambda\sigma$-termes" suivant:

$$\left.\begin{array}{l} a^n[b] = a[...[a[b]]...] \\ a^n[\![b]\!] = a[...[a[\![b]\!]]...] \end{array}\right\} \text{avec } n \text{ niveaux de parenthésage.}$$

On retrouve l'exemple de non terminaison sous une forme schématisée:

$$\begin{array}{llll} a[\![a]\!][a^n[\![a]\!]] & \to & a[a^n[\![a]\!]][\![a[a^n[\![a]\!]]]\!] & App + Lambda \\ & = & a[a^n[\![a]\!]][\![a^{n+1}[\![a]\!]]\!] & \\ & \to & a[a^n[\![a]\!]][a^{n+1}[\![a]\!]] & Beta \\ & \to & a[a^n[\![a]\!][a^{n+1}[\![a]\!]]] & Clos + Map \\ & \to^k & a[a^k[a^{n-k}[\![a]\!][a^{n+1}[\![a]\!]]]] & Clos + Map \\ & \to^{n-k-1} & a[a^{n-1}[a[\![a]\!][a^{n+1}[\![a]\!]]]] & Clos + Map \end{array}$$

5.1.5 Conclusion

Nous avons donné l'exemple d'un λ-terme simplement typé dont le calcul au sein du $\lambda\sigma$-calcul ne termine pas toujours. A notre connaissance l'exemple ne peut être évité dans aucun système avec substitutions explicites et composition.

Le $\lambda\sigma$-calcul a été inventé pour décrire et mieux comprendre les implémentations en machine du λ-calcul. Parce qu'il a été une surprise, notre exemple montre l'écart qui existe entre la perception superficielle d'un calcul et son comportement syntaxique véritable. Cet écart justifie la théorie des substitutions explicites et sa volonté d'approfondir l'analyse syntaxique des implémentations existantes du λ-calcul.

De nouvelles techniques devront être étudiées pour éviter les interactions cycliques entre la *Beta*-règle et les σ-règles. Les calculs sans composition normalisent fortement sur les termes typés, voir [BBLR 95], ils peuvent même être confluents sur les termes ouverts, voir [Mun 95]; mais plus de puissance sur les substitutions est souvent utile, au moins pour la confluence dans un calcul fort, voir [HaLé 92], pour l'unification d'ordre supérieur, voir [DHK 95], et pour décrire les optimisations proposées par certaines machines à environnement [HMP 96]. Nous voyons en la constitution d'un calcul avec composition des substitutions, confluence sur les termes ouverts et normalisation forte sur les termes typés l'objectif théorique et technique le plus naturel. Nous sommes convaincu que si un tel calcul existe, sa construction passe par une meilleure compréhension des mécanismes monoïdaux vus en section 5.1.4.

5.2 Des stratégies externes pour les calculs non orthogonaux

Cette section est divisée comme suit. Nous montrons à la façon de Huet et Lévy [HL 79] que la stratégie externe normalise pour un système orthogonal qui vérifie les axiomes de standardisation. Nous généralisons ensuite l'idée de stratégie externe au cas non-orthogonal. Cette extension n'est pas élémentaire, elle nécessite l'emploi de *dérivations externes atomiques* qui remplacent les radicaux externes comme pas de réécriture. Nous définissons une classe particulière de calculs "ω-déterministes" pour lesquels le résultat de normalisation se généralise. Nous démontrerons en section 5.3 que le $\lambda\sigma$-calcul est $\omega-$déterministe et que pour cette raison les stratégies externes du $\lambda\sigma$-calcul normalisent.

5.2.1 Le cas orthogonal: Huet et Lévy

Nous commencerons par adapter la notion de radical externe proposée par Maranget [Mar 92] de telle manière qu'elle se généralise plus tard aux systèmes non-orthogonaux. Nous supposons que le système $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ est un système axiomatique orthogonal $(\mathcal{D}, \mathsf{R})$ qui vérifie les axiomes de standardisation.

Définition 5.7 *On dit qu'un radical r est externe si et seulement si on peut l'extraire de toute dérivation d qui le contient: $r \sqsubseteq d \Longrightarrow r \lhd d$.*

Nous rappelons que $r \sqsubseteq d$ signifie qu'il existe une dérivation d' telle que $r \cdot d' \equiv d$, c'est-à-dire $r \cdot d'$ et d sont équivalentes par permutation. De son côté, la relation $r \lhd d$ signifie qu'il existe une dérivation d' telle que $r \cdot d' \trianglelefteq d$, c'est-à-dire $r \cdot d'$ est plus standard que d.

Nous comparons notre définition de radical externe avec la définition de l'ensemble $\mathsf{Ext}\ e$. vue en section 4.4 Un radical r appartient à l'ensemble $\mathsf{Ext}\ e$ lorsque $r \lhd f$ pour toute dérivation f équivalente à e par permutation. Cette condition équivaut à la suivante:

$$\text{pour toute dérivation } d\text{, la relation } r \sqsubseteq d \sqsubseteq e \text{ implique } r \lhd d$$

Appartenir à $\mathsf{Ext}\ e$ indique le caractère externe d'un radical, *relativement* à la dérivation e. En particulier, un radical externe r tel que $r \sqsubseteq e$ appartient à l'ensemble $\mathsf{Ext}\ e$. Et réciproquement, un radical r est externe lorsque pour toute dérivation e, $r \sqsubseteq e$ implique $r \in \mathsf{Ext}\ e$.

Les termes d'un système abstrait ne contiennent pas nécessairement de radical externe, par exemple lorsque des radicaux coinitiaux x_i forment une chaîne infinie $(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ de radicaux emboîtés:

$$\forall i, x_i \mathsf{R}_+ x_{i+1}$$

Néanmoins, il existe un radical externe dans deux situations courantes:

Lemme 5.8 (deux cas d'existence d'un radical externe)

- *tout terme normalisable (non normal) contient un radical externe.*
- *soit un terme a dont l'ensemble des radicaux $\mathcal{R}_a$ admet un ensemble complet fini de minorants. Alors a contient un radical externe.*

Démonstration:

- Supposons que a est normalisable. Soit d une dérivation qui le normalise et r un radical de $\mathsf{Ext}\ d$. Nous montrons que r est externe. En effet, soit f une dérivation qui le contienne: $r \sqsubseteq f$. La dérivation f peut être prolongée par $g \propto d[\![f]\!]$ en une dérivation normalisante $f \cdot g$ équivalente $\equiv$ à d. Le radical r peut donc être extrait de $f \cdot g$, et donc de f puisque f le contient $\sqsubseteq$. Et donc $r \lhd f$. Le radical r est bien externe.
- soit $\mathcal{R}_a$ l'ensemble des radicaux de a, et U un ensemble fini de radicaux tel que $\forall r \in \mathcal{R}_a, \exists u \in U, u \leq r$. Supposons qu'aucun radical de U n'est externe. Il existe pour tout $u \in U$ une dérivation d_u telle que $u \sqsubseteq d_u$ et $\neg(u \lhd d_u)$. On peut construire l'union $\sqcup$ des dérivations d_u pour $u \in U$ parce que U est fini. Cette union $\sqcup$ est associative et commutative d'après les lemmes 2.33 et 2.34. On construit ainsi une dérivation d telle que pour tout $u \in U$ il existe une dérivation d'_u telle que $d \equiv d_u \cdot d'_u$. On en déduit que $u \notin \mathsf{Ext}\ d$ puisque $u \not\lhd d_u \cdot d'_u$. La propriété est vraie de tous les radicaux de U. Il existe pour tout radical $r \in \mathsf{Ext}\ d$ un radical $u \in U$ tel que $r \mathsf{R}_+ u$. Il existe une dérivation standard de d

qui réduit ce radical r en premier. Le lemme 4.61 établit que u traverse cette dérivation et donc toutes les dérivations équivalentes $\equiv$ à d, ce qui contredit notre construction de d. Il existe donc un radical dans $\mathcal{R}_a$ tel qu'il soit externe.

□

Un radical externe $r : a \to b$ est extractible de toute dérivation d qui le contient au sens de $\sqsubseteq$. Il apparait donc dans toute dérivation qui normalise le terme a. Une stratégie pour normaliser doit donc réduire à un moment de son calcul un résidu de r. Pour cette raison les stratégies qui réduisent un radical externe à chaque étape calculent judicieusement. On a l'espoir qu'elles atteignent la forme normale d'un terme s'il y en a une.

Définition 5.9 *Une stratégie $\mathcal{S}$ est externe lorsque pour tout terme non normal a la dérivation $\mathcal{S}(a)$ est un radical externe. Une stratégie $\mathcal{S}$ normalise le terme a lorsqu'elle construit une dérivation $\mathcal{S}^+(a)$ normalisante. Une stratégie normalise lorsqu'elle normalise tous les termes normalisables.*

Nous démontrons le théorème de normalisation à la manière de Huet et Lévy [HL 79].

Théorème 5.2 (normalisation des stratégies externes) *Dans un système axiomatique orthogonal qui vérifie les axiomes de standardisation (axiomes A, B, C, D, FD+, PERM+ et critères 1 à 7): Toute stratégie externe normalise.*

Démonstration: Soit un terme a qui a une forme normale c. Deux dérivations d et e qui normalisent a sont équivalentes par permutation. Nous associons au terme a la longueur de leur dérivation standard commune, longueur que nous notons $< a >$. Soit $\mathcal{S}$ une stratégie externe avec $r = \mathcal{S}(a)$ et $a \xrightarrow{r} b$. Soit d une dérivation standard normalisante à partir de a. Le radical r est inclus $\sqsubseteq$ dans d et peut donc en être extrait par permutations carrées. On obtient $e \propto d[\![r]\!]$ avec $r \cdot e \diamond d$. La dérivation e est standard et normalisante à partir de b. Sa longueur est strictement plus petite que celle de d, ce qui démontre que $< b >$ est strictement plus petit que $< b >$. On conclut que la stratégie $\mathcal{S}$ normalise. □

Corollaire 5.10 *La stratégie externe normalise dans les systèmes syntaxiques orthogonaux qui vérifient nos axiomes de standardisation, comme par exemple le λ-calcul et plus généralement les systèmes à réduction combinatoire orthogonaux.*

5.2.2 Le cas non-orthogonal: ω-déterminisme

Le sous-espace des dérivations externes

Nous considérons un système axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ qui vérifie les axiomes de standardisation. Nous commençons par donner une définition de dérivation externe qui s'applique au cadre non-orthogonal:

Définition 5.11 (dérivation externe) *une dérivation d est externe si on peut l'extraire de toute dérivation qui la contient $\sqsubseteq$: pour toute e, $(d \sqsubseteq e \Longrightarrow d \triangleleft e)$,*

Schématiquement, une dérivation est externe quand pour toute dérivation e:

s'il existe e' telle que $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr, bend left, "e"] \arrow[dr, "d"'] & \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "e'"'] & \end{tikzcd}$ alors il existe d' telle que $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr, bend left, "e"] \arrow[dr, "d"'] & \arrow[d, phantom, "\trianglelefteq"] & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "d'"'] & \end{tikzcd}$.

Autrement dit, une dérivation d est externe si lorsqu'on la ramène en début d'une dérivation e par permutation de radical on peut aussi et toujours la ramener au début de e par permutations carrées ou standardisantes. Pour une autre définition, voir en section 5.4.1.

Les dérivations externes ont la propriété de se composer entre elles, ce que ne vérifient pas les dérivations standards. Cette propriété est importante: elle permet de considérer l'ensemble des dérivations externes comme une sous-catégorie de la catégorie libre des dérivations, et constitue un préliminaire indispensable à la construction de stratégies externes efficaces.

Lemme 5.12 (lemme de composition) *Soient deux dérivations externes d et e telles que $\partial_1 d = \partial_0 e$. Alors $d \cdot e$ est externe.*

Démonstration: on se place dans les hypothèses du lemme. Nous utilisons le lemme 4.58 de simplification. Si $d \cdot e \sqsubseteq f$ alors il existe une dérivation e' telle que $d \cdot e \cdot e' \equiv f$. En particulier, $d \sqsubseteq f$ et donc $d \triangleleft f$ parce que d est externe. Il existe une dérivation d' telle que $d \cdot d' \trianglelefteq f$, et en particulier $d \cdot d' \equiv f$. Le lemme 4.58 de simplification assure que $e \cdot e' \equiv d'$, et donc que $e \sqsubseteq d'$. Parce que e est externe, il existe une dérivation e'' telle que $e \cdot e'' \trianglelefteq d'$. On a pour finir $d \cdot (e \cdot e'') \trianglelefteq d \cdot d' \trianglelefteq f$. La dérivation $d \cdot e$ est donc externe. □

Les dérivations externes vérifient deux propriétés remarquables de décomposition:

Lemme 5.13 (lemme de décomposition à droite) *Soit $d \cdot e$ une dérivation externe. Alors e est externe.*

Démonstration: supposons que $d \cdot e$ est externe. Soit une dérivation f telle que $e \sqsubseteq f$. Alors $d \cdot e \sqsubseteq d \cdot f$. Soit $(d \cdot f)_{std}$ une dérivation standard de $d \cdot f$. Alors $d \cdot e \sqsubseteq (d \cdot f)_{std}$ et donc $d \cdot e \triangleleft (d \cdot f)_{std}$ parce que $d \cdot e$ est externe. Il existe donc une dérivation e' telle que $d \cdot e \cdot e' \Diamond (d \cdot f)_s td$, et $(d \cdot f)_s td \equiv d \cdot f$. La dérivation $e \cdot e'$ est standard et $d \cdot (e \cdot e') \equiv d \cdot f$. Le lemme 4.58 de simplification établit que $e \cdot e' \equiv f$, et le théorème 4.5 de standardisation que $e \cdot e'$ est standard et donc plus standard que f: $e \cdot e' \trianglelefteq f$. La dérivation e peut donc être extraite de f, ce qui établit que e est une dérivation externe. □

Lemme 5.14 (lemme de décomposition à gauche) *Soit $d \cdot e$ une dérivation externe. La dérivation d est externe dans le cas où pour toute dérivation f:*

$$d \sqsubseteq f \Longrightarrow \exists g,\ d \cdot e \sqsubseteq f \cdot g$$

Démonstration: nous reprenons les hypothèses du lemme. Soit une dérivation f qui contient d: $d \sqsubseteq f$. Il existe une dérivation g telle que $d \cdot e \sqsubseteq f \cdot g$. Soit $(f \cdot g)_{std}$ une dérivation standard de $f \cdot g$. La dérivation $d \cdot e$ est externe et $d \cdot e \sqsubseteq (f \cdot g)_{std}$, elle peut être extraite de $(f \cdot g)_{std}$: $d \cdot e \triangleleft (f \cdot g)_{std}$. La dérivation d peut donc être extraite de $(f \cdot g)_{std}$: $d \triangleleft (f \cdot g)_{std}$. De plus, d est inclus dans f: $d \sqsubseteq f$. On retrouve les conditions du lemme 4.62 de l'extraction précisée, qui nous dit que d peut être extrait de f: $d \triangleleft f$. La propriété est vraie de toutes les dérivations f qui contiennent d: la dérivation d est externe. □

Ces deux lemmes de décomposition permettent de mieux comprendre la situation des systèmes orthogonaux dans notre théorie des dérivations externes. L'hypothèse du lemme 5.14

est dans ce cas toujours vérifié: si $d \sqsubseteq f$ alors $d \cdot e \sqsubseteq f \cdot g$ pour $g \propto (d \cdot e)[f]$. Chaque dérivation externe peut donc être décomposée à droite et à gauche en dérivations externes: une dérivation externe ne réduit ainsi que des radicaux externes. La définition traditionnelle de stratégie normale reprend la propriété et institue l'illusion que le radical externe est une notion indispensable.

En général, la propriété de décomposition à gauche n'est pas vérifiée par les systèmes non orthogonaux. Le lemme 5.13 ne permet que de décomposer à droite. Nous adaptons l'exemple de Gustave [Ber 79] à la manière de Gérard Boudol [Bou 85]. Soit le terme $F(\Omega, \Omega, \Omega)$ dans le système du premier ordre suivant:

$$\begin{array}{ccc} F(A, B, x) \to C & F(x, A, B) \to C & F(B, x, A) \to C \\ \Omega \to A & \Omega \to B & \end{array}$$

Soit u le radical défini par $F(\Omega, \Omega, \Omega) \xrightarrow{u} F(A, \Omega, \Omega)$. Nous montrons qu'il n'est pas externe. Il est contenu $\sqsubseteq$ par la dérivation d suivante:

$$d : F(\Omega, \Omega, \Omega) \xrightarrow{u} F(A, \Omega, \Omega) \to F(A, A, \Omega) \to F(A, A, B) \to C$$

En trois permutations, on standardise cette dérivation d en une dérivation e qui lui est équivalente $\equiv$:

$$e : \ F(\Omega, \Omega, \Omega) \to F(\Omega, A, \Omega) \to F(\Omega, A, B) \to C$$

mais dont le radical u ne peut pas être extrait: $u \sqsubseteq e$ mais $\neg(u \lhd e)$. On montre de la même manière qu'aucun radical de $F(\Omega, \Omega, \Omega)$ n'est externe.

Il existe pourtant une dérivation externe à partir du $F(\Omega, \Omega, \Omega)$: le lemme 5.15 démontre que la dérivation e est externe parce qu'à la fois normalisante et standard.

Lemme 5.15 (un exemple de dérivation externe) *Toute dérivation d standard et normalisante est externe.*

Démonstration: soit d une dérivation standard et normalisante. Toute dérivation f qui vérifie $d \sqsubseteq f$ peut être réorganisée par permutation en une dérivation $d \cdot d'$. La dérivation d' est obligatoirement vide parce que $\partial_1 d$ est en forme normale. On conclut que $d \equiv f$ et donc $d \trianglelefteq f$ d'après le théorème 4.5 de standardisation. Parce que $d \lhd f$, la dérivation d est externe. $\square$

La construction de dérivation externe ne peut donc plus être réduite à la composition de radicaux externes. La définition 5.9 de stratégie externe doit être adaptée à un environnement plus exigeant. Il faut pour cela changer d'optique, choisir le point de vue des dérivations contre celui des radicaux. Le radical externe est une dérivation qui ne contient $\sqsubseteq$ aucune autre dérivation externe que lui-même et l'identité. Nous proposons de remplacer la notion de radical externe par cette définition. Une dérivation externe *atomique* est une dérivation externe minimale au sens où elle ne contient $\sqsubseteq$ aucune dérivation externe autre qu'elle-même et l'identité. On retrouve les radicaux externes dans le cadre orthogonal, vu comme un cas particulier des systèmes non orthogonaux. Nous adaptons la définition 5.9: la stratégie externe réduit à chaque étape une dérivation externe atomique.

Définition 5.16 (dérivation externe atomique, stratégie externe)

- *une dérivation externe est atomique si elle n'est pas vide et ne contient $\sqsubseteq$ aucune dérivation externe hormis l'identité et elle-même.*

- *une stratégie $\mathcal{S}$ est externe si et seulement si la dérivation $\mathcal{S}(a)$ est externe et atomique et non vide pour tout terme a.*

Une dérivation externe ne contient $\sqsubseteq$ pas nécessairement de radical externe, comme l'a démontré l'exemple de $F(A, A)$. Nous montrons qu'une dérivation externe contient par contre une dérivation externe atomique. Toute dérivation externe est donc composée de dérivations externes atomiques qu'elle réduit l'une après l'autre. La dérivation externe atomique remplace donc le radical externe sans impliquer de différences structurelles notables.

Lemme 5.17 *Toute dérivation externe d contient $\sqsubseteq$ une dérivation externe atomique.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. Soit d une dérivation externe: elle est standard puisqu'elle contient $\sqsubseteq$ sa dérivation standard d', et donc $d \lhd d'$. La dérivation d est soit atomique, soit elle contient $\sqsubseteq$ une dérivation e externe différente de l'identité. Puisque e est externe elle aussi, on a $e \lhd d$, et la longueur de e est donc plus petite que celle de d. Elle contient par hypothèse de récurrence une dérivation f externe atomique: $f \sqsubseteq e$. Donc $f \sqsubseteq d$. □

Corollaire 5.18 (existence d'une dérivation externe atomique) *Soit un terme normalisable a. Il existe une dérivation externe atomique à partir de a, ou a est en forme normale.*

Démonstration: il existe une dérivation externe non vide à partir de a normalisable d'après le lemme 5.15. La dérivation externe atomique que d contient d'après le lemme 5.17 réduit à partir de a, ce qui prouve notre corollaire. □

Corollaire 5.19 *Toute dérivation d externe peut s'écrire comme la composition de dérivation externes atomiques d_i:*

$$d = d_1 \cdots d_n$$

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. Soit d une dérivation externe. Il existe une dérivation d_1 externe atomique et d' une dérivation telles que $d = d_1 \cdot d'$. La dérivation d' est externe d'après le lemme 5.13 de décomposition à droite, ce qui permet de relancer l'récurrence. □

Théorème de correspondance

Nous reprenons le théorème 5.2 de normalisation dans le cadre élargi des systèmes non orthogonaux. Cette sortie hors du domaine orthogonal permet d'établir un rapport entre normalisation et ω-déterminisme. La preuve en est élémentaire, mais beaucoup de concepts sont nouveaux et doivent être bien mis en place.

Définition 5.20 (choix localement borné) *On dit que le choix externe sous a est localement borné lorsque pour tout $a \overset{d}{\twoheadrightarrow} b$ le nombre de dérivations externes atomiques au départ de b est fini.*

Définition 5.21 (ensemble cofinal, ensemble normalisant)

- *un ensemble $\mathcal{F}$ de dérivations est cofinal à partir de a si et seulement si il existe pour toute dérivation $d \in \mathcal{D}_a$ une dérivation $f \in \mathcal{F}$ tel que $d \sqsubseteq f$.*

- *un ensemble $\mathcal{F}$ de dérivations est normalisant si toutes les dérivations qu'il contient sont normalisantes.*

Définition 5.22 *Soit un terme a et une stratégie $\mathcal{S}$. On définit la dérivation $\mathcal{S}_n(a)$ par:*

- $\mathcal{S}_0(a) = id_a$,
- $\mathcal{S}_{n+1}(a) = \mathcal{S}_n(a) \cdot \mathcal{S}(b)$ *si* $a \overset{\mathcal{S}_n(a)}{\twoheadrightarrow} b$ *et b n'est pas en forme normale,*
- $\mathcal{S}_{n+1}(a) = \mathcal{S}_n(a)$ *si* $a \overset{\mathcal{S}_n(a)}{\twoheadrightarrow} b$ *et b est en forme normale.*

Nous donnons l'exemple du terme A dans le système défini par les deux règles:

$$\begin{array}{c} A \to A \\ A \to B \end{array}$$

La stratégie externe peut boucler sur A, et ne jamais le réduire en B. La non normalisation provient ici du nombre *infini* de classes $\equiv$ normalisantes à partir de A: chaque dérivation

$$A \to ... \to A \to B$$

définit une classe $\equiv$ de permutation ; l'ensemble de ces dérivation est cofinal et normalisant à partir de A, mais infini. Le théorème 5.3 de correspondance déduit la normalisation des stratégies externes de l'existence d'un ensemble *fini* cofinal et normalisant de dérivations.

Théorème 5.3 (théorème de correspondance)
Soit un système axiomatique qui vérifie les axiomes de standardisation, tel que tout terme contient une dérivation externe non vide. Les deux propositions suivantes sont alors équivalentes:

(1) Le terme a vérifie que toute stratégie externe normalise a, et que le choix externe sous a est localement borné.

(2) Il existe un ensemble $\mathcal{F}$ fini cofinal et normalisant à partir de a.

Démonstration:
(1) $\Longleftarrow$ (2): Soit $\mathcal{S}$ une stratégie externe. Supposons qu'il existe un ensemble $\mathcal{F}$ fini cofinal et normalisant à partir de a. Il existe pour tout n une dérivation f_n dans $\mathcal{F}$ qui contient $\sqsubseteq$ la dérivation $\mathcal{S}_n(a)$: $\mathcal{S}_n(a) \sqsubseteq f_n$. Parce que $\mathcal{F}$ est fini, il existe une dérivation f de $\mathcal{F}$ telle que $\forall n, \mathcal{S}_n(a) \sqsubseteq f$. La relation ne change pas pour une dérivation f_{std} standard de f: $\forall n, \mathcal{S}_n(a) \sqsubseteq f_{std}$. Chaque dérivation $\mathcal{S}_n(a)$ est composée de dérivations externes atomiques. Le lemme 5.12 de composition établit donc leur caractère externe. On peut toutes les extraire de f_{std} et obtenir: $\forall n, \mathcal{S}_n(a) \triangleleft f_{std}$. L'extraction ici ne peut se faire que par permutations carrées: la longueur de f majore donc la longueur de chacune des $\mathcal{S}_n(a)$. Cela oblige $\mathcal{S}_n(a)$ à valoir $\mathcal{S}_{n+1}(a)$ pour un certain entier n, ce qui entraîne vu leur définition 5.22 que $\mathcal{S}$ normalise a et $\mathcal{S}^+(a) \diamond f_{std}$, c'est-à-dire $\mathcal{S}^+(a) \equiv f$. La propriété est vraie de tout terme a: la stratégie externe $\mathcal{S}$ normalise donc.
Soit maintenant $a \overset{d}{\twoheadrightarrow} b$. Nous voulons montrer que b ne contient qu'un nombre fini (non nul) de dérivations externes atomiques. Les dérivations $f \in \mathcal{F}$ qui contiennent d par $\sqsubseteq$ constituent un sous-ensemble $\mathcal{F}_d$ non vide de $\mathcal{F}$. Il existe pour chacune de ces dérivations f une dérivation g_f telle que $f \equiv d \cdot g_f$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de ces g_f. L'ensemble $\mathcal{G}$ est lui-même fini et normalisant à partir de b. Montrons qu'il est aussi cofinal: toute dérivation d' à partir de b peut être complétée en une dérivation $d \cdot d'$ à partir de a. Il existe donc une dérivation f dans $\mathcal{F}$ telle que $d \cdot d' \sqsubseteq f$. De ce fait, $d \sqsubseteq f$ et donc f qui se trouve dans $\mathcal{F}_d$ s'écrit $f \equiv d \cdot g_f$ pour $g_f \in \mathcal{G}$. On obtient

$d \cdot d' \sqsubseteq f$ et $f \equiv d \cdot g_f$. Nous utilisons le lemme 4.58 de simplification et déduisons que $d' \sqsubseteq g_f$: l'ensemble $\mathcal{G}$ est bien cofinal à partir de b. Toute dérivation externe atomique que contient b est donc inclus $\sqsubseteq$ dans un élément de $\mathcal{G}$. Chaque dérivation g de $\mathcal{G}$ ne contient $\sqsubseteq$ qu'un nombre fini de dérivation δ externe atomique: chacune des δ peut en effet être prolongée en une dérivation $\delta \cdot \delta'$ qui se trouve dans la classe standard de g, classe $\diamond$ qui est finie d'après le lemme 4.56. Le nombre total de dérivations externes atomiques que contient b est donc fini. Il n'est de plus jamais nul puisque $\mathcal{G}$ n'est pas vide et donc b est normalisable, ce qui d'après le corollaire 5.18 implique l'existence d'une dérivation externe atomique au départ de b. Le choix (externe) est donc localement borné sous a.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Ce sens est plus dur à prouver. Supposons que la stratégie externe normalise un terme a sous lequel le choix externe est localement borné. Nous montrons qu'il existe une stratégie $\mathcal{S}_d$ pour chaque dérivation d qui normalise a telle que la dérivation $\mathcal{S}_d^+(a)$ est équivalente $\equiv$ à d. Soit une dérivation d normalisante et standard. Elle est externe d'après le lemme 5.15, et est donc composée d'après le corollaire 5.19 d'une succession de dérivations d_i externes atomiques: $d = d_1 \cdots d_n$. Nous montrons qu'il existe une stratégie $\mathcal{S}$ qui propose effectivement cette succession. Il faut montrer pour cela que les d_i ont des termes de départs $a_i = \partial_0 d_i$ tous différents. On pourra alors définir la stratégie $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}(a_i) = d_i$ pour $1 \leq i < n$, ce qu'on complètera par $\mathcal{S}(b) = d_b$ pour les termes b non normaux et différents des a_i, d_b une dérivation externe atomique à partir de b.
On utilise la normalisation des stratégies externes sur a pour démontrer ce résultat. Supposons que $a_p = a_q$ pour $p < q$. On choisit alors q minimal: $a_i \neq a_j$ si $i < j$ et $j < q$. La dérivation d fait une "boucle" B qui réduit successivement les $l = q - p$ dérivations d_p, ... , d_{q-1}: $B = d_p \cdots d_{q-1}$. Nous en profitons pour construire une stratégie $\mathcal{S}'$ externe qui ne normalise pas a. Il suffit pour cela de définir $\mathcal{S}'(a_i) = d_i$ pour $i < q$. On peut alors décrire les dérivation $\mathcal{S}'_i(a)$ comme:

- $\mathcal{S}'_{p+i}(a) = d_1 \cdots d_{p-1} \cdot d_p \cdots d_{p+i}$ pour $i < l$,
- $\mathcal{S}'_{p+(k \times l)+i}(a) = d_1 \cdots d_{p-1} \cdot (B \cdots B) \cdot d_p \cdots d_{p+i}$, pour $i < l$, où B est composé k fois.

La stratégie $\mathcal{S}'$ réduit donc la boucle B de manière répétitive: la stratégie $\mathcal{S}'$ ne normalise pas. Ce qui contredit nos hypothèses. Les termes a_i sont donc tous différents, ce qui permet de construire notre stratégie $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}^+(a) = d_1 \cdots d_n = d$.
Nous utilisons maintenant l'hypothèse du choix localement borné pour prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de dérivation proposée par les différentes stratégies externes à partir de a. Ces dérivations $\mathcal{S}^+(a)$ s'écrivent toutes $d_1 \cdots d_n$, où pour chaque terme $a_i = \partial_0 d_i$ le nombre de dérivation externe atomique est fini. On peut représenter cet ensemble par un arbre où chaque nœud: $(d_1 \cdots d_k)$ a un nombre fini de fils: $(d_1 \cdots d_k \cdot e)$, où e est une dérivation externe atomique à partir du terme a_{k+1}. Le lemme de König nous assure que le nombre total de nœud est fini, car sinon il y aurait une branche infinie, ce qu'on traduirait par la non-normalisation d'une des stratégies externes. $\square$

Corollaire 5.23 (normalisation des stratégies externes) *Toute stratégie externe normalise a s'il existe à partir de a un ensemble $\mathcal{F}$ fini cofinal et normalisant.*

Démonstration: s'il existe un ensemble $\mathcal{F}$ fini cofinal et normalisant à partir de a, alors tout terme b tel que a se réécrit en b par $a \overset{d}{\twoheadrightarrow} b$ contient une dérivation externe, la dérivation f telle que $d \cdot f \in \mathcal{F}$ — voir le lemme 5.13 ; le théorème 5.3 appliqué à l'espace des dérivations $\mathcal{D}_a$ au départ de a établit la normalisation des stratégies externes dans $\mathcal{D}_a$ — qui correspondent à celles de $\mathcal{D}$. $\square$

Définition 5.24 (ω-déterminisme) *Un système est ω-déterministe lorsqu'il existe à partir de tout terme normalisable un ensemble fini cofinal et normalisant.*

En corollaire immédiat, toutes les stratégies externes sont normalisantes dans un système ω-déterministe.

5.3 Le $\lambda\sigma$-calcul est ω-déterministe

Nous manquons en général d'outils pour traiter des questions de normalisation dans les systèmes non orthogonaux. Aucune loi n'y ordonne les différents calculs d'un terme. Au pire, certaines réductions le normalisent tandis que d'autres semblent en marquer le caractère fondamentalement non fini. Le travail sur le $\lambda\sigma$-calcul est particulier. Nous profitons des rapports sémantiques étroits qu'il entretient avec le λ-calcul. Hardin [Har 87] a montré comment projeter les dérivations du $\lambda\sigma$-calcul sur des dérivations du λ-calcul, selon une méthode d'interprétation. Nous voulons démontrer ici que la projection d'une dérivation externe du $\lambda\sigma$-calcul est une dérivation externe au sens du λ-calcul, quand les termes en question sont normalisables. Ce résultat d'adéquation nous permet de montrer à partir du lemme de König que le $\lambda\sigma$-calcul est ω-déterministe. On peut donc appliquer le théorème de correspondance et en déduire la normalisation des stratégies externes du $\lambda\sigma$-calcul.

La démonstration de l'adéquation est l'étape difficile pour démontrer que le $\lambda\sigma$-calcul est ω-déterministe. Les dérivations externes sont définies indépendamment dans le λ-calcul et le $\lambda\sigma$-calcul, leurs natures respectives rendent compte du comportement dynamique de deux calculs très différents: le λ-calcul réduit des β-radicaux et en effectue les instantiations en un pas, tandis qu'au contraire la dynamique du $\lambda\sigma$-calcul privilégie les jeux et mouvements des substitutions. Il serait donc naïf de vouloir démontrer immédiatement le résultat d'adéquation, certains mécanismes syntaxiques doivent être compris. N'oublions pas déjà certains comportements inattendus des substitutions explicites, comme ceux que notre exemple de non terminaison forte met en jeu en section 5.1. Une autre mise en garde: la nouveauté des dérivations externes dans le cadre non-orthogonal peut elle aussi apporter ses surprises. Nous donnons un exemple, pour a, b des $\lambda\sigma$-termes et s et t des substitutions:

$$d: \quad ((\lambda a)b)[s][t] \overset{Beta}{\to}_{\lambda\sigma} a[b\cdot id][s][t] \overset{Clos}{\to}_{\lambda\sigma} a[(b\cdot id)\circ s][t]$$

On peut montrer que la dérivation d est externe. Cependant, avec l'ordre d'emboîtement habituel, la réduction de $Beta$ seule n'est pas externe: elle est en effet contenue $\sqsubseteq$ dans la dérivation e suivante, sans pouvoir en être extraite:

$$e: \quad ((\lambda a)b)[s][t] \overset{Clos}{\to}_{\lambda\sigma} ((\lambda a)b)[s\circ t] \overset{Beta}{\to}_{\lambda\sigma} a[b\cdot id][s\circ t]$$

Il faut donc la réduction d'un radical $Clos$ qui neutralise la composition de s et t pour que $Beta$ initie une dérivation d externe. Le radical $Beta$ n'est pas externe, il est pourtant projeté par interprétation sur un β-radical externe au sens du λ-calcul. Nous avons ici l'exemple d'un écart entre les dynamiques du λ-calcul et du $\lambda\sigma$-calcul, écart que le résultat d'adéquation devra résoudre.

5.3.1 Adéquation dynamique

Nous introduisons d'abord la méthode d'interprétation développée par Thérèse Hardin en [Har 87].

Définition 5.25 (méthode d'interprétation, termes) *Soit a un $\lambda\sigma$-terme clos. On écrit $\sigma(a)$ le λ-terme obtenu par σ-normalisation de a.*

Définition 5.26 (méthode d'interprétation, dérivations) *Il existe une fonction $\sigma(\cdot)$ qui associe aux dérivations $d : a \twoheadrightarrow_{\lambda\sigma} b$ du $\lambda\sigma$-calcul une dérivation $\sigma(d) : \sigma(a) \twoheadrightarrow_{\lambda} \sigma(b)$ du λ-calcul et qui vérifie les propriétés (fonctorielles) suivantes:*

$$\sigma(d \cdot e) = \sigma(d) \cdot \sigma(e) \quad \sigma(id_a) = id_{\sigma(a)}$$

et $\sigma(d) = id_{\sigma(a)}$ si $d : a \twoheadrightarrow_{\lambda\sigma} b$ est une σ-dérivation.

Nous appelerons cette fonction "l'interprétation du $\lambda\sigma$-calcul dans le λ-calcul". Elle est décrite formellement dans [Har 87].

Nous étudierons le $\lambda\sigma$-calcul avec l'ordre $<_{\lambda\sigma}$ d'arbre syntaxique sur les $\lambda\sigma$-termes, un ordre qui vérifie les axiomes de standardisation.

L'objectif de cette section est de démontrer le lemme suivant:

Lemme 5.27 (adéquation dynamique) *Si d est une dérivation externe du $\lambda\sigma$-calcul alors $\sigma(d)$ est une dérivation externe du λ-calcul.*

Bien entendu, il existe des $Beta$-radicaux r non externes dans le $\lambda\sigma$-calcul dont la traduction $\sigma(r)$ est externe dans le λ-calcul. Par exemple:

$$(\lambda((\lambda\mathbf{1})\mathbf{1}))[\mathbf{1} \cdot id] \stackrel{r}{\rightarrow}_{\lambda\sigma} (\lambda(\mathbf{1}[\mathbf{1} \cdot id]))[\mathbf{1} \cdot id] \text{ et } (\lambda x(\lambda y.y)x) \stackrel{\sigma(r)}{\rightarrow}_{\lambda} \lambda x.x)$$

Ensembles expansifs et inévitables

Nous commençons par prouver deux lemmes abstraits sur les ensembles "expansifs" et "inévitables" que nous définissons à la suite. Les définitions de $\underset{\square}{\hookrightarrow}$ et de $\rightsquigarrow$ sont données en section 4.4.

Définition 5.28 (ensemble expansif de radicaux) *Un ensemble $\mathcal{N}$ de radicaux est expansif si:*

EXP1 si $u \rightsquigarrow v$ et $v \in \mathcal{N}$ alors $u \in \mathcal{N}$,

EXP2 si $u \overset{r}{\underset{\square}{\hookrightarrow}} v$ et $v \in \mathcal{N}$ alors $u \in \mathcal{N}$.

Définition 5.29 *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble expansif de radical. On dit que $\mathcal{N}$ est inévitable s'il contient tous les radicaux u tels que $\partial_1 u$ soit en forme normale.*

Lemme 5.30 (lemme des retrouvailles abstraites) *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble expansif de radicaux et $d = u_1 \cdots u_n$ une dérivation standard telle que $u_i \in \mathcal{N}$ pour un certain indice i entre 1 en n. Il existe alors un radical x de $\mathcal{N}$ qu'on peut extraire de d: $x \lhd d$.*

Démonstration: par une récurrence très simple sur la longueur de d. Supposons que $d = r \cdot d' = r \cdot u_1 \cdots u_n$ se trouve dans les hypothèses du lemme: si $r \in \mathcal{N}$ alors le résultat est acquis parce que $r \lhd d$; si $u_i \in \mathcal{N}$ alors il existe par hypothèse de récurrence un radical y tel que $y \lhd d'$: si $r \rightsquigarrow y$ alors $r \in \mathcal{N}$, sinon il existe un radical x tel que $x \overset{r}{\mapsto} y$, et donc $x \lhd d$ et $x \in \mathcal{N}$. Ce qui prouve le lemme par récurrence. $\square$

Lemme 5.31 (lemme de description des dérivations externes) *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble expansif et inévitable. Soit d une dérivation externe dont le terme d'arrivée est normalisable. Alors d réduit à chaque étape des radicaux de $\mathcal{N}$.*

Démonstration: supposons que d soit externe et $d \cdot f$ une dérivation normalisante. Soit $d = d_1 \cdot r \cdot d_2$. La dérivation $r \cdot d_2$ est externe d'après le lemme 5.13 de décomposition à droite. On peut donc standardiser $r \cdot d_2 \cdot f$ et obtenir une dérivation $r \cdot d_2 \cdot g$ standard. Soit h une dérivation obtenue par permutations carrées à partir de $r \cdot d_2 \cdot g$. Le lemme 4.43 de transitivité carrée démontre que $r \lhd^{||} h$. On peut écrire toute dérivation h sous la forme $h_1 \cdot r' \cdot h_2$ où $r \overset{h_1}{\underset{\square}{\mapsto}} r'$. Soit une dérivation h telle que la longueur de h_1 soit maximale dans la classe $\diamond$ de $r \cdot d_2 \cdot g$. Alors $h = h_1 \cdot r' \cdot h_2$ et $r \overset{h_1}{\underset{\square}{\mapsto}} r'$. Il faut que r' soit l'unique radical qu'on puisse extraire de h_2, sinon $r' \overset{u}{\underset{\square}{\mapsto}} r''$ et $h_2 \diamond (u \cdot h_2')$ contredirait notre choix de h parmi les dérivations équivalentes $\diamond$ à $r \cdot d_2 \cdot g$. Le dernier radical que réduit h_2 se trouve dans $\mathcal{N}$, ce qui force r' à se trouver lui aussi dans $\mathcal{N}$ d'après le lemme 5.30 de retrouvailles. Il faut donc que $r \in \mathcal{N}$ puisque $r \overset{h_1}{\mapsto} r'$. La dérivation d ne réduit donc que des radicaux de $\mathcal{N}$. $\square$

$\lambda\sigma$-épine et adéquation

Le lemme 5.31 de description ouvre le chemin pour démontrer le lemme d'adéquation dynamique. Nous montrons qu'il existe un ensemble Epine^+ expansif et inévitable de $\lambda\sigma$-radicaux dont l'interprétation dans le λ-calcul est un radical externe. Si d est une dérivation externe, elle réduit d'après le lemme 5.31 des *Beta*-radicaux dont l'interprétation est externe, ce qui démontrera le lemme d'adéquation dynamique.

La construction de l'ensemble Epine^+ est strictement syntaxique. La vérification des propriété EXP1 et EXP2 nécessite une bonne compréhension des réductions du $\lambda\sigma$-calcul.

Définition 5.32 (la $\lambda\sigma$-épine) • *on note* Epine *l'épine du $\lambda\sigma$-calcul, c'est-à-dire l'ensemble des occurrences (a, o) de la forme $(a, 1 \cdots 1)$, la racine (a, ϵ) de chaque terme étant comprise.*

- *une occurrence $(a, o) \in \mathsf{Epine}$ se trouve dans Epine_λ lorsque*

$$\forall o', o' <_{\lambda\sigma} o \Longrightarrow Symbol(o') = \lambda$$

- *une occurrence $(a, o) \in \mathsf{Epine}$ se trouve dans Epine^1 lorsque*

$$\forall o', o' <_{\lambda\sigma} o \Longrightarrow Symbol(o') \in \{App, [.]\} \text{ ou } o' \in \mathsf{Epine}_\lambda$$

- *un radical r se trouve dans Epine lorsque son occurrence de tête se trouve dans Epine.*

- *un radical r se trouve dans Epine^1 lorsque son occurrence de tête se trouve dans Epine^1.*

Premier résultat sur Epine^1:

Lemme 5.33 *L'ensemble Epine^1 est expansif.*

Démonstration: Supposons que $x \overset{r}{\underset{\square}{\mapsto}} y$: la réduction de r ne désorganise pas la structure d'occurrence au dessus de x. Donc ($x \in \mathsf{Epine}^1 \iff y \in \mathsf{Epine}^1$). Supposons que $x \rightsquigarrow y$ et $y \in \mathsf{Epine}^1$ pour démontrer la propriété EXP2. Deux cas se présentent:

- si il existe un radical u tel que $x <_{\lambda\sigma} u$ et $u[\![x]\!]y$. Le radical $y \in \mathsf{Epine}$ est sur l'épine de b pour $a \overset{x}{\to} b$. Seule la règle $VarCons$ permet de transformer par résidu un radical hors Epine en un radical de l'ensemble Epine; dans ce cas-là, $u \notin \mathsf{Epine}$ et le radical x est le radical $VarCons$ de Epine qui effectue le transfert: donc $x \in \mathsf{Epine}$. Nous écrivons la propriété importante:

$$\text{si } x[\![r]\!]y \text{ alors } y \in \mathsf{Epine} \Longrightarrow x \in \mathsf{Epine} \text{ ou } r \in \mathsf{Epine}$$

Sinon, $u \in \mathsf{Epine}$, et donc $x \in \mathsf{Epine}$ parce que $x <_{\lambda\sigma} u$. Supposons que le radical x ne se trouve pas dans Epine^1. Son occurrence de tête (a, o_x) ne se trouve pas non plus dans Epine^1. Les structures au dessus de l'occurrence (a, o_x) ne changent pas par réduction de x, et donc son résidu (b, o_x) ne se trouve pas dans Epine^1 mais contient (b, o_y), l'occurrence de tête de y. Cette occurrence (b, o_y) ne se trouve donc pas dans Epine^1, ce qui contredit notre hypothèse que $y \in \mathsf{Epine}^1$. Nous en déduisons que $x \in \mathsf{Epine}^1$. La propriété sous-jacente est ici:

$$\text{si } x[\![r]\!]y \text{ et } r \in \mathsf{Epine}, x \in \mathsf{Epine}, r <_{\lambda\sigma} x, \text{ alors } y \in \mathsf{Epine}^1 \Longrightarrow r \in \mathsf{Epine}^1$$

- deux nouveaux cas se présentent si x crèe y, suivant que l'occurrence de tête de x est plus courte ou plus longue que celle de y. Soit (o_x, a) l'occurrence de x et (o_y, b) celle de y. Nous devons comparer les symboles au dessus de (o_x, a) à ceux au dessus de (o_y, b). Rien n'a changé au dessus de (a, o_x) par réduction de x. Si o_x est plus courte ou de même longueur que o_y et que $(o_y, b) \in \mathsf{Epine}^1$, alors $(o_x, b) \in \mathsf{Epine}^1$ et pour cette raison $(o_x, a) \in \mathsf{Epine}^1$. Le radical x se trouve donc dans Epine^1. Autrement, nous devons passer en revue les moyens possibles de création tels que $(o_y, b) <_{\lambda\sigma} (o_x, b)$, qu'on appelle parfois "création vers le haut". Nous montrons qu'un seul symbole est alors utilisé: $o_x = o_y \cdot 1$, et que ce symbole est un nœud d'application ou de substitution. On peut en effet ranger les cas de création vers le haut en deux catégories:

  - $Lambda, VarCons$ font intervenir le symbole App au dessus de x, c'est-à-dire: $o_x = o_y \cdot 1$ et $Symbol(b, o_y) = App$. La radical y obtenu est alors un $Beta$-radical.
  - $Beta, App, Lambda, VarCons$ font intervenir le symbole $[\cdot]$ au dessus de x: $o_x = o_y \cdot 1$ et $Symbol(b, o_y) = [\cdot]$. Le radical y obtenu a pour règle $Clos$.

  Dans les deux cas, $(a, o_x) \in \mathsf{Epine}^1$, et donc $x \in \mathsf{Epine}^1$. En particulier, aucun mécanisme de création vers le haut ne fait intervenir le symbole λ, ce qui assure notre résultat.

□

Définition 5.34 *Les ensembles* Epine^n *d'occurrences* (a, o) *sont définis par récurrence à partir de* Epine^1*. L'occurrence* (a, o) *est dans* Epine^{n+1} *si et seulement si il existe* o' *et* o'' *tels que* $o = o' \cdot o''$ *et*

- $a = \lambda ... \lambda(A\ B\ C_1 ... C_k)$ *où:*
- o' *est l'occurrence de* B *dans* a,
- *le terme* A *ne peut pas être réécrit en un terme* λD,
- (o'', B) *est dans* Epine^n.

L'ensemble Epine^+ *est défini comme l'union des* Epine^n *pour* $n \in \mathbf{N}$.

Corollaire 5.35 *Les ensembles* Epine^n *sont expansifs.*

Démonstration: par récurrence sur n. Supposons que Epine^n est expansif et déduisons-en que Epine^{n+1} est expansif.

- si $x \overset{r}{\mapsto} y$ et $y \in \mathsf{Epine}^{n+1}$, soit $a \xrightarrow{r} b$, (a, o_x) l'occurrence de x et (b, o_y) l'occurrence de y. Il existe une occurrence (b, o') telle que $o_y = o' \cdot o''$ et
  - $b = \lambda ... \lambda(A\ B\ C_1 ... C_k)$
  - o' est l'occurrence de B dans b,
  - le $\lambda\sigma$-terme A ne peut pas être réécrit en un λD,
  - (o'', B) est dans Epine^n.

  La forme de a est identique à celle de b: $a = \lambda ... \lambda(A^-\ B^-\ C_1^- ... C_k^-)$ avec:

  - si le radical r réduit dans A^-, alors $A^- \xrightarrow{r'} A$, $B^- = B$ et $\forall i, C_i^- = C_i$ pour r' le radical d'occurrence (o'', A^-). Le terme A^- ne peut pas être réécrit en un terme λD à cause de la confluence; et l'occurrence (o'', B^-) se trouve dans Epine^n. Donc l'occurrence $(o' \cdot o'', a)$ se trouve dans Epine^{n+1},
  - si le radical r réduit un des C_i^-, alors $(o'', B^-) \in \mathsf{Epine}^n$ et $A^- = A$ ne peut pas être réduit sous la forme λD: $(o' \cdot o'', a) \in \mathsf{Epine}^{n+1}$,
  - si le radical r réduit dans B^-, alors $x' \overset{r'}{\mapsto} y'$ pour x' et y' les radicaux d'occurrence de tête (A, o''_x) et (A, o''_y), avec $o_x = o' \cdot o''_x$ et $o_y = o' \cdot o''_y$. On en déduit $x' \in \mathsf{Epine}^n$ par hypothèse de récurrence, et donc $x \in \mathsf{Epine}^{n+1}$.

- si $x \rightsquigarrow y$ et $y \in \mathsf{Epine}^{n+1}$, avec $a \xrightarrow{x} b$, (a, o_x) l'occurrence de x et (b, o_y) l'occurrence de y, alors b peut s'écrire $b = \lambda ... \lambda(A\ B\ C_1 ... C_k)$ où:
  - o' est l'occurrence de B dans b,
  - le $\lambda\sigma$-terme A ne peut pas être réécrit en un λD,
  - (o'', B) est dans Epine^n.

  On déduit que $x' \rightsquigarrow y'$ et $y' \in \mathsf{Epine}^n$ pour x' et y' les radicaux d'occurrence de tête (o''_x, B^-) et (o''_y, B), avec $o_x = o' \cdot o''_x$ et $o_y = o' \cdot o''_y$. On obtient $x' \in \mathsf{Epine}^n$ par hypothèse de récurrence, et donc $x \in \mathsf{Epine}^{n+1}$.

□

Lemme 5.36 *L'ensemble* Epine^+ *est expansif et inévitable.*

Démonstration: les ensembles Epine^n sont expansif: leur union Epine^+ est donc expansive. Nous montrons que Epine^+ est inévitable. Les radicaux u dont le terme final est en forme normale ont tous pour règle $VarId$ ou $VarCons$. Le $\lambda\sigma$-terme obtenu après leur réduction se trouve en forme normale, ce qui oblige le radical u à se trouver dans un des Epine^n. Donc $u \in \mathsf{Epine}^+$ si $\partial_1 u$ est en forme normale. □

Lemme 5.37 *L'interprétation dans le λ-calcul d'un Beta-radical de* Epine^+ *est un β-radical externe au sens de l'ordre d'arbre syntaxique (voir la section 2.7.2)*

Démonstration: nous pouvons considérer tout λ-terme M sous son écriture de de Bruijn comme un $\lambda\sigma$-terme qui ne contient pas de nœud $[\cdot]$. Nous définissons Epine_λ comme l'ensemble des occurrences (M, o) du λ-calcul qui se trouvent dans Epine^+. Par extension, nous dirons qu'un β-radical $r : M \rightarrow_\lambda P$ se trouve dans Epine^+_λ lorsque son occurrence (M, o) se trouve dans Epine^+_λ.

Soit a un $\lambda\sigma$-terme clos et $r : a \rightarrow_{\lambda\sigma} b$ un radical de Epine^+. Les définitions de Epine^+ et de l'interprétation σ assurent que le β-radical $\sigma(r) : \sigma(a) \rightarrow_\lambda \sigma(b)$ se trouve dans l'ensemble Epine^+_λ.

Il nous reste à montrer qu'un β-radical de Epine^+_λ est externe au sens de l'ordre d'arbre syntaxique. Tout d'abord, un radical u de Epine^+_λ n'est contenu par aucun β-radical. Ensuite, si u a pour résidu par un β-radical v le β-radical u', c'est-à-dire $u[\![v]\!]u'$, alors u' se trouve dans Epine^+_λ lui aussi. Ces deux propriétés montrent que tout radical u de Epine^+_λ est externe au sens de l'ordre d'arbre syntaxique λ-calcul. $\square$

Lemme 5.38 (Adéquation dynamique) *Si une dérivation d du $\lambda\sigma$-calcul est externe au sens de l'ordre d'arbre son interprétation $\sigma(d)$ dans le λ-calcul est externe au sens de l'ordre d'arbre.*

5.3.2 Démonstration du théorème de ω-déterminisme

Nous pouvons en déduire le résultat que nous escomptions en début de section:

Théorème 5.4 *Il n'existe d'un $\lambda\sigma$-terme clos à sa forme normale qu'un nombre fini de classes $\equiv$.*

Démonstration: nous utilisons le lemme de König. Supposons qu'il existe à partir de a un nombre infini de classes $\equiv$ à la forme normale. Chaque classe contient une dérivation standard, et donc externe, voir le lemme 5.15. Chacune de ces dérivations caractérise la classe $\equiv$ qui la contient: il en existe donc un nombre infini à partir de a. Soit $EN(a)$ l'ensemble des dérivations externes et normalisantes à partir de a: il est infini. Soit $\overline{EN}(a)$ l'ensemble des dérivations d que prolonge une dérivation $e \in EN(a)$: $e = d \cdot d'$. Cet ensemble est infini. Nous fabriquons un arbre: chaque dérivation $d \in \overline{EN}(a)$ en constitue un nœud, dont les fils sont les dérivations $d \cdot r$ de $\overline{EN}(a)$. Chaque terme ne contient qu'un nombre fini de radicaux: chaque nœud n'a qu'un nombre fini de fils. Le lemme de König établit l'existence d'une suite infinie de radicaux $u_1, ..., u_n, ...$ telle que $(u_1 \cdots u_n) \in \overline{EN}(a)$ pour tout n. Il existe donc pour chaque $u_1 \cdots u_n$ une dérivation f_n telle que $u_1 \cdots u_n \cdot f_n$ soit externe et normalisante. Ces dérivations $u_1 \cdots u_n \cdot f_n$ ont une propriété particulière: tous les radicaux qu'elles réduisent se trouvent dans Epine^+, d'après le lemme 5.31 et le lemme 5.36. Les radicaux u_i se trouvent donc dans Epine^+.

Nous savons que le σ-calcul est fortement normalisant: il existe donc parmi les u_i un nombre infini de *Beta*-radicaux. Leur projection est d'après le lemme 5.37 externe dans le λ-calcul. L'existence des u_i contredit donc la normalisation de la stratégie externe dans le λ-calcul. La faute en vient de nos hypothèses: il n'existe qu'un nombre fini de classes $\equiv$ d'un terme a à sa forme normale. $\square$

Nous pouvons déduire de la propriété de ω-déterminisme du $\lambda\sigma$-calcul que ses stratégies externes sont normalisantes, voir le théorème 5.3 et le corollaire 5.23.

5.4 Appendice

5.4.1 Une définition équivalente de dérivation externe

Lemme 5.39 (définition alternative)
Soit une dérivation d. Les deux propriété suivantes sont équivalentes:

a. *la dérivation d est externe*

b. *$d \cdot f$ est standard si et seulement si (f est standard et $\partial_0 f = \partial_1 d$)*

Démonstration:
($a \implies b$): le sens ($\implies$) est immédiat, si $d \cdot f$ est standard alors f est standard. Supposons pour prouver le sens ($\impliedby$) que d est externe et f standard avec $\partial_1 d = \partial_0 f$; si alors $e \trianglelefteq d \cdot f$ la dérivation e contient d: $d \sqsubseteq e$ et donc $d \triangleleft e$ — c'est -à-dire qu'il existe une dérivation d' telle que $d \cdot d' \trianglelefteq e$ — parce que d est externe. Ainsi, $d \cdot d' \trianglelefteq e \trianglelefteq d \cdot f$, avec $d' \equiv f$ par lemme 4.58 de simplification, puisque $d \cdot d' \equiv d \cdot f$; la dérivation f est standard, et donc $f \trianglelefteq d'$ d'après le théorème 4.5 de standardisation, ce qui donne pour finir $d \cdot f \trianglelefteq e$. La dérivation $d \cdot f$ est donc standard.
($b \implies a$): soit e une dérivation qui contient d: $d \sqsubseteq e$. Par définition, la dérivation e peut être réorganisée après permutations en une dérivation $d \cdot e'$. Soit f une dérivation standard de e'. Avec (a), $d \cdot f$ est standard et $e \equiv d \cdot e' \equiv d \cdot f$. D'apès le théorème 4.5 de standardisation cette dérivation $d \cdot f$ est minimale $\trianglelefteq$ dans la classe $\equiv$ de e: donc $d \cdot f \trianglelefteq e$: ainsi, la dérivation d peut être extraite de e: $d \triangleleft e$. Cette dérivation d est donc externe.

□

5.4.2 L'appel par nécessité

Nous introduisons la notion d'appel par nécessité pour généraliser la notion de stratégie externe.

Définition 5.40 (rencontre) *On dit qu'un radical u et une dérivation d se rencontrent lorsque $d = d_1 \cdot v \cdot d_2$ et $u[\![d_1]\!]u'$ avec $u' = v$ ou $u' \# v$.*

Définition 5.41 *On appelle radical nécessaire un radical qui rencontre toute dérivation coinitiale.*

Théorème 5.5 (Normalisation de l'appel par nécessité) *Avec le critère 8 de transitivité faible, toute stratégie par appel par nécessité est normalisante dans un système de réécriture ω-déterministe.*

Démonstration: soit un radical r nécessaire et d une dérivation standard telle que $r \sqsubseteq d$: alors $d[r]$ est standard d'après le corollaire 4.66. De plus, la longueur de $d[r]$ est strictement plus petite que celle de d parce que r est nécessaire et rencontre donc d à une étape au moins. Soit un terme a normalisable. Si $\mathcal{F}$ est un ensemble fini de dérivation, on peut appeler $||\mathcal{F}||$ le multi-ensemble des longueurs de leurs dérivations standards. Soit un terme a normalisable. Si $\mathcal{F}_a$ est un ensemble fini cofinal et normalisant et r un radical nécessaire de a alors le passage de a à b dans $a \xrightarrow{r} b$ permet de construire un ensemble $\mathcal{F}_b$ lui aussi fini cofinal et normalisant, mais à partir de b. Pour construire $\mathcal{F}_b$, on associe à chaque dérivation f_a de $\mathcal{F}_a$ qui contient $\sqsubseteq$ le radical r une dérivation f_b telle que $r \cdot f_b \equiv f_a$. L'ensemble $\mathcal{F}_b$ est la réunion de ces dérivations f_b. f_b est bien entendu finie et normalisant. On vérifie aussi que $\mathcal{F}_b$ est cofinale: si d désigne une dérivation au départ de a alors $r \cdot d$ est inclus $\sqsubseteq$ dans une certaine dérivation f_a de $\mathcal{F}_a$, dérivation f_a qui contient r: $r \sqsubseteq f_a$. Il existe donc une dérivation $f_b \in \mathcal{F}_b$ telle que $r \cdot f_b \equiv f_a$, et donc $r \cdot d \sqsubseteq r \cdot f_b$, c'est-à-dire avec le lemme 4.58 de simplification: $d \sqsubseteq f_b$. Cette construction de $\mathcal{F}_b$ correspond à ce que nous faisions durant la preuve du théorème 5.3. Chaque dérivation f_a de $\mathcal{F}_a$ correspond à une dérivation f_b de $\mathcal{F}_b$ au plus, avec dans le cas de f_a une dérivation standard plus longue que celle de f_b. Ce qui fait que $||\mathcal{F}_a||$ majore strictement $||\mathcal{F}_b||$ et démontre que l'appel par nécessité normalise dans les systèmes ω-déterministes. $\square$

Chapitre 6

De standardisation à normalisation forte

Plan du chapitre:

Ce chapitre expose en section 6.1 une nouvelle démonstration de normalisation forte du λ-calcul simplement typé, et plus généralement en section 6.5 des systèmes à étiquettes décroissantes. Nous reprenons la méthode inventée par Van Daalen pour la travestir et lui donner la forme d'un argument de "plus petit contre-exemple" emprûnté au théorème de Kruskal [Kru 60]. La présentation, plus simple, cesse d'être constructive, mais on peut l'étendre aux systèmes abstraits, orthogonaux ou non, à partir de notre travail sur la standardisation. Nous généralisons de la sorte une propriété traditionnellement réservée aux calculs orthogonaux, λ-calculs ou systèmes à réduction combinatoires.

La propriété de normalisation forte peut être étudiée selon trois directions: en largeur, pour l'appliquer au plus grand nombre de formalismes de réécriture ; en profondeur depuis Girard [Gir 72], dans l'étude des divers systèmes de types purs: [CH 88][Alt 93][MW 96] ; en diagonal, avec l'étude des cas de modularité: [JO 91][BTG 94]. Chacun des trois "territoires" a ses avantages, mais aucun ne propose l'explication globale capable de fédérer ces divers efforts sous un même schéma.

Par exemple, la première approche de caractère dynamique n'a pas permis jusqu'à maintenant de prouver la normalisation forte du système $\mathcal{F}$, établie pourtant au moyen d'une approche sémantique et méta-mathématique par Girard. Les échecs répétés en ce domaine ne manquent pas de surprendre au moins parce qu'ils détonnent avec la réussite des mêmes principes dans le cas de la confluence. A toute situation bloquée il faut sa rêverie: l'hypothèse syntaxique butterait-elle pour finir sur un obstacle à sa mesure: la normalisation du calcul polymorphe?

L'image est agréable, mais précipitée: l'histoire syntaxique n'en est pas là. Ce chapitre part d'une désillusion, de la découverte inattendue que la théorie syntaxique est au seuil seulement des mécanismes de normalisation forte du λ-calcul simplement typé. La description du calcul au moyen de radicaux offre un maillage descriptif trop pauvre pour attrapper la combinatoire de normalisation. En conséquence, les résultats de normalisation forte par étiquetage décroissant sur les radicaux nous aveuglent: ils cachent une structure syntaxique plus complexe, que nous voulons ici rendre au jour et décrire. Nous illustrerons nos positions en section 6.2 par un contre-exemple au résultat de terminaison forte avancé par Jan Willem Klop [Klo 80] dans sa thèse. Nous corrigerons son résultat au moyen d'une description plus fine des mécanismes de création — nous dirons *production* — d'un radical par un autre. L'analyse nécessite de sortir du cadre des radicaux, et d'ouvrir l'étude en section 6.4 d'une classe particulière de contextes, les contextes λ-clos.

6.1 Normalisation forte du λ-calcul simplement typé

6.1.1 Une nouvelle démonstration de normalisation forte?

Il faut une habileté d'initié pour prouver de manière syntaxique le théorème de normalisation forte du λ-calcul simplement typé. On doit savoir amener les deux arguments de récurrence: récurrence sur les types, récurrence sur les termes, jusqu'au résultat. Pour prouver la normalisation forte de son λ-calcul étiqueté, Jean-Jacques Lévy [Lév 78] reprend une démonstration due à Van Daalen [vDa 77], qui suit l'ordonnancement lexicographique suivant: taille du type d'abord, puis longueur maximale des dérivations à partir du terme, et pour finir taille du terme.

Première partie de la démonstration: une stratégie perpétuelle

Nous reprenons la même démonstration par une construction qui semble aller à l'encontre de cet ordre "naturel" des arguments. Le privilège revient chez nous à la taille des termes: il existe dans chaque terme M non normalisable fortement un sous-terme "plus petit" N non fortement normalisable. Il existe à partir de N une dérivation infinie:

Définition 6.1 *On appelle dérivation infinie une suite $(u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de radicaux telle que $\forall i \in \mathbf{N}, \partial_1 u_i = \partial_0 u_{i+1}$. Nous composerons les dérivations finies et infinies: si $d = u_1 \cdots u_n$ et $\mathcal{D} = (v_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ alors $d\cdot\mathcal{D}$ désignera $(w_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ où $w_i = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $w_{n+i+1} = u_i$ pour $i \geq 0$. On dit alors que $d\cdot\mathcal{D}$ prolonge d.*

Tous les sous-termes de N sont fortement normalisables: N n'est donc ni de la forme $\lambda x.P$, ni de la forme $xM_1...M_k$, ce qui amène à conclure que $N = (\lambda x.N_0)N_1...N_k$. Soit r le radical $N = (\lambda x.N_0)N_1...N_k \xrightarrow{r} N_0[x := N_1]N_2...N_k = P$. Ce radical r est externe; soit une dérivation d à partir de N qui à aucun moment ne réduit le résidu de r: sa longueur est bornée par la somme Σ des profondeurs des N_i:

Définition 6.2 (profondeur d'un terme dans SN) *Nous notons SN l'ensemble des λ-termes fortement normalisables. Soit $P \in \mathsf{SN}$ un terme fortement normalisable. On appelle profondeur de P la longueur de la plus longue dérivation qui normalise P.*

Pour toute dérivation infinie $\mathcal{D}$ à partir de N il existe une dérivation de longueur strictement plus grande que cette somme Σ des profondeurs des N_i, et telle que $\mathcal{D} = d\cdot\mathcal{D}'$ pour une certaine dérivation infinie $\mathcal{D}'$. Parce que d est de longueur suffisante, elle réduit à une de ses étapes le résidu de r; au sens du chapitre 4, le radical $r : N \to P$ est extractible de d, ce que nous avons écrit $r \lhd d$. Ainsi, le terme $P = N_0[x := N_1]N_2...N_k$ n'est pas fortement normalisable puisque la dérivation infinie $d'\cdot\mathcal{D}'$ en provient, lorsque d' est résidu de d par r.

Il existe donc dans P un sous-terme Q "plus petit" non fortement normalisable, dont on peut réduire le radical externe pour obtenir une fois encore un λ-terme non fortement normalisable.

On obtient ainsi de proche en proche une stratégie de réduction *perpétuelle*: elle réduit infiniment tout terme non fortement normalisable — standard: les dérivations qu'elle induit sont standards — "la plus interne": aucune stratégie perpétuelle standard ne réduit à une étape un radical plus interne.

Seconde partie de la démonstration: une notion de production

Pour démontrer qu'un λ-terme simplement typé M est fortement normalisable, il suffit de montrer maintenant qu'aucun calcul de M n'est infini quand il est défini par notre stratégie perpétuelle. Ce résultat nécessite une bonne connaissance des mécanismes de création entre sous-termes fortement normalisables. Pour mieux les décrire, nous introduisons les notions suivantes.

Définition 6.3 *On appelle décomposition du λ-terme*

$$P = C[M[x_1 := N_1, ..., x_k := N_k]]$$

tout triplet $(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$, où $C[\Box]$ est un contexte, $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M$ est un α-substitut linéaire et chaque N_i est un λ-terme. La définition de α-substitut linéaire est donnée en section 7.1.1. On écrit qu'un radical $u : P \to Q$ respecte la décomposition

$$(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$$

lorsque u réduit dans M ou dans un des N_i. Dans les deux cas, on peut définir les résidus de la décomposition comme suit:

1. *si u réduit dans N_i par $u_0 : N_i \to N_i'$, alors*

$$Q = C[M[x_1 := N_1, ..., x_i := N_i', ...x_k := N_k]]$$

   Le triplet $(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_i', ..., N_k))$ est une décomposition de Q. Nous déclarons que c'est le résidu de $(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$ par u,

2. *si u réduit dans M par $u_0 : M \to M'$ alors les k occurrences des k variables x_i sont dupliquées en n occurrences de ces variables. On peut remplacer ces occurrences par des variables $y_1, ..., y_n$ et obtenir un λ-terme M'' et une fonction $\phi : [1...n] \to [1...k]$ telle que:*

$$M''[y_1 := x_{\phi(1)}, ..., y_n := x_{\phi(n)}] = M'$$

   On obtient l'égalité suivante:

$$Q = C[M''[y_1 := N_{\phi(1)}, ..., y_n := N_{\phi(n)}]]$$

   Le triplet $(C[\Box], \underline{\lambda}(y_1, ..., y_n).M'', (N_{\phi(1)}, ..., N_{\phi(n)}))$ est une décomposition de Q. Nous déclarons que c'est le résidu de $(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$ par u.

Définition 6.4 *Soit Γ une décomposition de M et $d : M \twoheadrightarrow P$ une dérivation. On définit par récurrence sur la longueur de la dérivation d que la dérivation d respecte la décomposition Γ:*

1. *id_M respecte Γ, et Γ a pour résidu Γ par id_M,*

2. *$d \cdot r : M \twoheadrightarrow P$ respecte Γ lorsque d respecte Γ et r respecte le résidu Γ' de Γ par d. La décomposition Γ a pour résidu par $d \cdot r$ le résidu Γ'' de Γ' par r.*

Définition 6.5 *Soit un λ-terme M dans lequel la variable x a k occurrences. Soit M' le λ-terme obtenu en remplaçant ces k occurrences par k variables $x_1, ..., x_k$ n'apparaissant pas libres dans M.*

Soit un radical

$$r = C[\ (\lambda x.M)N\ ] \rightarrow C[\ M[x := N]\ ]$$

Nous déclarons que r produit un radical u lorsqu'il existe une dérivation standard $d \cdot u$ telle que d respecte la décomposition

$$\Gamma = (C[\Box], (\underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M'), (N, ..., N))$$

et que Γ ait pour résidu par d une décomposition Γ' que u ne respecte pas.

Pour illustrer ce concept de production, notons qu'un β-radical r produit un β-radical s quand il le crée, c'est-à-dire que $[\![r]\!]s = \emptyset$. Dans le λ-calcul simplement typé, un radical r ne produit que des radicaux de type plus petit strictement,

1. soit que $r : C[(\lambda x.M)N] \rightarrow C[M[x := N]]$ produit le radical s "vers le haut" quand $(M[x := N] \twoheadrightarrow M')$ et que $C[\Box]$ et M' interagissent,

2. soit que r produit s "vers le bas" quand $(M \twoheadrightarrow M')$ et $N \twoheadrightarrow \lambda z.N'$ interagissent en une instance de la variable x dans M'.

Troisième partie de la démonstration: le lemme fondamental

Soit le λ-terme M non fortement normalisable et la dérivation infinie $\mathcal{D}$ définie à partir de M par la stratégie perpétuelle que nous avons exposée. Nous voulons démontrer que chaque radical r_i que $\mathcal{D}$ réduit au cours d'une étape:

$$\mathcal{D} = M \overset{d_{i-1}}{\twoheadrightarrow} C[\ (\lambda x.M_i)P_1^i...P_k^i\ ] \overset{r_i}{\rightarrow} C[\ M_i[x := P_1^i]P_2^i...P_k^i\ ] \rightarrow ... \rightarrow ...$$

produit un radical r_{i+p} que $\mathcal{D}$ réduit ultérieurement. Une fois ce résultat démontré, il est immédiat que le terme M n'est pas simplement typé.

Le radical $r_i : M_i \rightarrow r_{i+1}$ peut s'écrire:

$$r_i : C[(\lambda x.M)P] \rightarrow C[M[x := P]]$$

et définit donc la décomposition suivante de M_{i+1}:

$$(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M', (P, ..., P))$$

où M' est obtenu en remplaçant les k occurrences de x par les variables fraiches x_i.

Dire que le radical r_i ne produit aucun radical r_{i+p} signifie en particulier que pour toute factorisation

$$\mathcal{D} = d \cdot r_i \cdot e \cdot r_{i+p} \cdot \mathcal{D}'$$

la dérivation e respecte la décomposition sus-dite:

$$(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M', (N_1, ..., N_k))$$

dont chacun des termes M' et N_i est fortement normalisable. Le lemme 6.7 montrera que cette situation est impossible.

Définition 6.6 *Une décomposition* $(C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$ *est fortement normalisable lorsque* M *et chaque* N_i *est fortement normalisable.*

Lemme 6.7 (fondamental) *Soit* $\Gamma = (C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$ *une décomposition fortement normalisable. Il n'existe aucune dérivation infinie* $(s_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ *telle que pour tout entier* l *la dérivation* $s_1 \cdots s_l$ *respecte* Γ.

Démonstration: nous associons à chaque décomposition fortement normalisable

$$\Gamma = (C[\Box], \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M, (N_1, ..., N_k))$$

le couple $|\Gamma| = (m, \{\!\{n_1, ..., n_k\}\!\})$ où

1. m est la profondeur de M,
2. $\{\!\{n_1, ..., n_k\}\!\}$ est le multi-ensemble des profondeurs n_i des N_i.

Ces couples sont ordonnés par ordre lexicographique.

Soit un radical $r : M \to P$ et Γ une décomposition fortement normalisable de M que le radical r respecte. Nous notons Γ' la décomposition de P qui est résidu de Γ par réduction de r. La décomposition Γ' est fortement normalisable, et le couple $|\Gamma|$ majore strictement $|\Gamma'|$. Cela suffit à conclure. $\Box$

Nous concluons l'argument ainsi: le radical r_i produit certainement un radical r_{i+p} de la séquence infinie $\mathcal{D}$. La propriété étant vraie de tous les radicaux de $\mathcal{D}$, cette dérivation contient certainement des sous-suites infinies $(r_{\phi(i)})_{i \in \mathbf{N}}$ de radicaux telles que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $r_{\phi(i)}$ produit $r_{\phi(i+1)}$. Dans le cas du λ-calcul simplement typé, la taille des types décroit par production: la dérivation $\mathcal{D}$ n'existe pas, ce qui démontre que le calcul en question est fortement normalisable.

Théorème 6.1 (normalisation forte) *Le λ-calcul simplement typé est fortement normalisant.*

Bien entendu, le même arguement s'applique immédiatement au λ-calcul avec type conjonctif à la Coppo-Dezani, ou au λ-calcul avec étiquette proposé [Lév 78] pour décrire le partage optimal.

6.1.2 Remarque sur la définition de la stratégie perpétuelle par "zoom-in"

La définition de stratégie perpétuelle telle que nous l'avons proposée s'écarte de ce que nous appelions une stratégie aux chapitres 4 et 5. En effet, chaque étape de réduction dépend certes du terme intermédiaire mais aussi d'une occurrence particulière de ce terme, occurrence sous laquelle un calcul infini est possible. Pourquoi avoir rajouté cette information d'occurrence? Supposons un λ-terme xPQ tel qu'une dérivation $\mathcal{D}$ en décrive un calcul infini ; le plus souvent les réductions de $\mathcal{D}$ se déroulent dans P et dans Q alternativement et peuvent instaurer plusieurs pôles de non terminaison dans le terme sans en choisir un seul ; ajouter une occurrence c'est imposer au calcul de travailler sur un même sous-terme: la succession d'occurrences emboîtées concentre la dérivation infinie sur une point précis du terme. Nous localisons de la sorte "où" le λ-terme initial ne termine pas.

Nous définissons quel radical réduire à partir de (M, o), une occurrence de M telle que le sous-terme $M_{|o}$ d'occurrence (M, o) n'est pas fortement normalisable. Nous dirons que (M, o) est un sous-terme *actif* de M. Soit l'occurrence o' de $M_{|o}$ telle que:

- $M_{|o \cdot o'} \notin \mathsf{SN}$,
- $M_{|o \cdot o' \cdot o''} \notin \mathsf{SN} \Longrightarrow o'' = \epsilon$.

Le sous-terme $M_{|o \cdot o'}$ est un sous-terme "plus interne" parmi les sous-termes non fortement normalisables de M. Soit $r'' = (M_{|o \cdot o'}, o'')$ le radical externe de $M_{|o \cdot o'}$, et $C[\ ]$ le contexte tel que $M = C[M_{|o \cdot o'}]$; le radical défini par (M, o) vaut donc $r = C[r']$:

$$M = C[M_{|o \cdot o'}] \xrightarrow{r} C[N'] = N$$

La stratégie continue sur le λ-terme N et l'occurrence $o \cdot o'$: en effet $N_{|o \cdot o'} = N'$ n'est pas fortement normalisable parce que r' est externe dans $M_{|o \cdot o'}$, voir la démonstration ci-dessus.

Pour lire la figure 6.1: une partie faiblement grisée est un sous-terme actif à partir duquel est défini par la stratégie perpétuelle un sous-terme plus grisé non fortement normalisable de position minimale.

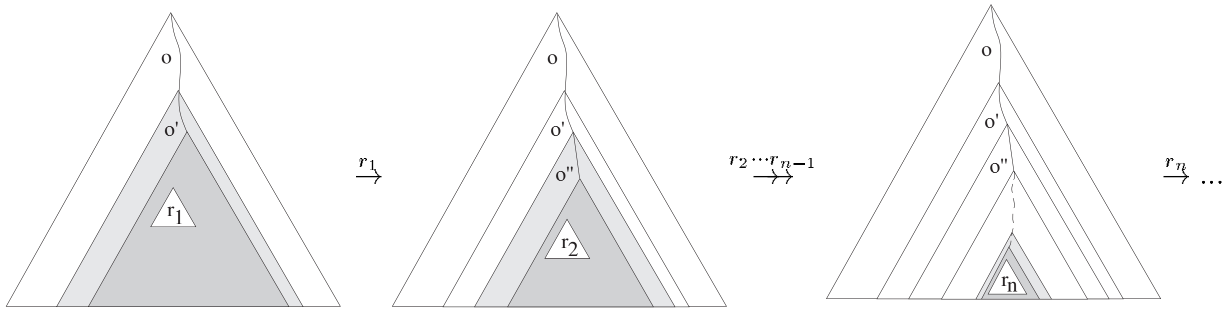


Figure 6.1: stratégie perpétuelle par "zoom-in"

Nous signalons qu'une variante de cette stratégie perpétuelle a été récemment proposée par [Sor 95], voir aussi [Kha 95], qui a donc redécouvert de son côté une partie du procédé.

6.2 Deux façons de décrire la création?

6.2.1 Création, production et zig-zag

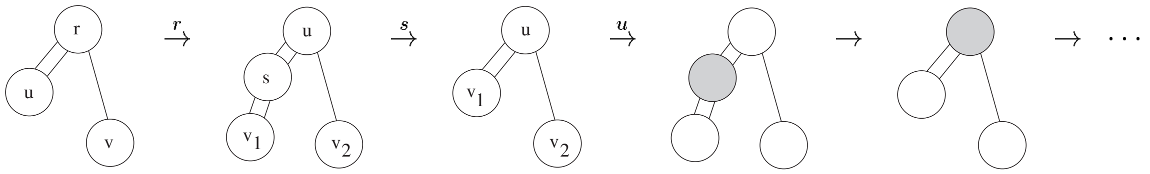
Pour démontrer le théorème 6.1 de normalisation forte du λ-calcul simplement typé, nous avons dû introduire une notion de *production* qui se démarque de la notion habituelle de *création* de radical. Il est montré en section 6.6 que dans le λ-calcul, la bonne fondation des mécanismes de production équivaut à la bonne fondation des mécanismes de création. Ainsi, il est légitime de se demander si on peut se dispenser de l'introduction d'une nouvelle notion comme la production de radical, et revenir à la notion habituelle de création de radical. Par exemple, pourrait-on donner une démonstration directe de normalisation forte par décroissance sur la création?

Supposons un système abstrait $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ où à chaque radical $r \in \mathcal{R}$ est associé un entier $\mathsf{etiq}(r)$ tel que:

- si $u[\![r]\!]v$ alors $\mathsf{etiq}(u) = \mathsf{etiq}(v)$,
- si u crée v, c'est-à-dire $[\![u]\!]v = \emptyset$, alors $\mathsf{etiq}(u) > \mathsf{etiq}(v)$.

Pour normaliser un terme de $\mathcal{D}$, une méthode bien connue est de réduire à chaque étape un radical le plus intérieur: ainsi le multi-ensemble des étiquettes décroit strictement, (nous faisons l'hypothèse de l'axiome A). Le système $\mathcal{D}$ est donc *faiblement* normalisant.

Pour démontrer un résultat de normalisation forte, il faut bien entendu des structures sur le calcul que le système abstrait $\mathcal{D}$ n'offre pas nécessairement. Par exemple, prenons la description des systèmes d'ordre supérieur offerte au chapitre 3 — par emboîtement et agrippement — pour faire l'hypothèse d'un mécanisme bien fondé de création. Deux relations $<$ et $\ll$ enrichissent le système $\mathcal{D}$ et vérifient les axiomes fd-1, fd-2, fd-3 et fd-4. L'exemple qui suit montre que les axiomes des développements finis *et* la décroissance sur l'étiquetage n'impliquent pas la normalisation forte.



$\mathsf{etiq}(r) = \mathsf{etiq}(u) = \mathsf{etiq}(v) = \mathsf{etiq}(v_1) = \mathsf{etiq}(v_2) = 2 \quad \mathsf{etiq}(s) = 1$

Bien entendu, cet exemple de non terminaison est *abstrait*: il porte sur le graphe d'un calcul qui n'a peut-être aucun existence syntaxique. Les systèmes “concrets” comportent des structures que notre axiomatique ne reflète pas, des structures qui empèchent de construire un contre-exemple à la normalisation forte dans le cadre syntaxique. Pour construire un contre-exemple à l'affirmation suivante

Un système syntaxique normalise fortement lorsque le mécanisme de création est bien fondé.

il faut commencer par analyser les limites de cette information de bonne fondation sur la création de radicaux. Reprenons notre définition d'étiquetage dans un système abstrait de réécriture $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$. A chaque radical r est associé un entier $\mathsf{etiq}(r)$ tel que:

- si $u[\![r]\!]v$ alors $\mathsf{etiq}(u) = \mathsf{etiq}(v)$,
- si u crée v, c'est-à-dire $[\![u]\!]v = \emptyset$, alors $\mathsf{etiq}(u) > \mathsf{etiq}(v)$.

La question est de savoir ce que peut *voir* un tel étiquetage des *phénomènes réels de création* qui se déroulent dans le calcul. Est-il capable de tous les recenser? Tout passe ici par la relation de zig-zag entre radicaux:

Définition 6.8
- *$u\mathsf{Z}^1v$ si il existe un radical r tel que $u[\![r]\!]v$*
- *Z est la clôture réflexive, symétrique, transitive de Z^1.*
- *on écrit $u\mathsf{C}v$ lorsque u crée v, c'est-à-dire lorsque $[\![u]\!]v = \emptyset$.*

Par définition Z est une relation d'équivalence. Deux radicaux u et v reliés par zig-zag ont la même étiquette. De plus, si $u\mathsf{Z}u'$, $u'\mathsf{C}v'$ et $v'\mathsf{Z}v$ alors $\mathsf{etiq}(u) > \mathsf{etiq}(v)$. On s'aperçoit sans difficulté que cette relation ZCZ et sa clôture transitive reflètent l'information *maximale* que peuvent donner les deux propriétés de décroissance des étiquettes. Autrement dit, deux radicaux u et v tels que ni $u\mathsf{Z}v$, ni $u(\mathsf{ZCZ})^+v$ ni $v(\mathsf{ZCZ})^+u$ ont des étiquettes $\mathsf{etiq}(u)$ et $\mathsf{etiq}(v)$ qui du point de vue de la création sont imprévisibles. Les principes du calcul et les moyens de sa perpétuation devront se soumettre à la description par $(\mathsf{ZCZ})^+$. Sinon, notre filet abstrait a un trou ; si ce défaut d'information permet au calcul de boucler dans un formalisme qui — du point de vue de l'étiquetage — décroit, il faudra reconsidérer la description de la création telle que ZCZ nous la donne.

En particulier, la notion de création ZCZ est en général plus faible que la concurrente que nous lui proposons, la notion de production: un radical qui crée produit, un radical qui produit ne crée pas toujours. Il faut pour retrouver l'équivalence: la propriété de confluence et une relative décomposition des mécanismes d'emboîtement au sein du calcul — ce qui est le cas du λ-calcul. Avec ces caractèristiques, les permutations de radicaux donnent au zig-zag le moyen de soumettre l'opération de production à la relation ZCZ. Production et ZCZ coïncident.

Un résultat établirait le bon fonctionnement des descriptions fondées sur la création de radical — au moins dans le cadre orthogonal: la terminaison forte des systèmes à réduction combinatoire de Jan Willem Klop, si la création est bornée. Le résultat est attirant, et Jan Willem Klop a cru l'établir dans sa thèse [Klo 80]. Dans ces systèmes, les mécanismes d'emboîtement sont sensiblement plus généraux que dans le cas du λ-calcul, puisque un radical peut avoir deux résidus emboîtés en *une* étape de réduction. Nous verrons comment cela limite la capacité de recombinaison apportée par la permutation de radical, et installe l'écart entre ZCZ et production. Nous pourrons donner pour cette raison un contre-exemple au résultat de normalisation forte dans les systèmes de réécriture combinatoire à étiquettes décroissantes.

Nous rejoignons par là une remarque de Andrea Asperti et Cosimo Laneve [AL 92] au sujet de l'optimalité des systèmes d'interactions, une sous-classe des systèmes de réécriture combinatoire. Jean-Jacques Lévy propose [Lév 80a] trois façons de définir la notion de *famille* de radical: par des étiquettes sur la syntaxe, par extraction optimale, et par zig-zag — au sens de Z. Les deux auteurs montrent que la définition par Z n'est plus la bonne notion de famille dans les systèmes d'interaction ; ils généralisent par contre les deux autres procédés, extraction et étiquetage. Ce mauvais comportement provient de la capacité d'emboîtement particulière: l'opérateur de récursion μ défini par la règle $\mu[x]Z(x) \to Z(\mu[x]Z(x))$ est capable d'emboîter les résidus d'un même sous-terme en une étape de réduction. Notre travail ici nous semble être un développement détourné de leur remarque, et une première tentative de décrire simplement les mécanismes mis en jeu dans les deux cas de la normalisation forte et de l'optimalité.

6.2.2 Les CRS avec étiquettes décroissantes ne terminent pas toujours

Soit le système à réduction combinatoire défini par les règles:

$$\begin{array}{l} G\mu([x]Z(x)) \to Z(Z(\mu([x]Z(x)))) \\ F(x,y) \to G(x) \end{array}$$

Nous utiliserons des accolades sur les termes pour noter la valeur des étiquettes de certains radicaux. Dans nos schémas, nous écrirons G les radicaux définis par la première règle, F ceux définis par la seconde. Le chiffre correspond à la valeur de l'étiquette. Par exemple, $G-2$ représente le radical u de la forme $G\mu([x]Z(x)) \to Z(Z(\mu([x]Z(x))))$ et dont l'étiquette $\mathsf{etiq}(u)$ vaut 2.

$\overbrace{G\mu}^{2}([x]\overbrace{F}^{3}xx)$

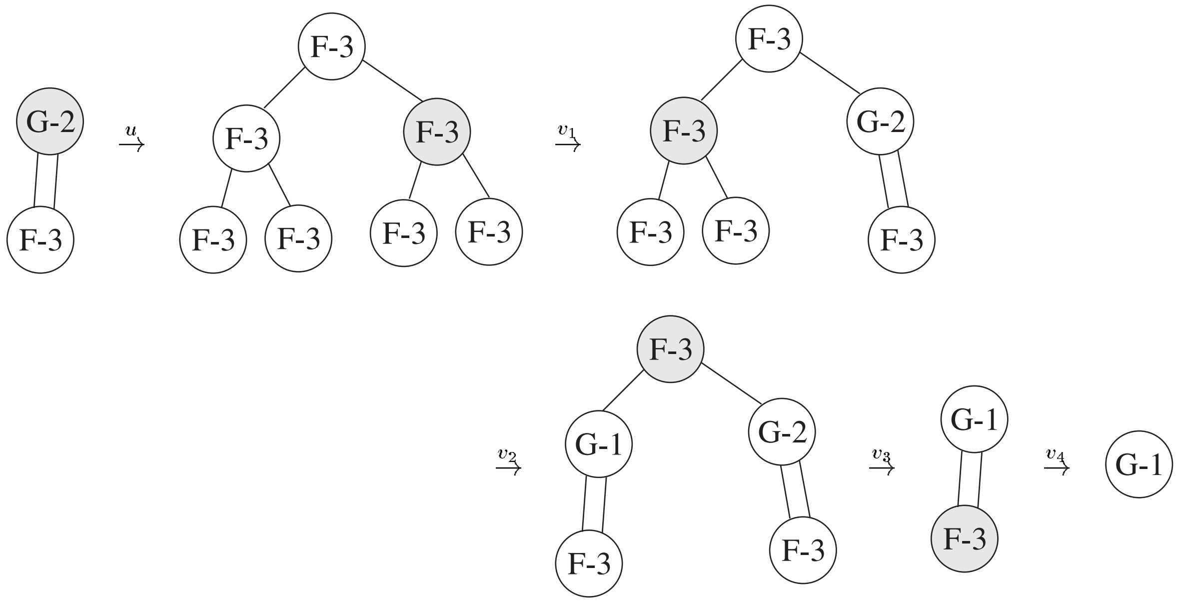
$\xrightarrow{u} F(F\mu([x]Fxx)\mu([x]Fxx))(F\mu([x]Fxx)\mu([x]Fxx))$

$\xrightarrow{v_1} F(F\mu([x]Fxx)\mu([x]Fxx))(\underbrace{G\mu}_{2}([x]Fxx))$ crée

$\xrightarrow{v_2} F(\underbrace{G\mu}_{1}([x]Fxx))(\underbrace{G\mu}_{2}([x]Fxx))$ crée

$\xrightarrow{v_3} G(\underbrace{G\mu}_{1}([x]Fxx))$ efface le radical

$\xrightarrow{v_4} G(\underbrace{G\mu}_{1}([x]Gx))$ ferme le diagramme

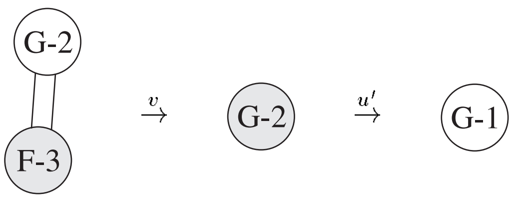


Il existe une autre manière de réduire le terme, qui correspond à l'autre manière de compléter le schéma de permutation de u et v.

$\overbrace{G\mu}^{2}([x]Fxx)$

$\xrightarrow{v} G\mu([x]Gx)$ crée secrètement, efface secrètement

$\xrightarrow{u'} G(\underbrace{G\mu}_{1}([x]Gx))$ crée



Le calcul à partir de $G\mu([x]Fxx)$ est-il bien décroissant? seule l'apparation d'un $(G-2)-(F-3)$ doit être justifiée.

Nous signalons l'erreur de Jan Willem Klop: il affirme page 180 de sa thèse que les systèmes *avec mémoire* à étiquettes décroissantes normalisent fortement ; puis que l'ajoût de la mémoire à tout système à étiquettes décroissantes définit un système *avec mémoire* à étiquettes décroissantes. Il faut reconnaitre que cette seconde propriété n'est pas toujours vraie: un système *sans mémoire* à étiquettes décroissantes n'est pas nécessairement traduit dans un système *avec mémoire* à étiquettes décroissantes [1]. Dans notre exemple, une fois la mémoire rajoûtée, un groupement $(G-1)-(F-3)$ a pour résidu un groupement $(G-2)-(F-3)$, ce qui interdit aux étiquettes de décroître ; cette relation entre $(G-1)-(F-3)$ et $(G-2)-(F-3)$ est évitée dans le système initial par le jeu des effacements: les étiquettes des radicaux peuvent décroître.

Un système à étiquettes décroissantes sur les radicaux n'est donc pas *intrinsèquement* décroissant, ce qui rend évident le décalage entre description par radical et dynamique effective du calcul. Il faut introduire de nouveaux outils de description si on veut cerner les mécanismes qui font que le calcul "décroit". Les trois parties qui suivent nous permettrons de généraliser la méthode de démonstration décrite en partie 6.1 pour le λ-calcul. L'extension s'applique en particulier aux systèmes de réécriture combinatoires — orthogonaux ou pas — en y établissant un critère de décroissance plus strict que celui proposé par Jan Willem Klop.

6.3 Une stratégie perpétuelle et abstraite

Les stratégies perpétuelles du λ-calcul sont souvent définies à partir de la distinction "gauche-droite" propre au λ-calcul, où sous un symbole d'application la fonction est à gauche, l'argument à droite. La définition proposée en section 6.1 évite au contraire tout argument de ce genre, ce qui rend possible son extension à d'autres calculs. Cette partie expose une extension abstraite de cette stratégie menée à partir des résultats du chapitre 4 sur la standardisation. Nous démontrons l'existence d'une dérivation infinie standard plus interne à partir de tout terme non fortement normalisable. Ce qui ouvre le champs en section 6.5 au traitement abstrait de la normalisation forte, à la manière de notre démonstration pour le λ-calcul.

6.3.1 Dérivation infinie standard: cas d'existence

Supposons vérifiés les petits axiomes A, B, C, D et les critères 1 — 7 du chapitre 4 et donc le théorème de standardisation. On peut alors définir de manière simple les dérivations infinies standards:

Définition 6.9 *Une dérivation infinie $\mathcal{D} = (u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est standard si et seulement si pour tout n la dérivation $d_n = u_1 \cdots u_n$ est standard.*

Nous donnons comme dans le cas des dérivations finies une procédure de standardisation. Nous commencerons par définir une notion d'ensemble $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$ des radicaux *externes* d'une dérivation infinies $\mathcal{D}$. Nous supposerons pour cela que chaque terme ne contient qu'un nombre fini de radicaux:

Petit axiome B+ (nombre de radicaux fini): Le nombre de radicaux dans chaque terme est fini.

[1] Précisemment, l'erreur s'infiltre au Théorème 6.2.4, lorsqu'il est écrit "...then it is routine to check that $\kappa(R) - . - . \to \kappa(R')$...".

Ce petit axiome va permettre de démontrer le résultat important de cette section, qu'il existe une dérivation standard infinie à partir de tout terme non fortement normalisable. Nous commencerons par étudier le comportement de certains invariants lors du prolongement d'une dérivation finie d en $d \cdot r$. Nous reprenons ici nos relations R vue au chapitre 4, pour décrire le cas orthogonal et non orthogonal à la fois.

Définition 6.10

- $\mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d = \{x \mid d\mathsf{R}x\}$, *l'ensemble des radicaux qui traversent* d,
- $\mathsf{Sur}\ {}^{\equiv}d$ *est l'ensemble des radicaux* $\mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d \cup \mathsf{Ext}\ d$ *qui traversent* d *ou qu'on peut extraire de toutes les dérivations de sa classe* $\equiv$.

Lemme 6.11 *Soit* d *une dérivation et* r *un radical. On note* $\mathcal{E} = \{x \mid x \overset{d}{\mapsto} y \text{ et } r\mathsf{R}^{\neg}y\}$, *ensemble qui peut être vide. Alors*

- $\mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}(d \cdot r) = \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d \ - \ \mathcal{E}$,
- $\mathsf{Ext}\ (d \cdot r) \subset \mathsf{Ext}\ d \ \cup \ \mathcal{E}$,
- $\mathsf{Sur}\ {}^{\equiv}(d \cdot r) \subset \mathsf{Sur}\ {}^{\equiv}d$.

Démonstration:

- $x \overset{d\cdot r}{\mapsto} z$ si et seulement si il existe y et z tels que $x \overset{d}{\mapsto} y \overset{r}{\mapsto} z$, ce qui signifie que $x \in \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d - \mathcal{E}$.
- si $x \in \mathsf{Ext}\ (d \cdot r)$ alors soit $x \in \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d$, soit $x \notin \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d$. Dans le premier cas, $x \overset{d}{\mapsto} r$ et donc $x \in \mathcal{E}$. Nous montrons dans l'autre cas que $x \in \mathsf{Ext}\ d$. La dérivation $f \cdot r$ est équivalente $\equiv$ à $d \cdot r$ quelle que soit $f \equiv d$. Donc $x \lhd f \cdot r$. Le radical x ne traverse pas f puisqu'il ne traverse pas d, et donc $x \lhd f$. Le radical x est donc un élément de $\mathsf{Ext}\ d$.
- $\mathsf{Sur}\ {}^{\equiv}(d \cdot r) = \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}(d \cdot r) \cup \mathsf{Ext}\ (d \cdot r) \subset \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d \cup \mathsf{Sur}\ {}^{\equiv}d = \mathsf{Sur}\ {}^{\equiv}d$ parce que $\mathcal{E} \subset \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d$.

□

Corollaire 6.12 *Soit un système axiomatique qui vérifie les axiomes de standardisation et l'axiome B+. Soit* $\mathcal{D} = (u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ *un dérivation infinie à partir de* a. *Il existe un entier naturel* J *tel que* $i, j \geq J \Longrightarrow \mathsf{Ext}\ d_i = \mathsf{Ext}\ d_j$.

Démonstration: le nombre de radicaux dans a est fini, et donc il existe un entier J' tel que $\mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d_i = \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d_j$ si $i, j \geq J'$. L'ensemble $\mathcal{E}_i = \{x \mid x \overset{d_i}{\mapsto} y \text{ et } u_{i+1}\mathsf{R}^{\neg}y\}$ est inclus dans $\mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d_i$, donc $\mathcal{E}_i = \emptyset$ pour $i \geq J'$, d'après l'égalité $\mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d_{i+1} = \mathsf{Trav}\ {}^{\equiv}d_i - \mathcal{E}_i$ du lemme 6.11. On obtient alors que $\mathsf{Ext}\ d_i \subset \mathsf{Ext}\ d_{i+1}$ d'après le même lemme. Il existe donc $J' \geq J$ tel que $\mathsf{Ext}\ d_i = \mathsf{Ext}\ d_j$ si $i, j \geq J$. □

Définition 6.13 *Si* $\mathcal{D}$ *est une dérivation infinie on décide d'appeler* $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$ *l'ensemble défini par le corollaire 6.12.*

Cet ensemble permet de construire une dérivation standard infinie à partir de toute dérivation infinie $\mathcal{D}$. Il faut remarquer que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$ n'est pas vide puisqu'il est égal à un $\mathsf{Ext}\ d_i$ pour $d_i = u_1 \cdots u_i$, si $\mathcal{D} = (u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ d'après la propriété 4.4 du radical toujours extrait. Nous généralisons maintenant $\sqsubseteq$ aux dérivations infinies et donnons ensuite un résultat de stabilité de $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$.

Définition 6.14 ($\sqsubseteq$ pour les dérivations infinies) *Soit $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ et $\mathcal{D}' = (v_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ deux dérivations infinies, et d une dérivation.*

- *on écrit que $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{D}'$ lorsque $\forall i, \exists j, (u_1 \cdots u_i) \sqsubseteq (v_1 \cdots v_j)$,*
- *on écrit $d \sqsubseteq \mathcal{D}$ lorsqu'il existe un entier i tel que $d \sqsubseteq u_1 \cdots u_i$.*
- *on écrit $\mathcal{D} \sqsubseteq d$ lorsque $u_1 \cdots u_i \sqsubseteq d$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.*

Cette généralisation de $\sqsubseteq$ est celle que propose Gérard Boudol dans [Bou 85]. La relation $\sqsubseteq$ est un préordre réflexif sur l'ensemble des dérivations finies et infinies.

Lemme 6.15 *Soit deux dérivations infinies $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si $r \sqsubseteq \mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{D}'$ et $r \in \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}'$ alors $r \in \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$.*

Démonstration: nous écrirons $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ et $\mathcal{D}' = (v_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$. Nous tirons de $r \sqsubseteq \mathcal{D}$ qu'il existe un entier N tel que $r \sqsubseteq u_1 \cdots u_i$ pour $i \geq N$. Il existe pour chacun de ces $i \geq N$ un entier k_i tel que $u_1 \cdots u_i \sqsubseteq v_1 \cdots v_{k_i}$. Donc $r \sqsubseteq v_1 \cdots v_{k_i}$.

Nous utilisons qu'un radical r qui vérifie $r \sqsubseteq d \sqsubseteq e$ et $r \in \mathsf{Ext}\ e$ vérifie aussi $r \in \mathsf{Ext}\ d$. En effet, $d \sqsubseteq e$ signifie qu'il existe une dérivation f telle que $d \cdot f \equiv e$. On sait que $d' \cdot f \equiv e$ pour toute dérivation d' équivalente à la dérivation d par permutation. Il s'en suit que $r \lhd d' \cdot f$, ce qui entraine avec $r \sqsubseteq d'$ que $r \lhd d'$. On conclut:

$$r \sqsubseteq d \sqsubseteq e \text{ et } r \in \mathsf{Ext}\ e \text{ implique } r \in \mathsf{Ext}\ d$$

Le radical r qui se trouve par hypothèse dans $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}'$ appartient à $\mathsf{Ext}\ v_1 \cdots v_{k_i}$. En suivant notre remarque il appartient à $\mathsf{Ext}\ u_1 \cdots u_i$. On déduit que r peut être extrait de toutes les dérivations $u_1 \cdots u_i$, ce qui signifie que $r \in \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$. $\square$

Théorème 6.2 (théorème d'existence) *Avec les critères 1— 7 et les axiomes A, B+, C, D:*
Il existe une dérivation standard infinie à partir de tout terme non fortement normalisable.

Démonstration: Soit a un terme non fortement normalisable, et $\mathcal{D}$ une dérivation infinie à partir de a. Soit $v \in \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}$. Le radical v apparait dans $\mathsf{Ext}\ d_n$ pour $d_n = u_1 \cdots u_n$. On appelle $\mathcal{D}^n$ la dérivation infinie telle que $\mathcal{D} = d_n \cdot \mathcal{D}^n$. On construit par extraction une dérivation $v \cdot f$ telle que $v \cdot f \equiv d_n$. Le radical v se trouve encore dans $\mathsf{Ext}\ (v \cdot f \cdot \mathcal{D}^n)$ parce que pour tout $j > n$, $v \in \mathsf{Ext}\ d_j$ pour $d_j = u_1 \cdots u_j$, et $d_j \equiv r \cdot f \cdot u_{n+1} \cdots u_j$:

$$\forall j \geq n,\ v \in \mathsf{Ext}\ (v \cdot f \cdot u_{n+1} \cdots u_j)$$

On a ainsi construit à partir de $\mathcal{D}$ une dérivation $v \cdot \mathcal{D}'$ infinie, pour $\mathcal{D}' = f \cdot \mathcal{D}^n$, telle que $v \cdot \mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}$. On dit que $v \cdot \mathcal{D}'$ est obtenue par *extraction* de v dans $\mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{D}_0$ la dérivation $\mathcal{D}$ et $v_i \cdot \mathcal{D}_{i+1}$ la dérivation obtenue par extraction de $v_i \in \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}_i$ dans $\mathcal{D}_i$. On obtient alors une séquence de radicaux $(v_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ telle que $\forall i \geq 1, \partial_1 i = \partial_0 v_{i+1}$: c'est une dérivation infinie. Est-elle standard? Supposons qu'on trouve une dérivation $v_1 \cdots v_n$ non standard. ($v_j \cdot \mathcal{D}_{j+1} \sqsubseteq \mathcal{D}_j$ pour $1 \leq j \leq n$ par construction, ce qui implique que $v_i \cdots v_j \cdot \mathcal{D}_{j+1} \sqsubseteq v_i \cdots v_{j-1} \cdot \mathcal{D}_j$ par la composition à gauche de $v_i \cdots v_{j-1}$, $i \leq j$, qui respecte $\sqsubseteq$. La dérivation $v_i \cdots v_n \cdot \mathcal{D}_{n+1}$ est donc inclus $\sqsubseteq$ dans $\mathcal{D}_i$ par transitivité, $1 \leq i \leq n$, ce qui établit d'après le lemme 6.15 que $v_i \in \mathsf{Ext}\ (v_i \cdots v_n \cdot \mathcal{D}_{n+1})$. Chaque v_i se trouve a fortiori dans $\mathsf{Ext}\ (v_i \cdots v_n)$. Le lemme 4.38 de caractérisation implique aussitôt que $v_1 \cdots v_n$ est standard. Chaque dérivation $v_1 \cdots v_n$ est donc standard, ce qui signifie que la dérivation infinie $(v_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ elle-même est standard.

Il existe donc au moins une dérivation standard infinie à partir de tout terme a non fortement normalisable. $\square$

6.3.2 Une dérivation standard infinie la plus interne dans le cas de non terminaison forte

Nous nous inspirons de la méthode dite "du contre-exemple minimal". Nous proposons donc un préordre $\prec\!\!\!\prec$ sur les ensembles de radicaux co-initiaux à partir duquel nous construisons une dérivation infinie "plus interne" $\prec\!\!\!\prec$ parmi les dérivations infinies standards au départ d'un terme a non fortement normalisable.

Définition 6.16 *L'ordre $\prec\!\!\!\prec$ entre ensembles de radicaux coinitaux est défini par: $\mathcal{E} \prec\!\!\!\prec \mathcal{F}$ si et seulement si $\forall y \in \mathcal{F}, \exists x \in \mathcal{E}, (y \mathsf{R}_+ x$ ou $x = y)$.*

Construction 6.1 *Soit a non fortement normalisable. La dérivation d_0 est sa dérivation vide: $d_0 = id_a$, et l'ensemble $\mathcal{E}_0$ est vide. On construit la dérivation infinie standard $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ étape par étape, à partir de $n = 0$:*

- *supposons construits pour $i \leq n$ les dérivations $d_i = u_1 \cdots u_i$, et les ensembles $\mathcal{E}_i$ de radicaux coinitiaux à u_i. On définit d_n^i tels que $d_i \cdot d_n^i = d_n$.*
- *$\mathcal{E}_{n+1}$ est défini comme un ensemble maximal-$\prec\!\!\!\prec$ parmi les $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}_n$, où $d_n \cdot \mathcal{D}_n$ est une dérivation infinie standard telle que $\forall i \leq n,\ \mathcal{E}_i = \mathsf{Ext}\ (d_n^i \cdot \mathcal{D}_n)$.*
- *on choisit u_{n+1} dans $\mathcal{E}_{n+1}$ et on définit $d_{n+1} \triangleq d_n \cdot u_{n+1}$.*

Il n'est pas évident que la dérivation $\mathcal{D}$ ainsi construite est bien "maximale" au sens de $\prec\!\!\!\prec$. Nous vérifions maintenant qu'à chaque étape i: $\mathcal{D} = d_i \cdot \mathcal{D}^i$, l'ensemble $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i$ vaut exactement $\mathcal{E}_{i+1}$.

Lemme 6.17 (Lemme de vérification) *Soit $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ la dérivation que nous venons de construire, et $\mathcal{E}_i$ les ensembles minimaux $\prec\!\!\!\prec$ correspondants. On note $d_i \triangleq u_1 \cdots u_i$ et $\mathcal{D}^i$ la dérivation infinie qui prolonge d_i en $\mathcal{D}$: $\mathcal{D} = d_i \cdot \mathcal{D}^i$. On obtient alors que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i = \mathcal{E}_{i+1}$.*

Démonstration: nous montrons tout d'abord que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i \subset \mathcal{E}_{i+1}$ parce que $\mathcal{D}^i$ est standard. Les dérivations $\mathcal{D}_j$, $j \geq i+1$, vérifient par construction que $\mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j \cdot \mathcal{D}_j) = \mathcal{E}_i$. La dérivation $(v_{i+1} \cdots v_j \cdot \mathcal{D}_j)$ est standard. Un radical x qu'on peut extraire de $v_{i+1} \cdots v_j$ peut donc être extrait de toutes les dérivations finies $v_{i+1} \cdots v_j \cdot \delta$, où δ et δ' sont des dérivations respectivement finies et infinies telles que $\delta \cdot \delta' = \mathcal{D}_j$. Ces dérivations $v_{i+1} \cdots v_j \cdot \delta$ sont standards, le radical x se trouve donc dans $\mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j \cdot \delta)$ dans tous les cas, et donc $x \in \mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j \cdot \mathcal{D}_j)$. Tout radical x de $\mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j)$ est un radical qu'on peut extraire $\lhd$ de $v_{i+1} \cdots v_j$, et se trouve donc dans $\mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j \cdot \mathcal{D}_j)$. Ce qui donne:

$$\mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j) \subset \mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j \cdot \mathcal{D}_j) = \mathcal{E}_{i+1}$$

L'ensemble $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i$ est la limite de ces $\mathsf{Ext}\ (v_{i+1} \cdots v_j)$ pour j qui tend vers l'infini. Et donc $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i \subset \mathcal{E}_{i+1}$.

Il nous faut montrer maintenant que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i = \mathcal{E}_i$. Nous démontrerons la propriété par récurrence sur i. Supposons que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^i = \mathcal{E}_i$ pour $i \leq n$. Soit $d_n^i = u_{i+1} \cdots u_n$ pour $i < n$ et $d_n^n = id_b$ pour $b = \partial_1 u_n$. L'ensemble $\mathcal{E}_{n+1}$ est par construction minimal $\prec\!\!\!\prec$ parmi les $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}_n$, avec $\mathcal{D}_n$ tel que $\forall i \leq n,\ \mathcal{E}_i = \mathsf{Ext}\ (d_n^i \cdot \mathcal{D}_n)$. Si on compose d_n^i avec $\mathcal{D}^n$ on obtient $d_n^i \cdot \mathcal{D}^n = \mathcal{D}^i$, ce qui fait par hypothèse de récurrence que $\mathsf{Ext}\ (d_n^i \cdot \mathcal{D}^n) = \mathcal{E}_i$ pour tout $i \leq n$. On déduit par maximalité que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^n \prec\!\!\prec \mathcal{E}_{n+1}$. On obtient:

$$\mathcal{E}_{n+1} \supset \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^n \prec\!\!\prec \mathcal{E}_{n+1}$$

On remarque en passant que $\mathcal{E} \supset \mathcal{F}$ implique $\mathcal{E} \prec\!\!\prec \mathcal{F}$ quels que soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux ensembles co-initiaux de radicaux. Donc $\mathcal{E}_{n+1} \prec\!\!\prec \mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^n \prec\!\!\prec \mathcal{E}_{n+1}$. La relation $\prec\!\!\prec$ n'est en général pas anti-symétrique, même restreinte aux ensembles de radicaux deux à deux disjoints. Par contre, si $\mathcal{E} \supset \mathcal{F} \prec\!\!\prec \mathcal{E}$ alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe $y \in \mathcal{F}$ tel que $(y\mathsf{R}_+x)$ ou $x = y$. Le radical y se trouve dans $\mathcal{E}$. Si les radicaux de $\mathcal{E}$ sont deux à deux disjoints: $\forall x, y \in \mathcal{E}, x = y$ ou $x\mathsf{R}_\Box y$, alors $y\mathsf{R}_+x$ n'est pas possible, et donc $\forall x \in \mathcal{E}, \exists y \in \mathcal{F}, x = y$, ce qui signifie $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, et donc $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. C'est bien ce qui arrive ici: l'ensemble $\mathcal{E}_{n+1}$ est par définition un ensemble $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}_{n+1}$, et donc un ensemble $\mathsf{Ext}\ \delta$ pour δ une certaine dérivation finie telle que $\delta \cdot \delta' = \mathcal{D}_{n+1}$ pour une dérivation δ' infinie. Tous les radicaux de $\mathsf{Ext}\ \delta$ peuvent être extraits carrés des dérivations standard de δ, et sont donc deux à deux disjoints: $\forall x, y \in \mathcal{E}_{n+1}, x = y$ ou $x\mathsf{R}_\Box y$. Nous obtenons ainsi que $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}^n$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ sont égaux. $\Box$

6.3.3 Résultats divers de standardisation

Lemme 6.18 *Soit $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ un système axiomatique qui vérifie les axiomes de standardisation et le critère 8 de transitivité faible. Soit deux dérivations standards $d \cdot r$ et e telles que $e\mathsf{R}_+r$. Alors $d \cdot e$ est standard.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de $d \cdot e$. Supposons la propriété vraie sur toute dérivation de longueur n et vérifions la sur une dérivation $d \cdot e$ de longueur $n+1$. Si un radical x de $\mathsf{Ext}\ d \cdot e$ peut être extrait de d, il le sera par $d \Diamond x \cdot d'$. La dérivation $d' \cdot e$ est standard par hypothèse de récurrence et donc $x \cdot d' \cdot e$ l'est aussi, ce qui fait par équivalence $\Diamond$ que $d \cdot e$ est standard. Autrement, les radicaux x de $\mathsf{Ext}\ (d \cdot e)$ proviennent uniquement de e lors de leur extraction: $x \in \mathsf{Ext}\ d \cdot e$ et $x \overset{d}{\mapsto} y$ avec $y \lhd e$. On applique le corollaire 6.20 pour obtenir que $y\mathsf{R}_+r$. On peut montrer que $x \overset{d}{\underset{\Box}{\mapsto}} y$ en utilisant le lemme de l'alambic ; on sait qu'il existe deux dérivations d_1 et d_2 telles que $(d_1 \cdot d_2) \Diamond d$ avec $x \overset{d_1}{\underset{\Box}{\mapsto}} z \overset{d_2}{\underset{+}{\mapsto}} y$. Le lemme 4.24 de remontée par enclave appliqué à d_2 produit un radical r_0 tel que $r_0 \overset{d_2}{\mapsto} r$; parce que $y\mathsf{R}_+r$: $z\mathsf{R}_+r_0$. Le critère 8 de transitivité faible — appliqué sur chaque radical que réduit d_2 — assure que $r_0 \overset{d_2}{\underset{+}{\mapsto}} r$. Parce que $d \cdot r$ est standard par hypothèse, la dérivation d_2 doit être vide, c'est-à-dire $d_1 \Diamond d$ et $x \overset{d}{\underset{\Box}{\mapsto}} y$. La dérivation e est standard donc $y \lhd^{\|} e$ et $x \lhd^{\|} d \cdot e$. On obtient par extraction de x une dérivation $x \cdot d' \cdot e'$ et un radical r' où $(x \cdot d' \cdot e') \Diamond (d \cdot e)$ et $(y \cdot e') \Diamond e$, avec $r \overset{y}{\underset{+}{\mapsto}} r'$. La longueur de la dérivation $d' \cdot e'$ est plus faible que celle de $d \cdot e$, ce qui nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence une fois prouvé que $d' \cdot r'$ et e' sont standards — et que $e'\mathsf{R}_+r'$, ce qui vient maintenant:

Lemme 6.19 (traversée au-dessus) *Soit un système axiomatique qui vérifie les axiomes de standardisation. Soit U un ensemble fini de radicaux deux à deux compatibles et disjoints:*

$$\forall (u, v) \in U^2, u\mathsf{R}_\Box v \text{ ou } u = v$$

et f un développement de U. Alors

$$\forall u \in U, u\mathsf{R}_+x \iff f\mathsf{R}_+r$$

Démonstration: nous réutiliserons la méthode de démonstration du lemme 4.11 de développement. Nous démontrons d'abord l'équivalent du critère 2: si r et u sont compatibles et $r\mathsf{R}_{\square}u$ avec $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$ alors:

$$r\mathsf{R}_{+}v \Longrightarrow (u\mathsf{R}_{+}v \iff u'\mathsf{R}_{+}v') \qquad (A)$$

On utilise le critère 2: $r\mathsf{R}u$ et $r\mathsf{R}v$, donc $u\mathsf{R}v \iff u'\mathsf{R}v'$ et $v\mathsf{R}u \iff v'\mathsf{R}u'$. Nous n'aurons pas ici à démontrer l'équivalent du critère 3, qui serait ici: si u et x sont compatibles avec $u\mathsf{R}_{\square}x$ et $v[\![u]\!]v'$ alors:

$$x[\![u]\!] = \emptyset \Longrightarrow x\mathsf{R}_{+}v \qquad (B)$$

En effet, $u\mathsf{R}x$ par hypothèse, d'où $x[\![u]\!] \neq \emptyset$. Le lemme vient ensuite des deux propriétés (A) et (B) de la même manière que le lemme de développement vient des critères 2 et 3. $\square$

Corollaire 6.20 (lemme de développement au dessus) *Dans un système axiomatique qui vérifie les axiomes de standardisation, soit deux dérivations coinitiales d et e, et deux radicaux r et s. Si $r \overset{d}{\underset{+}{\mapsto}} s$ et $d\Diamond e$ alors $r \overset{e}{\underset{+}{\mapsto}} s$*

Démonstration immédiate à partir du lemme 6.19. $\square$

Nous terminons notre démonstration du lemme 6.18. La dérivation $y \cdot e'$ est équivalente $\Diamond$ à e, et donc $(y \cdot e')\mathsf{R}_{+}r$, d'où $e'\mathsf{R}_{+}r'$. La dérivation e' est standard parce que $y \cdot e'$ est standard ; la dérivation $d' \cdot r'$ vaut $(d \cdot r)[x]$ tandis que $x\mathsf{R}_{=}d \cdot r$: $d' \cdot r'$ est standard d'après le lemme 4.65 de projection interne appliqué à la dérivation standard $d \cdot r$. La longueur de $d' \cdot e'$ est strictement plus petite que celle de $d \cdot e$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence, et certifier que la dérivation $d' \cdot e'$ est standard. La dérivation $x \cdot d' \cdot e'$ est elle aussi standard — n'oublions pas que $x \in \mathsf{Ext}\ (d \cdot e)$ — ce qui parce que $(x \cdot d' \cdot e')\Diamond(d \cdot e)$ montre que $d \cdot e$ est standard. Ce qui prouve le lemme 6.18 par récurrence. $\square$

Corollaire 6.21 *Dans un système axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ qui vérifie les axiomes de standardisation et l'axiome 8 de transitivité faible, soit $d \cdot r'$ et e deux dérivations standards et r un radical tel que $r \overset{d}{\underset{\square}{\mapsto}} r'$ et $e\mathsf{R}_{+}r'$. Alors $\mathsf{Ext}\ (d \cdot r) \twoheadleftarrow\!\!\prec \mathsf{Ext}\ (d \cdot e)$ strictement.*

Démonstration: les dérivations $d \cdot r'$ et e sont standards, avec $e\mathsf{R}_{+}r'$. Le lemme 6.18 a montré que $d \cdot e$ est elle aussi standard. Les radicaux de $\mathsf{Ext}\ (d \cdot r')$ et de $\mathsf{Ext}\ (d \cdot e)$ sont donc ceux qu'on peut extraire de $d \cdot r'$ et $d \cdot e$ respectivement. Un radical x extrait de $d \cdot e$ est soit extrait de d soit traverse d avec pour résidu un radical y: $x \overset{d}{\mapsto} y$ tel que y soit extrait de e: $y \lhd e$. Le radical x peut être extrait de $d \cdot r'$ dans le premier cas, ce qui fait que $x \in \mathsf{Ext}\ (d \cdot r')$. Le lemme 6.19 certifie dans l'autre cas que $y\mathsf{R}_{+}r'$ tandis que $r \overset{d}{\mapsto} r'$ et $x \overset{d}{\mapsto} y$. Le critère 2 appliqué le nombre de fois qu'il y a d'étape de réduction dans d assure que $x\mathsf{R}_{+}r$. Le radical r se trouve dans $\mathsf{Ext}\ (d \cdot r')$. Finalement, il existe pour tout radical $x \in \mathsf{Ext}\ d \cdot e$ un radical $u \in \mathsf{Ext}\ (d \cdot r')$ tel que $u = x$ ou $x\mathsf{R}_{+}u$. Ce qui signifie: $\mathsf{Ext}\ (d \cdot r') \twoheadleftarrow\!\!\prec \mathsf{Ext}\ (d \cdot e)$. Une remarque nous permet d'affirmer que l'ordre ici est strict. Si $\mathsf{Ext}\ (d \cdot e) \twoheadleftarrow\!\!\prec \mathsf{Ext}\ (d \cdot r')$, alors il existe un radical $x \lhd (d \cdot e)$ tel que $x = r$ ou $r\mathsf{R}_{+}x$. Ce radical x ne peut pas être extrait de d puisque $r \overset{d}{\mapsto} r'$. Il traverse donc d avec $x \overset{d}{\mapsto} y$ et $y \lhd e$. On aurait donc un radical x tel que $r\mathsf{R}_{+}x$ et $y\mathsf{R}_{+}r'$ avec $r \overset{d}{\mapsto} r'$ et $x \overset{d}{\mapsto} y$. C'est impossible. Donc $\mathsf{Ext}\ (d \cdot e) \not\twoheadleftarrow\!\!\prec \mathsf{Ext}\ (d \cdot r')$. $\square$

6.4 Dynamique des contextes λ-clos

La notion de *contexte λ-clos* est la réponse que nous proposons au trop faible pouvoir descriptif des radicaux quand il s'agit de terminaison forte. Qu'est-ce qu'un contexte λ-clos? Dans le cas du λ-calcul, si M est un λ-terme, nous appelons "contexte" de M un contexte $D[\Box_1, ..., \Box_k]$ à k trous tel que

$$M = C[D[N_1, ..., N_k]]$$

pour un certain contexte $C[\Box]$. Autrement dit, un contexte de M est un sous-arbre incomplet, une "région syntaxique", de ce λ-terme M. Par exemple, le contexte

$$(\lambda y.\Delta[\Box])$$

est un contexte du λ-terme

$$I(\lambda y.\Delta y)$$

Un tel contexte $D[\Box_1, ..., \Box_k]$ est dit λ-clos lorsqu'aucune des variables de $N_1, ..., N_k$ n'est liée par un nœud λx de $D[\Box_1, ..., \Box_k]$. Autrement dit, un contexte λ-clos contient dans M toutes les occurrences de la variable x lorsqu'il contient le nœud λx qui les lie. Par exemple, le contexte $(\lambda y.\Delta[\Box])$ n'est pas λ-clos dans $I(\lambda y.\Delta y)$, contrairement au contexte $\lambda y.[\Box]y$.

La notion de contextes λ-clos raffine celle de radical tout en restant accessible à une analyse abstraite. En particulier, une notion simple de résidu de contexte λ-clos peut être définie, en tenant compte des positions des contextes λ-clos à l'intérieur des termes.

Le lecteur trouvera à la suite la description abstraite des contextes λ-clos qui permet de démontrer le théorème de normalisation forte des systèmes à étiquetage décroissant. Nous commençons par quelques définitions, qui seront éclairées ensuite par leur interprétation dans le λ-calcul.

Définition 6.22 *Un système à contexte λ-clos est la donnée d'un système axiomatique $(\mathcal{D}, \uparrow, \mathsf{R})$ avec $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$, et les ensembles et relations suivantes:*

1. *un ensemble $\mathcal{C}_a$ de contextes λ-clos pour chaque terme de l'ensemble $\mathcal{T}$.*

2. *deux relations $\Uparrow$ et $<$ entre contextes λ-clos du même terme: on dit que α et β sont disjoints lorsque $\alpha \Uparrow \beta$, et que β est emboîté sous α lorsque $\alpha < \beta$. La relation $<$ est un ordre,*

3. *trois relations $\in$, $\Downarrow$ et $\prec$ entre radicaux et contextes λ-clos du même terme: on dit que le contexte α contient u (ou bien que u appartient à α) lorsque $u \in \alpha$, que le radical u rencontre α lorsque $u \Downarrow \alpha$, et que α domine u lorsque $\alpha \prec u$.*

4. *pour chaque radical $r : a \xrightarrow{r} b$ une relation $[\![r]\!]$ entre les contextes λ-clos de a et ceux de b,*

5. *pour chaque radical r de a un ensemble fini H_r de contextes λ-clos de a qu'on appelle l'harmonique de r. Les éléments de l'harmoniques sont deux à deux disjoints: $\forall(\alpha, \beta) \in H_r, \alpha \Uparrow \beta$.*

Hypothèse 6.1 *Nous supposerons tout au long de la section 6.4 que le système à contexte λ-clos vérifie en tant que système axiomatique les axiomes de standardisation, l'axiome E et le critère 8 de transitivité faible.*

6.4.1 Contextes λ-clos dans le cas du λ-calcul

La notion de contexte λ-clos est nouvelle. Nous expliquons comment elle s'applique à l'exemple du λ-calcul.

- un contexte λ-clos γ du λ-terme M est un triplet $(M, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).P, o)$, où M est un λ-terme (modulo α-conversion) et $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).P$ est un α-substitut linéaire — voir la section 7.1 — tel que

$$M = C[(\underline{\lambda}(x_1, ..., x_k)P)(Q_1, ..., Q_n)] = C[P[x_1 := Q_1, ..., x_k := Q_k]]$$

  pour des α-termes $Q_1, ..., Q_n$, où $\square$ a pour occurrence o dans $C[\square]$. Informellement, un contexte λ-clos γ de M est une "région" syntaxique de M dont les lieurs λ ne lie aucune occurrence en dehors de γ.

- soit $\alpha = (M, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).P, o_\alpha)$ un contexte λ-clos de M et (M, o) une occurrence de M; on dit que (M, o) est une occurrence de α si $o = o_\alpha \cdot o'$, où (N, o') est une occurrence de N dont le symbole n'est pas une des variables x_i.

- soit α et β deux contextes λ-clos de M. On dit que les contextes α et β sont disjoints, ce qu'on écrit $\alpha \Uparrow \beta$, lorsqu'aucune occurrence de M n'est à la fois une occurrence de α et une occurrence de β.

- on dit que $\beta = (M, \underline{\lambda}(y_1, ..., y_k).Q, o_\beta)$ est emboîté sous $\alpha = (M, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).P, o_\alpha)$, ce qu'on écrit $\alpha < \beta$, lorsque o_α est un préfixe strict de o_β.

- soit $r = (M, o_r)$ un radical de M et $\gamma = (M, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).P, o_\gamma)$ un contexte λ-clos de M. Le radical r vérifie $r \in \gamma$ lorsque les occurrences o_r et $o_r \cdot 1$ sont des occurrences de γ. Le radical r vérifie $r \Downarrow \gamma$ lorsque l'une des occurrences o_r ou $o_r \cdot 1$ au moins se trouve dans α. On dit que γ domine r, $\gamma \prec r$, lorsque o_γ est un préfixe strict de o_r.

- on définit pour $M \xrightarrow{r} N$, où $r = (M, o_r)$ une relation $[\![r]\!]$ de résidu entre contextes λ-clos de M et contextes λ-clos de N ; soit γ un contexte λ-clos de γ:
  - si $r \Downarrow \gamma$ alors γ n'a pas de résidu par r,
  - sinon, si $\gamma = (M, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).P, o_\gamma)$ alors $\gamma[\![r]\!]\gamma'$ lorsque $\gamma' = (N, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).P, o_{\gamma'})$, et $(M, \gamma)[\![r]\!](N, \gamma')$.

- soit $r = (M, o_r)$ un radical de M ; on peut écrire $M = C[(\lambda x.P)Q]$ où $\square$ a o_r comme occurrence dans M. L'harmonique de r — noté H_r — est l'ensemble $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ formé des contextes λ-clos $\gamma_1 = (M, \underline{\lambda}x_1, ..., x_k.P', (o_r \cdot 1 \cdot 1))$ et $\gamma_2 = (M, Q, (o_r \cdot 2))$, où P' est le λ-terme P dont les k occurrences de x sont remplaçées par de nouvelles variables libres x_1, ..., x_k.

Nous voulons redémontrer dans un cadre abstrait la seconde partie de notre démonstration de normalisation forte pour le λ-calcul. Les axiomes suivants en proposent l'analyse dans ce cadre non syntaxique.

6.4.2 Propriétés abstraites des contextes λ-clos

Neuf axiomes simples vont être introduits pour coordonner les comportements des radicaux et des contextes λ-clos. Nous commençons par quelques définitions dérivées de la notion de système à contexte λ-clos.

Définition 6.23 ($\Downarrow$ et $\#$ sur les ensembles de contextes λ-clos)

- *on généralise $\Downarrow$ aux ensembles Γ de contextes λ-clos: on dit que u rencontre Γ lorsqu'il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $u \Downarrow \alpha$. On écrit $u \Downarrow \Gamma$,*
- *on écrit $u \# \Gamma$ lorsque:*
  1. *le radical u n'appartient à aucun contexte de Γ, c'est-à-dire: $\forall \alpha \in \Gamma, u \notin \alpha$,*
  2. *et il existe un contexte α de Γ qui rencontre u, c'est-à-dire $u \Downarrow \Gamma$.*

Définition 6.24 (ensemble plein de contextes λ-clos) *Soit un radical $u : a \to b$. Soit un contexte λ-clos α de a, et un ensemble Γ de contextes λ-clos de a.*

- *on dit que Γ est plein sous u lorsque:*
  1. *si $v \mathsf{R}_+ u$ alors $v \Downarrow \Gamma$*
  2. *et si u crée v alors $v \Downarrow \Gamma'$, pour $\Gamma' = \Gamma[\![v]\!]$.*
- *on dit que Γ est plein sous α si $\alpha \prec v \Longrightarrow v \Downarrow \Gamma$*
- *Γ est plein si pour tout élément α de Γ, l'ensemble Γ est plein sous α.*

Définition 6.25 *Soit r un radical et α un contexte λ-clos du même terme. Nous écrivons $r \Uparrow \alpha$ lorsque $r \in \alpha$ ou $r \not\Downarrow \alpha$.*

Quatre hypothèses préliminaires

Nous initions notre analyse abstraite des contextes λ-clos par quatre propriétés simples. Leur vérification est immédiate dans le cadre du λ-calcul.

Petit axiome F (transitivité): Si $u \in \alpha$ et $v \mathsf{R}_+ u$ alors $v \Downarrow \alpha$ ou $\alpha \prec v$.

Petit axiome G (nombre fini de résidus de contextes λ-clos): Le nombre de résidus α' par r d'un contexte λ-clos α est fini.

Petit axiome H1 (compatibilité des radicaux et contextes λ-clos): Soit un radical r et deux contextes λ-clos α et β. Si $r \in \alpha$ et $\alpha \Uparrow \beta$ alors $r \Uparrow \beta$.

Petit axiome H2 (compatibilité par des contextes λ-clos): Soit quatre contextes λ-clos α, β, α', β' et un radical r tels que: $\alpha[\![r]\!]\alpha'$ et $\beta[\![r]\!]\beta'$. Alors $r \Uparrow \alpha, r \Uparrow \beta, \alpha \Uparrow \beta \Longrightarrow \alpha' \Uparrow \beta'$

Cinq axiomes sur les contextes λ-clos

Nous introduisons les cinq axiomes sn-1, sn-2, sn-3, sn-4 et sn-5 qui nous permettrons de démontrer le théorème 6.3 de l'harmonique.

Nous justifions l'axiome sn-1 par l'exemple du λ-calcul. Si un radical r contient un radical u, alors u rencontre l'harmonique de r. Nous démontrons maintenant le second point de la définition d'ensemble plein sous le radical r.

Un β-radical $r : C[(\lambda x.M)N] \to C[M[x := N]]$ peut créer un radical s de trois façon différentes, décrites par [Lév 78]:

[dessous] $M = D[xP]$ et $N = \lambda z.N'$; $s : C[D[(\lambda z.N')P]] \to C[D[N'[z := P]]]$,

[dessus] $C = C'[\Box Q]$ et $M = \lambda z.M'$; $s : C'[(\lambda z.M'[x := N])Q] \to C'[M'[x := N][z' := Q]]$,

[traverse] $M = x$ et $C = C'[\Box Q]$, c'est-à-dire $r : C[(\lambda x.M)N] \to C[M[x := N]]$, et $N = \lambda z.N'$; $s : C'[(\lambda z.N')Q] \to C'[N'[z := Q]]$.

Soit $(C[(\lambda x.M)N], o)$ l'occurrence de r dans $R = C[(\lambda x.M)N]$. L'harmonique $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ de r contient:

- le contexte λ-clos $\gamma_1 = (R, \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M', o \cdot 1 \cdot 1)$ sous le nœud "lambda" de r, où M' est le λ-terme obtenu en remplaçant dans M les k occurrences x par les occurrences de nouvelles variables x_1,...,x_k. Ainsi, on obtient l'égalité $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).M'(x, ..., x) = M$,
- le contexte λ-clos $\gamma_2 = (R, N, o \cdot 2)$ sous le nœud "application" de r.

Soit Γ' l'ensemble des résidus de γ_1 et γ_2 par réduction de r. Nous montrons que s rencontre Γ' en passant en revue les trois façon de créer s:

[dessous] le radical s rencontre un résidu γ_2' de γ_2,

[dessus] le radical s rencontre le résidu γ_1' de γ_1,

[traverse] le radical s rencontre les résidus γ_1' et γ_2' de γ_1 et γ_2 par r.

Dans les trois cas, le radical s rencontre l'ensemble Γ'. On conclut que l'harmonique de r est pleine sous r, ce qui conduit à l'axiome sn-1.

Axiome sn-1 création I
Soit $r \in \mathcal{R}$. L'ensemble H_r est plein sous r.

Dans le λ-calcul, si le contexte λ-clos α appartient à l'harmonique d'un radical r, alors, pour tout radical v:

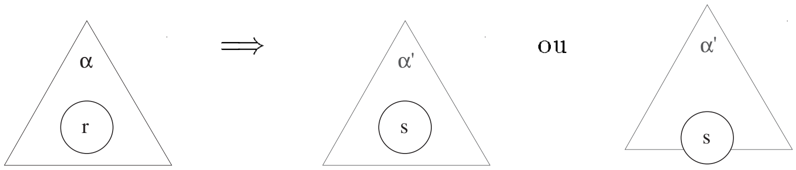
$$\alpha \prec v \Longrightarrow v \Downarrow \alpha$$

Pour cette raison, l'harmonique du radical r est pleine.

Axiome sn-2 emboîtement I
Soit $r \in \mathcal{R}$. L'ensemble H_r est plein.

Dans le λ-calcul, si α est un contexte λ-clos et r un radical tel que $r \in \alpha$, alors α a un résidu α' unique par réduction de r. L'analyse des trois formes de création montre que tout radical s que crée r rencontre ce contexte λ-clos α' résidu. Ici, le caractère λ-clos des contextes intervient: la propriété n'est pas vraie des contextes en général.

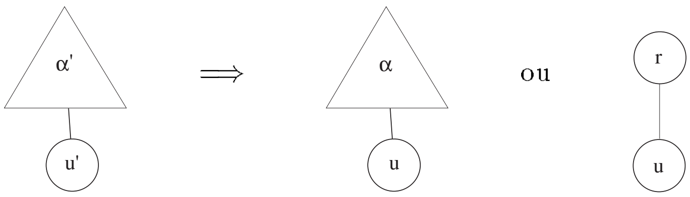
Axiome sn-3 création II
Soit deux radicaux r et s, et un contexte λ-clos α. Si $r \in \alpha$ et r crée s, alors il existe un contexte λ-clos α' tel que: $\alpha[\![r]\!]\alpha'$ et $s \Downarrow \alpha'$.



Les triangles de nos diagramme représentent les contextes λ-clos, et les disques, les radicaux. Un radical r est représenté à l'intérieur du triangle α lorsque $r \in \alpha$, et sur un côté de α lorsque $r \# \alpha$.

L'axiome sn-4 applique l'esprit de l'axiome fd-2 au cadre des contextes λ-clos.

Axiome sn-4 emboîtement II
Soit deux contextes λ-clos α et α' et un radical r tel que $r \Uparrow \alpha$ et $\alpha[\![r]\!]\alpha'$. Soit deux radicaux u et u' tels que $u[\![r]\!]u'$. Si $\alpha' \prec u'$ alors $\alpha \prec u$ ou $u\mathsf{R}_+r$.



L'axiome sn-5 confère aux contextes λ-clos la capacité de suivre par résidu les radicaux qu'ils contiennent. Pour cette raison, l'appartenance des radicaux aux contextes λ-clos est préservée par réduction.

Axiome sn-5 préservation
Soit trois radicaux u, r et u' tels que $u[\![r]\!]u'$. Soit un contexte λ-clos α tel que $r \Uparrow \alpha$. Si $u \Downarrow \alpha$ alors il existe un contexte λ-clos α' tel que $\alpha[\![r]\!]\alpha'$ et $u' \Downarrow \alpha'$.

Théorème de l'harmonique

Lemme 6.26 *Soit Γ un ensemble de contextes λ-clos coinitiaux deux à deux disjoints, α un élément de Γ, et r un radical de α, c'est-à-dire: $r \in \alpha$ et $\alpha \in \Gamma$. Si Γ est plein sous α alors Γ est plein sous r.*

Démonstration: nous utilisons l'axiome F. Si $u \mathsf{R}_+ r$, soit $u \Downarrow \alpha$, soit $\alpha \prec u$. Dans le premier cas, $u \Downarrow \Gamma$ puisque $\alpha \in \Gamma$. Dans le second, $\alpha \prec u$ donc $u \Downarrow \Gamma$ parce que Γ est plein sous α. Finalement, $u \Downarrow \Gamma$ dans tous les cas, et donc Γ est plein sous r. □

Lemme 6.27 *Soit Γ un ensemble de contextes λ-clos coinitiaux deux à deux disjoints. Soit γ un élément de Γ et $r : a \to b$ un radical de γ, c'est-à-dire $r \in \gamma$. Si Γ est à la fois plein et plein sous r alors $\Gamma[\![r]\!]$ est plein.*

Démonstration: soit α un contexte λ-clos résidu élément de Γ et β un de ses résidus par réduction de r. Supposons que $\beta \prec v$. Si r crée v alors $v \Downarrow \Gamma[\![r]\!]$ du fait que Γ est plein sous r. Autrement, il existe un radical u de a tel que $u[\![r]\!]v$. L'axiome sn-4 d'emboîtement II détermine deux cas: soit $\alpha \prec u$, soit $u\mathsf{R}_+ r$. Dans les deux cas, on conclut que $u \Downarrow \Gamma$ parce que Γ est à la fois plein sous α et plein sous r. Soit δ un contexte λ-clos élément de Γ tel que $u \Downarrow \delta$. L'axiome H1 déduit de la compatibilité de γ et δ: $\gamma \Uparrow \delta$, la compatibilité $r \Uparrow \delta$. Il existe d'après l'axiome sn-5 un contexte δ' résidu de δ par r tel que $v \Downarrow \delta'$. On conclut $v \Downarrow \Gamma[\![r]\!]$. Ainsi, le radical v rencontre $\Gamma[\![r]\!]$ si $\beta \prec v$. L'ensemble $\Gamma[\![r]\!]$ est donc plein sous β, quel que soit $\beta \in \Gamma[\![r]\!]$. On conclut que Γ est plein. □

Lemme 6.28 *Soit Γ un ensemble de contextes λ-clos coinitiaux deux à deux disjoints. Soit r un radical du même terme. Si $v \not\Downarrow \Gamma[\![r]\!]$ et Γ est plein sous r alors il existe un radical u tel que $u \stackrel{r}{\mapsto} v$ et $u \not\Downarrow \Gamma$.*

Démonstration: si r crée v, c'est-à-dire $[\![r]\!]v = \emptyset$, alors $v \Downarrow \Gamma[\![r]\!]$ du fait que Γ est plein sous r. Il existe donc un radical u tel que $u[\![r]\!]v$. L'axiome E impose que les deux radicaux r et u sont compatibles, puisque u a le résidu v par r. Le critère 7 donne que $u\mathsf{R}v$ ou $v\mathsf{R}u$. L'axiome sn-1 déduit de $u\mathsf{R}_+ r$ que $u \Downarrow \Gamma$, ce qui signifie qu'il existe un contexte δ de Γ tel que $u \Downarrow \delta$. L'axiome H1 montre que $r \Uparrow \delta$, ce qui entraine que $v \Downarrow \Gamma[\![r]\!]$ d'après l'axiome sn-5. Ce résultat contredit les hypothèses, ce qui permet de conclure que $r\mathsf{R}u$. Il s'en suit avec $u[\![r]\!]v$ que $u \stackrel{r}{\mapsto} v$. □

Définition 6.29 (dérivation relative à un ensemble de contextes λ-clos) *On dit que d est une dérivation relative à Γ lorsque $d = u_1 \cdots u_n$, $\Gamma_1 = \Gamma$, $\forall i, 1 < i < n,\ \Gamma_i = \Gamma_1[\![u_1 \cdots u_{i-1}]\!]$ et pour tout i, $1 \leq i \leq n \Longrightarrow u_i \in \Gamma_i$. Une dérivation infinie $\mathcal{D} = (u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est dite relative à Γ lorsque quel que soit i, $u_1 \cdots u_i$ est relative à Γ.*

Définition 6.30 (production) *Un radical r produit un radical s lorsqu'il existe une dérivation d tel que $s \# H_r[\![r \cdot d]\!]$, c'est-à-dire:*

$$s \Downarrow H_r[\![r \cdot d]\!] \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in H_r[\![r \cdot d]\!], s \notin \alpha$$

Théorème 6.3 (de l'harmonique) *Soit une dérivation $r \cdot d$ dont $r : a \to b$ est le seul radical qu'on puisse extraire. Alors:*

- *soit $r \cdot d$ développe l'harmonique H_r de r et $H_r[\![r \cdot d]\!]$ est plein,*
- *soit r produit une étape de réduction de d.*

Démonstration: par récurrence sur la longueur de d. La propriété est vraie si $d = id_b$: en effet, l'ensemble $H_r[\![r]\!]$ est plein, comme le montre le lemme 6.27 avec les axiomes sn-1 et sn-2 de création I et emboîtement I. Supposons la propriété vérifiée pour les dérivations $d_i = v_1 \cdots v_i$, $1 \leq i \leq n$, avec $d = v_1 \cdots v_{n+1}$. Si r produit une étape de réduction dans d_i, il produit cette même étape dans d, ce qui démontre notre résultat. Dans l'autre cas, r est l'unique radical extrait de d_i, puisque on ne peut pas extraire d'autres radicaux de d_i que ceux qu'on extrait de d. Par hypothèse de récurrence, la dérivation $r \cdot d_i$ est donc relative à H_r, et $H_r[\![r \cdot d_i]\!]$ est plein, cela pour tout i. Supposons que le radical v_{n+1} ne rencontre pas $H_r[\![r \cdot d_n]\!]$: $v_{n+1} \not\Downarrow H_r[\![r \cdot d_n]\!]$. Alors, le lemme 6.28 affirme qu'il existe un radical u tel que $u \overset{d_n}{\mapsto} v_{n+1}$ du fait que tous les $H_r[\![r \cdot d_i]\!]$ sont pleins, $1 \leq i \leq n$. Le radical u peut donc être extrait de d, et est différent de r, ce qui contredit nos hypothèses. Donc $u \Downarrow H_r[\![d_n]\!]$. A partir de là, deux cas se présentent: soit il existe $\alpha \in H_r[\![d_n]\!]$ tel que $v_{n+1} \in \alpha$, et suivant le lemme 6.26 $H_r[\![d_n]\!]$ est plein sous v_{n+1}, ce qui entraîne avec le lemme 6.27 que $H_r[\![d_{n+1}]\!] = H_r[\![d_n]\!][\![v_{n+1}]\!]$ est plein. Soit pour tout α de $H_r[\![d_n]\!]$, $v_{n+1} \notin \alpha$, et $v_{n+1} \Downarrow \Gamma$: et alors r produit v_{n+1}. La propriété est vraie de d. Nous terminons ainsi notre démonstration par récurrence. □

6.4.3 Comportement dynamique des contextes λ-clos

Nous démontrons un nouveau lemme des développements finis, qui ici ne s'applique pas aux ensembles finis de radicaux, mais aux ensembles finis de contextes λ-clos fortement normalisables.

Définition 6.31 (contexte λ-clos fortement normalisable) *Un contexte λ-clos α est fortement normalisable lorsqu'il n'existe pas de dérivations infinie relative à $\{\alpha\}$.*

Deux axiomes dynamiques sur les contextes λ-clos

Nous démontrerons le résultat des développements finis de la même manière qu'au chapitre 3, grâce à l'étude d'un comportement dynamique, dans notre cas des contextes λ-clos. La perspective est changée, mais les axiomes décrivent la même dynamique de réécriture qu'au chapitre 3. C'est ainsi que le premier axiome correspond à l'axiome fd-1 de duplication:

Axiome sn-6 duplication
Soit un radical r et un contexte λ-clos α tels que $r \in \alpha$. Soient trois contextes λ-clos β, β_1 et β_2 tels que $\beta[\![r]\!]\beta_1$ et $\beta[\![r]\!]\beta_2$. Si $\beta_1 \neq \beta_2$ alors ($\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$).

Le prochain axiome est une variation de l'axiome fd-2 d'instantiation. Le cadre des contextes λ-clos permet d'en donner une présentation plus simple. De manière informelle, voici pourquoi. Les contextes λ-clos sont clos par relation d'agrippement, c'est-à-dire: si un contexte λ-clos α contient un radical r, $r \in \alpha$, et r agrippe le radical u, $r \ll u$, alors u rencontre α, $u \Downarrow \alpha$. Supposons trois contextes λ-clos α, β, γ disjoints et trois radicaux $r \in \gamma$, $u \in \alpha$ et $v \in \beta$ tels que $\alpha[\![r]\!]\alpha'$, $\beta[\![r]\!]\beta'$, $u[\![r]\!]u'$, $v[\![r]\!]v'$, $u' \in \alpha'$, $v' \in \alpha'$ avec $\alpha' < \beta'$ et $v'\mathsf{R}_+u'$. L'axiome fd-2 propose dans ce cas ($u' < v'$) l'alternative ($r \ll u$ et $r < v$) ou $u < v$. Dans le cadre des contextes λ-clos, cela devient ($u \Downarrow \gamma$ et $\gamma < \beta$), ou bien ($\alpha < \beta$). Le premier cas implique $\gamma = \alpha$ parce que $\gamma \Uparrow \alpha$ tandis que $u \in \alpha$ et $u \Downarrow \gamma$; on déduit de $\gamma < \beta$ que $\alpha < \beta$. Les deux alternatives de l'axiome fd-2 sont donc réunies en une seule: $\alpha < \beta$. On peut faire l'économie d'une relation d'agrippement $\ll$ sur les contextes λ-clos. D'une certaine façon, les contextes λ-clos se comportent dans le calcul d'ordre supérieur comme des éléments d'un calcul du premier ordre.

Axiome sn-7 instantiation
Soit $r \in \gamma$ avec $\gamma \Uparrow \alpha$ et $\gamma \Uparrow \beta$, et $\alpha[\![r]\!]\alpha'$, $\beta[\![r]\!]\beta'$. Alors $\alpha' < \beta' \Longrightarrow \alpha < \beta$.

Démonstration du lemme des développements finis, 1

Nous faisons l'hypothèse d'une dérivation $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ infinie relative à un ensemble Γ de contexte λ-clos deux à deux disjoints:

$$\forall(\alpha,\beta) \in \Gamma^2, \quad \alpha \Uparrow \beta$$

Nous proposons la définition suivante:

Définition 6.32 (ligne de contextes résidus) *Soit $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une dérivation infinie à partir de a et γ un contexte λ-clos de a. On appelle ligne de résidus de γ par $\mathcal{D}$ les suites $(\gamma_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ où $\gamma_1 = \gamma$ et $\forall i \in \mathbf{N}^*, \gamma_i[\![u_i]\!]\gamma_{i+1}$. On dit que $\mathcal{D}$ contient n fois $(\gamma_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ lorsque l'ensemble $\{i \in \mathbf{N}^*,\ u_i \in \gamma_i\}$ a pour cardinal n.*

Quel que soit l'entier N, nous voulons démontrer qu'il existe un contexte $\gamma \in \Gamma$ et une ligne $(\gamma_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de résidus de γ tels que $u_i \in \gamma_i$ un nombre de fois plus grand que N.

Nous procédons par l'absurde, comme en témoigne la prochaine définition.

Définition 6.33 *Soit Γ un ensemble de contextes λ-clos coinitiaux et $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une dérivation infinie relative à Γ. Nous écrivons $\mathcal{P}(\Gamma,\mathcal{D})$ lorsque:*

1. *les contextes λ-clos qui appartiennent à Γ sont deux à deux disjoints,*
2. *et il existe un entier N tel que pour tout contexte $\gamma \in \Gamma$ et toute ligne $\vec{\gamma} = (\gamma_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de résidus de γ par $\mathcal{D}$, la dérivation $\mathcal{D}$ ne contienne jamais $\vec{\gamma}$ plus de N fois.*

Notre objectif est de démontrer en lemme 6.39 que la propriété $\mathcal{P}(\Gamma,\mathcal{D})$ n'est jamais vrai. Les définitions suivantes seront utiles.

Définition 6.34 *Soit Γ un ensemble de contextes coinitiaux et $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une dérivation infinie relative à Γ telle que $\mathcal{P}(\Gamma,\mathcal{D})$. Nous écrirons $N^{\mathcal{D}}(\vec{\gamma})$ le cardinal de $\{i \in \mathbf{N}^*,\ u_i \in \gamma_i\}$, puis $N^{\mathcal{D}}(\gamma)$ le maximum des $N^{\mathcal{D}}(\vec{\gamma})$ pour les lignes $\vec{\gamma}$ de résidus de $\gamma \in \Gamma$ par $\mathcal{D}$.*

La propriété $\mathcal{P}(\Gamma,\mathcal{D})$ se transmet par résidus: si $\alpha \in \Gamma$ et $r \in \alpha$ alors $\mathcal{P}(\Gamma',\mathcal{D}')$ pour $\Gamma[\![r]\!]\Gamma'$ et $r\cdot\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. De plus, $N^{\mathcal{D}'}(\gamma') \leq N^{\mathcal{D}}(\gamma)$ si $\gamma[\![r]\!]\gamma'$, qui devient $N^{\mathcal{D}'}(\gamma') < N^{\mathcal{D}}(\gamma)$ lorsque $r \in \gamma$.

Nous voulons construire pour tout couple $(\Gamma,\mathcal{D})$ tel que $\mathcal{P}(\Gamma,\mathcal{D})$, un multi-ensemble $\mathcal{O}_\Gamma^{\mathcal{D}}$ tel que:

$$\mathcal{O}_\Gamma^{\mathcal{D}} > \mathcal{O}_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'} \text{ si } \mathcal{D} = r\cdot\mathcal{D}' \text{ et } \Gamma' = \Gamma[\![r]\!]$$

La construction reprend le principe employé lors de la démonstration du lemme des développements finis dans les systèmes du premier ordre: Définir une hauteur $o_\Gamma^{\mathcal{D}}(\gamma)$ qui n'augmente pas par résidus, et dont la valeur est majorée strictement par $o_\Gamma^{\alpha}(\mathcal{D})$ lorsque $\alpha \in \Gamma$ et $\alpha < \gamma$. La définition de hauteur d'un contexte λ-clos γ dans Γ est très proche de la définition 3.4 de hauteur dans un ensemble U de radicaux coinitiaux.

Définition 6.35 *Soit Γ un ensemble fini de contextes λ-clos coinitiaux et $\mathcal{D}$ une dérivation infinie relative à Γ. On suppose que $\mathcal{P}(\Gamma, \mathcal{D})$, ce qui permet de définir les $N^{\mathcal{D}}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

- *On appelle Γ-chaîne toute suite finie $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ de contextes λ-clos de Γ telle que $\forall i, \gamma_i < \gamma_{i+1}$.*
- *$o_\Gamma^{\mathcal{D}}(\gamma)$ est défini comme un multi-ensemble maximal parmi les*

$$\{\!\{N^{\mathcal{D}}(\gamma_i),\ \textit{pour } 1 \leq i \leq n,\ \textit{avec } (\gamma_1, ..., \gamma_n)\ \textit{une } \Gamma\textit{-chaîne}\}\!\}$$

  Ce maximum existe parce que Γ est fini et que $<$ est un ordre sur des contextes λ-clos disjoints.

Lemme 6.36 (les hauteurs décroissent) *Soit Γ un ensemble de contextes λ-clos et $\mathcal{D}$ une dérivation infinie relative à Γ telle que $\mathcal{P}(\Gamma, \mathcal{D})$. Soit Γ' et $\mathcal{D}'$ tels que $\Gamma[\![r]\!]\Gamma'$ et $\mathcal{D} = r \cdot \mathcal{D}'$. Si $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma[\![r]\!]\gamma'$ alors $o_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'}(\gamma') \leq o_\Gamma^{\mathcal{D}}(\gamma)$.*

Démonstration: de la même manière que nous avons démontré le lemme 3.5 de persistance la chaîne. Nous devrons tenir compte ici de la valeur des $N^{\mathcal{D}}(\gamma)$, alors que chaque radical compte pour une unité dans la définition 3.4. Soit $\alpha'_1 < ... < \alpha'_n$ une Γ'-chaîne. Nous montrons par récurrence sur n que toute suite $(\alpha_1, ...\alpha_n)$ telle que $\forall i, 1 \leq i \leq n \implies \alpha_i[\![r]\!]\alpha'_i$ est une Γ-chaîne. La proposition est triviale si $n = 1$. Supposons une Γ'-chaîne $\alpha'_1 < ... < \alpha'_n$: toute suite $(\alpha_2, ..., \alpha_{n+1})$ telle que $\alpha_i[\![r]\!]\alpha'_i$ pour $2 \leq i \leq n+1$ est une Γ-chaîne $\alpha_2 < ... < \alpha_{n+1}$. Soit α_1 un contexte de Γ tel que $\alpha_1[\![r]\!]\alpha'_1$. Le radical r se trouve dans un contexte λ-clos γ de Γ, et donc $\gamma \Uparrow \alpha_1$, $\gamma \Uparrow \alpha_2$ et $\alpha_1 \Uparrow \alpha_2$. L'axiome sn-7 conclut alors $\alpha_1 < \alpha_2$ de $\alpha'_1 < \alpha'_2$. La suite $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$ est donc une Γ-chaîne: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_{n+1}$, ce qui termine notre première partie de démonstration.

Supposons que $\gamma[\![r]\!]\gamma'$. Soit une Γ'-chaîne $(\gamma'_1, ..., \gamma'_p)$ pour $\gamma'_1 = \gamma'$. Les contextes γ'_i se trouvent dans $\Gamma' = \Gamma[\![r]\!]$, ce qui fait qu'il existe des contextes λ-clos γ_i de Γ, avec $\gamma_1 = \gamma$, tels que $\gamma_i[\![r]\!]\gamma'_i$ pour $1 \leq i \leq p$. La valeur de chacun des $N^{\mathcal{D}}(\gamma_i)$ majore $N^{\mathcal{D}}(\gamma'_i)$. Le multi-ensemble

$$\{\!\{N^{\mathcal{D}}(\gamma_i),\ \text{pour } 1 \leq i \leq p\}\!\}$$

majore donc

$$\{\!\{N^{\mathcal{D}'}(\gamma'_i),\ \text{pour } 1 \leq i \leq p\}\!\}$$

Dès lors, puisque la propriété est vraie pour toute Γ'-chaîne $(\gamma'_1, ..., \gamma'_p)$ au départ de γ', le multi-ensemble $o_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'}(\gamma')$ est bornée par $o_\Gamma^{\mathcal{D}}(\gamma)$, ce qui termine la démonstration. □

Nous proposons la définition suivante.

Définition 6.37 *Soit un ensemble Γ de contextes λ-clos et une dérivation $\mathcal{D}$ infinie relative à Γ telle que $\mathcal{P}(\Gamma, \mathcal{D})$. Nous définissons comme suit le multi-ensemble $\mathcal{O}_\Gamma^{\mathcal{D}}$:*

$$\mathcal{O}_\Gamma^{\mathcal{D}} = \{\!\{o_\Gamma^{\mathcal{D}}(\gamma),\ \textit{pour } \gamma \in \Gamma\}\!\}$$

La construction du multi-ensemble $\mathcal{O}_\Gamma^\mathcal{D}$ reprend le principe rencontré au chapitre 3 dans les systèmes du premier ordre: définir une hauteur $o_\Gamma^\mathcal{D}(\gamma)$ qui n'augmente pas par résidus, et dont la valeur est majorée strictement par $o_\Gamma^\alpha(\mathcal{D})$ lorsque $\alpha \in \Gamma$ et $\alpha < \gamma$. Notre définition de hauteur d'un contexte λ-clos γ dans Γ est très proche de la définition 3.4 de hauteur dans un ensemble U de radicaux coinitiaux.

Lemme 6.38 (décroissance de $\mathcal{O}_\Gamma^\mathcal{D}$) *Soit Γ et Γ' deux ensembles de contextes λ-clos coinitiaux tels que $\Gamma[\![r]\!]\Gamma'$. Soit deux dérivations infinies $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ telle que $\mathcal{D} = r \cdot \mathcal{D}'$ et $\mathcal{P}(\Gamma, \mathcal{D})$. Alors*

$$\mathcal{O}_\Gamma^\mathcal{D} > \mathcal{O}_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'}$$

Démonstration: Soit Γ et $\mathcal{D}$ tels que $\mathcal{P}(\Gamma, \mathcal{D})$ avec $\mathcal{D} = r \cdot \mathcal{D}'$ et $\Gamma' = \Gamma[\![r]\!]$. Nous noterons Γ_r l'ensemble des contextes λ-clos γ qui appartiennent à Γ et qui contiennent r. Autrement dit,

$$\Gamma_r = \{\gamma \in \Gamma \mid r \in \gamma\}$$

L'ensemble Γ_r n'est pas vide parce que $\mathcal{D}$ est relative à Γ. Soit γ un élément de Γ_r, et γ' un contexte λ-clos tel que $\gamma[\![r]\!]\gamma'$. On sait par définition que $N^\mathcal{D}(\gamma) > N^{\mathcal{D}'}(\gamma')$, puisque $\mathcal{D}$ “rencontre” γ le nombre d'étape que $\mathcal{D}'$ “rencontre” γ', plus une. On peut reprendre la démonstration du lemme 6.36 avec cette information et montrer de suite que

$$o_\Gamma^\mathcal{D}(\gamma) > o_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'}(\gamma') \qquad (A)$$

Nous utilisons l'axiome sn-6 pour signaler qu'un contexte $\alpha \notin \Gamma_r$ que r duplique $\alpha[\![r]\!]\alpha_1$, $\alpha[\![r]\!]\alpha_2$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$ se trouve emboîté sous un contexte $\gamma \in \Gamma_r$. Ce contexte α a donc une hauteur $o_\Gamma^\mathcal{D}(\alpha)$ strictement plus petite que celle $o_\Gamma^\mathcal{D}(\gamma)$ de γ. Les hauteurs des résidus α' de α sont donc strictement majorées par $o_\Gamma^\mathcal{D}(\gamma)$:

$$o_\Gamma^\mathcal{D}(\gamma) > o_\Gamma^\mathcal{D}(\alpha) \geq o_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'}(\alpha') \qquad (B)$$

Les deux inégalités (A) et (B) qui sont strictes et le lemme 6.36 établissent que le multi-ensemble $\mathcal{O}_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'} = \{o_{\Gamma'}^{\mathcal{D}'}(\alpha'),\ \alpha' \in \Gamma'\}$ est *strictement* majoré par $\mathcal{O}_\Gamma^\mathcal{D} = \{o_\Gamma^\mathcal{D}(\alpha),\ \alpha \in \Gamma\}$, ce qui démontre le lemme 6.38. □

Lemme 6.39 (Lemme des développements finis, 1) *Soit une dérivation $\mathcal{D} = (u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ infinie relative à un ensemble Γ de contexte λ-clos deux à deux disjoints: $\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \alpha \Uparrow \beta$. Quel que soit l'entier N, il existe un contexte $\gamma \in \Gamma$ et une ligne $(\gamma_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ de résidus de γ tel que $u_i \in \gamma_i$ un nombre de fois plus grand que N.*

Démonstration: nous terminons de démontrer le lemme 6.39 en montrant que la dérivation $\mathcal{D} = (u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ ne peut pas être infinie. Nous définissons $d_i = u_1 \cdots u_i$, $\mathcal{D}^i$ telle que $\mathcal{D} = d_i \cdot \mathcal{D}^i$, et $\Gamma_i[\![u_i]\!]\Gamma_{i+1}$ pour $\Gamma_1 = \Gamma$. La suite des ordinaux $\mathcal{O}_{\Gamma_i}^{\mathcal{D}_i}$ décroit alors, ce qui contredit le caractère infini de $\mathcal{D}$. Nous pouvons ainsi affirmer l'absurdité de nos hypothèses, et en déduire l'existence pour tout $N \in \mathbf{N}$ d'une suite de contextes $(\gamma_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ résidus de $\gamma_1 \in \Gamma$: $\forall i, \gamma_i[\![u_i]\!]\gamma_{i+1}$ telle que $u_i \in \Gamma_i$ un nombre de fois plus grand que N. On conclut la propriété du lemme 6.39. □

La projection et ses propriétés; le lemme des développements finis, 2

Nous avons supposé qu'il existe une dérivation $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ infinie relative à Γ, un ensemble de contextes λ-clos disjoints deux à deux. Nous venons de montrer qu'il existe dans ce cas pour tout $n \in \mathbf{N}$ une ligne de contextes $\vec{\gamma} = (\gamma_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ résidus: $\forall i \in \mathbf{N}^*,\ \gamma_i[\![u_i]\!]\gamma_{i+1}$ d'un contexte $\gamma = \gamma_1$ de Γ tel que $\mathcal{D}$ rencontre $\vec{\gamma}$ un nombre de fois plus grand que n: le cardinal de $\{i,\ u_i \in \gamma_i\}$ est supérieur à n. On en déduit si Γ est fini qu'il existe un contexte $\gamma \in \Gamma$ tel qu'il existe pour tout $n \in \mathbf{N}$ une ligne de résidus de γ par $\mathcal{D}$ que $\mathcal{D}$ contient plus de n fois. Intuitivement, on peut enchaîner un nombre arbitraire de réduction dans les résidus du contexte γ. Ces radicaux sont alternés avec des réductions qu'opère $\mathcal{D}$ sur les autres contextes de $\Gamma[\![u_1 \cdots u_i]\!]$. Rien ne permet formellement de montrer que γ n'est pas fortement normalisable. Nous proposons ici une construction par "projection" qui transforme les lignes de réduction de γ par $\mathcal{D}$ en dérivations relatives à γ. Le procédé permet de construire dans notre cas des dérivations relatives à γ de longueur arbitraire, et donc de démontrer sa non terminaison.

Axiome sn-8 La loi de projection
Soit $\mathcal{D}$ une dérivation infinie et $\vec{\gamma}$ une ligne de réduction de $\gamma \in \Gamma$ par $\mathcal{D}$. Il existe alors une dérivation que nous écrivons $\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma}$ qui est relative à γ. On appelle cette dérivation la projection par $\mathcal{D}$ de $\vec{\gamma}$ sur γ.

Nous ferons l'hypothèse d'un certain respect de notre construction vis à vis du nombre de fois que $\mathcal{D}$ réduit dans $\vec{\gamma}$: pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma}$ est de longueur au moins k lorsque $\mathcal{D}$ réduit dans $\vec{\gamma}$ plus de n fois.

Nous pouvons maintenant démontrer la seconde partie du lemme des développements finis:

Théorème 6.4 (lemme des développements finis, 2) *Soit Γ un ensemble de contextes λ-clos deux à deux disjoints. Si Γ est fini et contient des contextes fortement normalisables alors toutes les dérivations relatives à Γ sont finies.*

Démonstration: nous utiliserons le lemme de König. Supposons qu'il existe une dérivation $\mathcal{D}$ relative à Γ et infinie. Du fait que l'ensemble Γ est fini, le lemme 6.39 permet d'affirmer l'existence d'un contexte λ-clos γ dans Γ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une ligne de réduction $\vec{\gamma}$ de γ par $\mathcal{D}$ que $\mathcal{D}$ réduit plus de n fois. L'axiome sn-8 de projection en dérive pour tout k une dérivation relative à γ et de longueur supérieure à k. Soit a le terme dont part $\mathcal{D}$ et qui contient les contextes de Γ. L'arbre formé par les projections $\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma}$ est infini dans l'espace des dérivations $\mathcal{D}_a$ à partir de a. Les termes ne contiennent qu'un nombre fini de radicaux d'après l'axiome B+. Nous pouvons donc utiliser le lemme de König, et déduire l'existence d'une dérivation infinie $\mathcal{D}'$ tel que les dérivations finies δ que $\mathcal{D}$ prolonge sont relatives à γ. La dérivation $\mathcal{D}'$ est donc elle aussi relative à γ. On en conclut que γ n'est pas fortement normalisable, ce qui contredit notre hypothèse sur les contextes de Γ. Il n'existe donc pas de dérivation $\mathcal{D}$ infinie relative à Γ, ce qui confirme notre théorème. $\square$

Axiome sn-9 Loi de l'harmonique
Si $\gamma \in H_r$ tandis que $\vec{\gamma}$ est une ligne de réduction de γ par $\mathcal{D}$ alors $(\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma})\mathsf{R}_+ r$.

6.5 Théorème de normalisation forte

Définition 6.40 *Soit $\mathcal{D}$ un système à contextes λ-clos. On écrit qu'un radical u produit un radical v à permutations carrées près lorsqu'il existe deux radicaux u' et v' et deux dérivations d et e tels que:*

$$u \overset{d}{\underset{\Box}{\mapsto}} u',\ v \overset{e}{\underset{\Box}{\mapsto}} v' \text{ tandis que } u' \text{ produit } v'$$

Lemme 6.41 (lemme de la production permanente) *Tout radical u_i dans la dérivation infinie $\mathcal{D} = (u_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ produit à permutations carrées près un radical u_j, $j > i$, réduit par $\mathcal{D}$ ultérieurement.*

Démonstration: nous étudions le radical r_1 réduit à une certaine étape de $\mathcal{D} = d \cdot r_1 \cdot \mathcal{D}_1$. On définit inductivement les dérivations infinies $\mathcal{D}_i$, les radicaux v_i et r_i par:

- $v_i \in \mathsf{Ext}\ r_i \cdot \mathcal{D}_i$ et $v_i \neq r_i$,
- $v_i \cdot r_{i+1} \cdot \mathcal{D}_{i+1}$ est le résultat de l'extraction de v_i dans $r_i\mathcal{D}_{i+1}$, où donc $r_i \overset{v_i}{\underset{\Box}{\mapsto}} r_{i+1}$

Le processus de définition s'arrête en $i = k$ lorsque $\mathsf{Ext}\ r_k \cdot \mathcal{D}_k$ ne contient que r_k. Supposons que le processus ne s'arrête jamais, ce qui entraîne l'existence d'une dérivation $\mathcal{D}_\infty$ telle que $\delta \mathsf{R}_\Box r$ si D_∞ prolonge δ. L'ensemble $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}_\infty$ serait alors inclus dans $\mathsf{Ext}\ \mathcal{D}_1 - \{r_1\}$, ce qui en ferait un ensemble *strictement* plus grand $\lll$ que $\mathsf{Ext}\ r \cdot \mathcal{D}_1$ et contredirait la construction de $\mathcal{D}$. Il existe donc un entier k tel que $r_1 \overset{v_1\cdots v_{k-1}}{\underset{\Box}{\mapsto}} r_k$ et $\mathsf{Ext}\ r_k \cdot \mathcal{D}_k = \{r_k\}$. Nous utilisons le théorème 6.3 de l'harmonique parce que r est le seul radical qu'on peut extraire de $r_k \cdot \mathcal{D}_k$ qui reste une dérivation standard. L'harmonique H_r est un ensemble fini de contextes deux à deux disjoints. La dérivation $\mathcal{D}_k$ peut être relative à H_r, mais alors H_r contient un contexte non fortement normalisable d'après le lemme 6.4 des développements finis. Sinon, r_k produit un radical dans $\mathcal{D}_k$, ce que nous aimerions montrer. Supposons que H_r contienne un contexte γ non fortement normalisable. Il existe d'après l'axiome sn-9 de l'harmonique et la démonstration du lemme 6.4 une dérivation infinie $\mathcal{D}_\gamma$ telle que $\delta_\gamma \mathsf{R}_+ r_k$ pour les dérivations δ_γ que prolonge $\mathcal{D}_\gamma$. La dérivation $\mathcal{D}_\gamma$ peut être standardisée sans difficulté en appliquant la construction 6.1 par extractions répétées. On obtient ainsi une dérivation $\mathcal{D}'_\gamma$ standard et infinie telle que $\delta_\gamma \mathsf{R}_+ r_k$ pour toute dérivation *standard* que $\mathcal{D}'_\gamma$ prolonge. Le lemme 6.18 assure que $v_1 \cdot v_{k-1}$ est standard, ce qui fait que $v_1 \cdots v_{k-1} \cdot \mathcal{D}'_\gamma$ est standard. De plus,

$$\mathsf{Ext}\ (v_1 \cdots v_{k-1} \cdot r_k) \lll \mathsf{Ext}\ (v_1 \cdots v_{k-1} \cdot \delta_\gamma)$$

de façon stricte d'après le corollaire 6.21, pour un tel δ_γ. Il existe une de ces dérivations δ_γ que prolonge $\mathcal{D}'_\gamma$ pour laquelle $\mathsf{Ext}\ (v_1 \cdots v_{k-1} \cdot \mathcal{D}'_\gamma)$ vaut $\mathsf{Ext}\ (v_1 \cdots v_{k-1} \cdot \delta_\gamma)$. On en déduit que

$$\mathsf{Ext}\ (v_1 \cdots v_{k-1} \cdot r_k) \lll \mathsf{Ext}\ (v_1 \cdots v_{k-1} \cdot \mathcal{D}'_\gamma)$$

de façon stricte. La dérivation infinie $\mathcal{D}_1 \cdot v_1 \cdots v_{k-1} \cdot \mathcal{D}'_\gamma$ est donc infinie. La dérivation $\mathcal{D}$ n'est pas maximale au sens du lemme 6.17. Tous les contextes λ-clos de H_{r_k} sont donc fortement normalisables. Le radical r_k produit donc un radical u'_l dans $\mathcal{D}_k$. Il existe un radical u_l réduit par $\mathcal{D}_1$ et une dérivation d telle que $u_l \overset{d}{\underset{\Box}{\mapsto}} u'_l$. De même, $r_1 \overset{v_1\cdots v_{k-1}}{\underset{\Box}{\mapsto}} r_k$. Le radical r_1 produit donc u_l à permutations carrées près, ce qui prouve notre lemme de la production permanente.

□

Définition 6.42 *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \partial_0, \partial_1, [\![\cdot]\!])$ un système à contexte λ-clos. On appelle étiquetage de $\mathcal{D}$ une fonction* $\mathsf{etiq}(\cdot)$ *de $\mathcal{R}$ vers un ensemble ordonné $(X, <_X)$. On dit que l'étiquetage de $\mathcal{D}$ est décroissant lorsque pour tout couple de radicaux $(u, v) \in \mathcal{R}^2$:*

1. *si $u \overset{r}{\underset{\square}{\mapsto}} v$ alors* $\mathsf{etiq}(u) = \mathsf{etiq}(v)$,
2. *et si u produit v alors* $\mathsf{etiq}(v) <_X \mathsf{etiq}(u)$.

On dit que la profondeur de production de $\mathcal{D}$ est bornée lorsqu'il existe un étiquetage décroissant vers un ensemble X dont l'ordre $<_X$ est bien fondé.

Théorème 6.5 (Normalisation forte) *Soit un système à contexte λ-clos qui vérifie les axiomes de standardisation, les axiomes* (sn-1)—(sn-9), *l'axiome* E *et le critère 8 de transitivité faible. Si la profondeur de production est bornée alors le calcul termine fortement.*

6.6 Conclusion en deux points

Production et création dans le λ-calcul

Nous voudrions en conclusion rappeler pourquoi le théorème 6.1 est vrai alors qu'il part du processus de création, non pas de production. Nous montrons que les notions de création et de production coïncident dans le cas du λ-calcul, la première définie au moyen des radicaux, la seconde tel que nous le proposons.

En plus de la confluence, cette correspondance provient d'une particularité syntaxique du λ-calcul qui correspond dans le cadre de l'optimalité, voir [Lév 80a], à la capacité qu'ont les *zig-zags* de décrire les familles de radicaux. Andrea Asperti et Cosimo Laneve ont montré que cette relation de zig-zag ne suffit plus dès qu'on étudie les Systèmes de Réduction Combinatoire (orthogonaux). Notre étude est un développement détourné de leur remarque et la première tentative de décrire simplement les mécanismes mis en jeu dans les deux cas de la normalisation forte et de l'optimalité.

Plus précisement: supposons que r produit un radical dans $r \cdot d$. Appelons s le premier radical produit par r dans d ; nous montrons que r "crée" s. c'est-à-dire $s \# H_r[\![r \cdot d]\!]$ pour une certaine dérivation d:

$$s \Downarrow H_r[\![r \cdot d]\!] \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in H_r[\![r \cdot d]\!], s \notin \alpha$$

Pour simplifier, nous nous placerons dans les conditions de la démonstration de normalisation forte: $r \cdot d$ est standard et suit une stratégie "zoom-in". Ecrivons $L = (\lambda x.M)PQ_1...Q_k$ le sous-terme correspondant à r, et $L' = M[x := P]Q_1...Q_k$ le sous-terme obtenu après réduction de r. La production de s a lieu soit au-dessus soit en-dessous de M.
En-dessus elle a lieu quand $M \to \lambda y.M'$ entre $\lambda y.M'$ et Q_1: on peut donc réécrire

$$(\lambda x.M)PQ_1...Q_k \overset{e}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.\lambda y.M')PQ_1...Q_k$$

puis réduire le radical r' résidu de r par e. On obtient le terme $(\lambda y.M'[x := P])Q_1...Q_k$ dont le radical de tête est justement s qui est donc créé par r' — un résidu de r.
En dessous la production a lieu entre M et une occurrence de P ; plus exactement entre M' et $\lambda y.P'$ où $M \overset{e}{\twoheadrightarrow} M'$ et $P \overset{f}{\twoheadrightarrow} \lambda y.P'$. Ecrivons $d = d_1 \cdot u \cdot d_2$. Le point important ici est que nous pouvons compléter la dérivation d_1 en $d_1 \cdot f^*$ pour obtenir:

$$L \overset{r}{\to} M[x := P]Q_1...Q_k \overset{d_1 \cdot f^*}{\twoheadrightarrow} M'[x := P']Q_1...Q_k$$

En retardant la réduction de r on obtient:

$$L \stackrel{f'}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.M')P'Q_1...Q_k \stackrel{r'}{\rightarrow} M'[x := \lambda y.P']Q_1...Q_k$$

de telle façon que r' crée un radical s' résidu de s par une certaine dérivation g. Cette dérivation g qui mène de s à s' existe parce que les occurrences de P sont disjointes dans $M[x := P]$ — ce qui permet de les réécrire en P' sans qu'aucune n'efface l'autre durant la procédure. C'est la même raison qui fait que le zig-zag sait décrire complètement les familles de l'optimalité dans le cas du λ-calcul. Voir [Oos 96] sur le même sujet.

Saturation et substitutions explicites

Notre démonstration de terminaison forte suit un argument de "plus petit contre-exemple". L'idée de cette procédure nous est venue après l'étude d'un article [BBLR 95] qui prouve la normalisation forte du $\lambda\upsilon$-calcul typé, un λ-calcul avec substitutions explicites mais sans composition. Je serais curieux de savoir si une fédération de nos deux techniques est possible. On pourrait démontrer *directement* qu'un calcul avec substitutions explicite typé termine fortement — au lieu comme fait [BBLR 95] d'utiliser l'interprétation de Hardin dans le λ-calcul et de montrer un résultat de préservation de (NF).

L'idée d'une dérivation standard infinie m'est venue après la présentation par Femke van Raamsdonk [Ram 96] de la propriété de saturation utilisée dans les preuves par Tait-Girard de normalisation forte. La preuve par "zoom-in" que je propose ici provient de cette propriété "sémantique" de saturation. J'ai l'espoir que cette réinterprétation dynamique n'est qu'une étape vers la meilleure compréhension combinatoire de la preuve de Tait.

Chapitre 7

Les Systèmes à Réduction Combinatoire (CRS)

Ces systèmes ont été introduits par Jan Willem Klop [Klo 80] pour généraliser le λ-calcul et les arbres de réduction du premier ordre. Nous recommandons la lecture de [KOR 93] pour une introduction raisonnée au système. Nous y reprenons les définitions suivantes:

7.1 Définition du système

L'alphabet d'un CRS est défini par:

(1) un ensemble $\mathsf{Var} = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ de *variables*,
(2) un ensemble $\mathsf{MVar} = \{Z_n^k | k, n \geq 0\}$ de *méta-variables*; on appelle k l'arité de Z_n^k,
(3) un ensemble $\mathcal{F}$ de *symboles de fonction*, chacun avec une arité fixée.

On définit par induction l'ensemble des méta-termes:

(1) les variables sont des méta-termes,
(2) si M est un méta-terme et x une variable alors $[x]M$ est un méta-terme,
(3) si F est un symbole k-aire ($n \geq 0$) et $M_1, ..., M_k$ sont des méta-termes alors $F(M_1, ..., M_k)$ est un méta-terme,
(4) si Z_n^k est une méta-variable d'arité k ($k \geq 0$) et $M_1, ..., M_k$ sont des méta-termes alors $Z_n^k(M_1, ..., M_k)$ est un méta-terme (en particulier, Z_n^0 est un méta-terme).

Les termes sont définis comme les méta-termes sans méta-variables. Nous définissons la α-conversion entre méta-termes comme pour le λ-calcul: par exemple $[x].F(x) \sim_\alpha [y].F(y)$. Nous appellerons α-(méta)-termes les classes de (méta-)termes par α-conversion. Nous reporterons toutes les constructions des méta-termes sur les α-méta-termes de la manière évidente.

Une règle de réécriture est un couple (M, N) tel que:

(a) M et N sont des α-méta-termes ;
(b) M est de la forme $F(M_1, ..., M_k)$;
(c) les méta-variables Z_n^k qui apparaissent dans N apparaissent aussi dans M; les variables x_n libres de N sont des variables libres de M;
(d) les méta-variables Z_n^k dans M n'apparaissent que sous la forme $Z_n^k(x_1, ..., x_k)$ où les x_i $(i = 1, ..., k)$ sont des variables liées. De plus, les x_i sont distincts deux à deux.

7.1.1 Valuation

Soit $(x_1, ..., x_n)$ un n-uplet de variables deux à deux distinctes, et t un α-terme. On appelle l'expression $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$ un substitut n-aire: le symbole $\underline{\lambda}$ est utilisé comme un 'méta-lambda' qu'on distingue ainsi de celui du λ-calcul. Les variables $x_1, ..., x_n$ qui apparaissent dans t sont liées dans le substitut $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$: on peut les renommer de la manière habituelle en prenant garde à la capture de nom. On appelle α-substitut une classe de substituts par α-conversion. Les variables libres de $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$ sont les variables libres de t hormis les $x_1, ..., x_n$. On peut appliquer le α-substitut $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$ à un n-uplet $(t_1, ..., t_n)$ de α-termes du CRS, ce qui entraîne une substitution simultanée:

$$(\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t)(t_1, ..., t_n) = t[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$$

Un α-substitut $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$ est linéaire lorsque chacune des variables x_i n'apparait qu'une fois dans t. Une valuation est une fonction σ qui assigne à chaque méta-variable Z_n^k un α-substitut k-aire:

$$\langle Z_n^k, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).t$$

et à chaque variable assigne une variable:

$$\langle x_m, \sigma\rangle = x_n$$

Nous supposerons que $\{x \in \mathsf{Var} \mid \langle x, \sigma\rangle \neq x\}$ est toujours fini.
On étend les valuations sur les α-méta-termes comme suit:

(1) $\langle x, \sigma\rangle = \langle x, \sigma\rangle$ si $x \in \mathsf{Var}$,
(2) $\langle [x]M, \sigma\rangle = [x]\langle M, \sigma\rangle$ où $x = \langle x, \sigma\rangle$ n'apparaît libre dans aucun des $\langle Z_n^k, \sigma\rangle$ si Z_n^k se trouve dans M, et ne vaut aucun des $\langle y, \sigma\rangle \in \mathsf{Var}$ quand $y \neq x$ est une variable libre de M,
(3) $\langle F(M_1, ..., M_n), \sigma\rangle = F(\langle M_1, \sigma\rangle, ..., \langle M_n, \sigma\rangle)$,
(4) $\langle Z_n^k(M_1, ..., M_k), \sigma\rangle = \langle Z_n^k, \sigma\rangle(\langle M_1, \sigma\rangle, ..., \langle M_k, \sigma\rangle)$

La propagation de la valuation σ à l'intérieur du α-méta-terme M ne doit entrainer aucune capture de variable ou de nom inattendue. La contrainte imposée au cas (2) lors du passage d'un lieur $[x]$ assure que ces captures ne dépendent pas de la présentation du α-méta-terme M et des α-substituts $\langle Z_n^k, \sigma\rangle$: on peut en renommer sans risque les variables par α-conversion, et obtenir des termes $\langle M, \sigma\rangle$ équivalents par α-conversion. Ce qui justifie notre identification des termes par α-conversion: toutes nos manipulations en respectent la contrainte. Nous rattrappons ainsi la présentation originale de Curry, voir [Bar 80] en appendice C, un peu malmenée dans [KOR 93]. La même transformation avait été proposée par Stefan Kahrs, voir [Kah 92].

Nous définissons maintenant les radicaux du système.

7.1.2 Radicaux

Soit $\square$ un symbole en dehors de Var, MVar et $\mathcal{F}$. On appelle contexte un terme avec une ou plusieurs occurrences de $\square$. On note $C[...]$ un contexte avec n occurrences de $\square$, et $C[\ ]$ un contexte avec une seule occurrence de $\square$. On note $C[t_1, ..., t_n]$ le résultat du remplacement dans $C[...]$ des symboles $\square$ de gauche à droite par des termes t_1,...,t_n. La propriété importante des contextes est de conserver les classes de α-conversion: si $t \sim_\alpha t'$ alors $C[t] \sim_\alpha C[t']$. On peut donc considérer les contextes comme des *opérateurs* sur les α-termes. Par exemple, un sous-α-terme s d'un α-terme t est un α-terme tel que $t = C[s]$ pour un certain $C[\ ]$.

Définition 7.1 (radicaux)

(1) Soit $M_g \to M_d$ une règle de réécriture et σ une valuation. On appelle contraction selon la règle $M_g \to M_d$ tout couple $(\langle M_g, \sigma\rangle, \langle M_d, \sigma\rangle)$, où σ est une valuation.

(2) On appelle radical tout triplet (t, o, r) où t est un α-terme $C[a]$ pour lequel o désigne l'unique occurrence de $\square$ dans $C[\ ]$ et (s, t) est une contraction selon la règle $r : M_g \to M_d$. On dit que $C[s]$ est son terme de départ, et $C[t]$ son terme d'arrivée.

(3) dans ce cas, si le α-méta-terme M_g contient une variable libre x avec $\langle x, \sigma\rangle = y$ toujours libre dans $C[s]$, on dit que le radical u utilise la variable y.

(4) soit $u = (s, o_u, r)$ un radical de s et $C[\ ]$ un contexte où $\square$ a pour occurrence o ; on note $C[u]$ le radical $(t, (o \cdot o_u), r)$: si $s \xrightarrow{u} s'$ alors $C[s] \xrightarrow{C[u]} C[s']$.

(5) par abus de notation, nous écrirons $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).s \xrightarrow{u} \underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$ si $s \xrightarrow{u} t$. Nous parlerons alors des radicaux d'un substitut.

La forme particulière des α-méta-termes M_g permet de justifier notre définition 7.1 des radicaux du CRS comme la donnée d'un terme t, d'une occurrence o et d'une règle de réécriture $r : M_g \to M_d$. Deux valuations σ et σ' telles que $s = \langle M_g, \sigma\rangle = \langle M_g, \sigma'\rangle$ associent aux variables et méta-variables de M_g les mêmes variables et les mêmes α-substituts. Ce qui caractérise le résultat de la contraction de s selon r: $\langle M_d, \sigma\rangle = \langle M_d, \sigma'\rangle$, et toutes les constructions ultérieures. Sans cela, nous aurions dû ajouter au triplet la valuation — ou la classe de valuations — que nous envisageons pour la contraction.

7.1.3 Résidus par substitution

Définition 7.2 (résidus d'une méta-variable par substitution) *Soient M un α-méta-terme et σ une valuation. Nous associons par résidu des occurrences de $\langle M, \sigma\rangle$ à toute méta-variable Z^k_m, ce que nous écrirons:*

$$Z^k_m\ [M, \sigma]\ o$$

Nous dirons que Z^k_m a pour résidu l'occurrence $(\langle M, \sigma\rangle, o)$ par application du méta-terme M. La relation $[M, \sigma]$ est définie par induction structurelle sur M:

(1) *si $M = x$ alors Z^k_m n'a pas de résidu par $[M, \sigma]$*

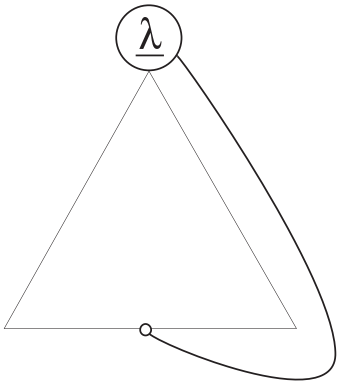
(2) $Z^k_m\ [[x]M', \sigma]\ o \iff o = (1 \cdot o')$ *et* $Z^k_m\ [M', \sigma]\ o'$

(3) $Z^k_m\ [F(M_1, ..., M_n), \sigma]\ o \iff o = (i \cdot o')$ *et* $Z^k_m\ [M_i, \sigma]\ o'$

(4) $Z^k_m\ [Z^l_n(M_1, ..., M_l), \sigma]\ o \iff \begin{cases} o = (o_i \cdot o') \text{ et } Z^k_m\ [M_i, \sigma]\ o' & \text{si } Z^l_n \neq Z^k_m \\ o = \epsilon \text{ ou } o = (o_i \cdot o') \text{ et } Z^k_m\ [M_i, \sigma]\ o') & \text{si } Z^l_n = Z^k_m \end{cases}$

pour (t, o_i) l'occurrence d'une variable x_i dans le substitut $\langle Z^l_n, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_l).t$.

$\langle Z^l_m, \sigma\rangle =$



$\langle M, \sigma\rangle =$

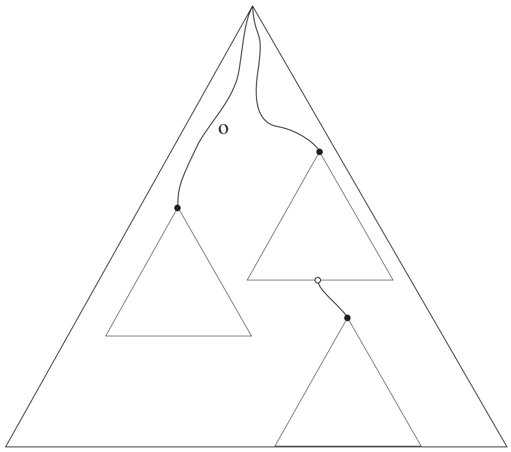


Figure 7.1: résidus d'une méta-variable par substitution

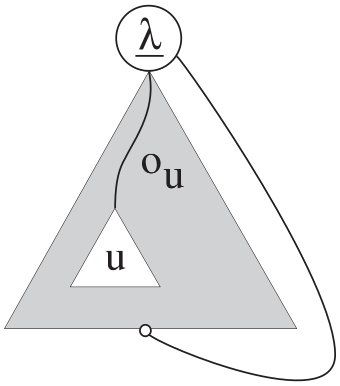
Définition 7.3 *On dit que* $(\langle M,\sigma\rangle, o)$ *provient de l'instantiation (en* o'*) de* Z^l_m *dans* (M,σ) *si et seulement si* $o = (o' \cdot o'')$ *pour* $Z^l_m\ [M,\sigma]\ o'$ *et une occurrence* (t, o'') *du substitut* $\langle Z^l_m, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_l).t$. *On écrit* $(Z^l_m + o'')\ [M,\sigma]\ (o' + o'')$.

Définition 7.4 (résidu d'un radical par substitution) *Soient un* α*-méta-terme* M *et une valuation* σ *telle que* $\langle Z^l_m, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).t$. *Soient* $u = (t, o_u, r)$ *un radical de* t*, et un triplet* $v = (\langle M,\sigma\rangle, o_v, r)$*, peut-être radical de* $\langle M,\sigma\rangle$. *On écrit*

$$(Z^l_m + u)\ [M,\sigma]\ v$$

lorsque $(Z^l_m + o_u)\ [M,\sigma]\ (o + o_u)$ *et* $o_v = (o \cdot o_u)$.

$\langle Z^l_m, \sigma\rangle =$



$\langle M, \sigma\rangle =$

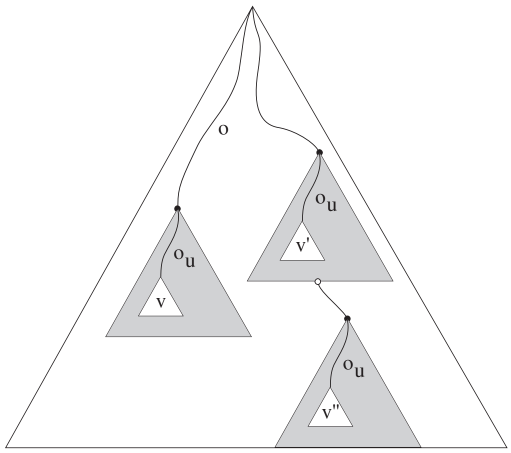


Figure 7.2: résidu d'un radical par substitution

7.1.4 Loi de compatibilité

Nous introduisons maintenant la relation de compatibilité entre radicaux, que nous considérerons réflexive: un radical est compatible avec lui-même. Sinon, soient $u = (t, o_u, r_u)$ et $v = (t, o_v, r_v)$

deux radicaux co-initiaux et distincts. Avec le radical (t, o_u, r_u) sont donnés une règle $r_u : M_g \to M_d$, une valuation σ, et un contexte $C[\ ]$ tels que o_u soit l'occurrence de $\Box$ dans $C[\ ]$ et

$$t = C[\langle M_g, \sigma\rangle] \overset{(t,o_u,r_u)}{\to} C[\langle M_d, \sigma\rangle] = t'$$

- si o_u et o_v sont disjoints[1] alors u et v sont compatibles,

CP-1 si $o_v = o_u \cdot o$, soit $\underline{v}$ le radical de $\langle M_g, \sigma\rangle$ tel que $C[\underline{v}] = v$; les radicaux u et v sont compatibles si et seulement si:

CP-2 il existe un radical $w = (s, o_w, r_v)$ de $\langle Z^k_m, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$ tel que

$$(Z^k_m + w)\ [M_g, \sigma]\ \underline{v}$$

1. et Z^k_m n'apparaît qu'une fois dans M_g, sous la forme $Z^k_m(y_1, ..., y_k)$;

CP-3 et le radical w n'utilise parmi les variables x_i que des variables x_j telles que $\langle P_j, \sigma\rangle \in \mathsf{Var}$ dès que Z^m_k apparaît dans M_d sous la forme $Z^k_m(P_1, ..., P_k)$.

7.1.5 Loi de résidu

Nous définissons maintenant la relation de résidu par réduction d'un radical u. On décide que si $v = u$ ou si u et v ne sont pas compatibles alors v n'a pas de résidu par u. Autrement:

- si o_v est disjoint de o_u, alors v a pour résidu par u le radical (t', o_v, r_u) pour $t \overset{(t,o_u,r_u)}{\to} t'$; l'existence d'un radical ne dépend que du α-terme placé sous son occurrence, α-terme sous v qui ne change pas par réduction de u ;

- si $o_u = (o_v \cdot o)$ alors v a pour résidu par u le radical (t', o_v, r_u) pour $t \overset{(t,o_u,r_u)}{\to} t'$, ce radical existe parce que u et v sont compatibles: on peut présenter le terme t' comme $C[\langle M_g, \sigma'\rangle]$ pour la valuation σ' suivante, définie avec les notations précédentes:

  - $\langle x, \sigma'\rangle \triangleq \langle x, \sigma\rangle$ pour $x \in \mathsf{Var}$,
  - $\langle Z^l_n, \sigma'\rangle \triangleq \langle Z^l_n, \sigma\rangle$ si $Z^l_n \neq Z^k_m$
  - $\langle Z^k_m, \sigma'\rangle \triangleq \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s'$ où $\langle Z^k_m, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$ et $s \overset{w}{\to} s'$.

- si $o_v = (o_u \cdot o)$, soit $\underline{v}$ le radical de $\langle M_g, \sigma\rangle$ tel que $C[\underline{v}] = v$. Les radicaux u et v sont compatibles, donc:

CP-1 il existe un radical $w = (s, o_w, r_v)$ de $\langle Z^k_m, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$ tel que

$$(Z^k_m + w)\ [M_g, \sigma]\ \underline{v}$$

CP-2 et Z^k_m n'apparaît qu'une fois dans M_g, sous la forme $Z^k_m(y_1, ..., y_k)$,

CP-3 et le radical w n'utilise parmi les variables x_i que des variables x_j telles que $\langle P_j, \sigma\rangle \in \mathsf{Var}$ dès que Z^m_k apparaît dans M_d sous la forme $Z^k_m(P_1, ..., P_k)$.

Les résidus de v par u sont les radicaux $v' = C[\underline{v}']$ tels que

$$(Z^k_m + w)\ [M_d, \sigma]\ \underline{v}'$$

[1] C'est-à-dire o_v n'est pas un préfixe de o_u, et o_u n'est pas un préfixe de o_v.

7.2 Définition du système abstrait

Un CRS est déterminé par son alphabet et l'ensemble des règles r_i. Nous construisons l'espace abstrait $\mathcal{D}$ qui correspond au CRS en question.

- $\mathcal{T}$ est l'ensemble des α-termes du CRS, c'est-à-dire des classes $\sim_\alpha$ de termes,
- $\mathcal{R}$ est l'ensemble des radicaux (t, o, r_i),
- soit u un radical (t, o, r), avec $t \overset{(t,o,r)}{\rightarrow} t'$: son terme $\partial_0 u$ de départ est la classe $\sim_\alpha$ de t, et la classe $\sim_\alpha$ de t' est sa classe $\partial_1 u$ d'arrivée.
- $u \uparrow v$ lorsque les radicaux u et v sont compatibles,
- $v[\![u]\!]v'$ si le radical v' est un résidu par u de v.

7.3 Deux contre-exemples à l'axiome C

Nous venons de définir le système abstrait qui correspond à un CRS. Nous passons à la vérification des axiomes. Malheureusement, le cadre que nous proposons jusqu'à maintenant pour la réduction combinatoire est trop libéral. Certes, les deux axiomes A et B sont vérifiés par nos constructions: un radical v est soit effacé par u en cas d'incompatibilité, soit dupliqué en un nombre *fini* de radicaux v'; et u n'a pas de résidu par sa propre réduction: $u[\![u]\!] = \emptyset$. Mais l'axiome C n'est pas vérifié. Il faut donc circonscrire parmi les CRS une classe de systèmes qui vérifient l'axiome C. Nous justifions nos choix par l'analyse de deux contre-exemples à cet axiome. Nous retrouvons ainsi deux restrictions naturelles sur les systèmes combinatoires: la linéarité des partie gauche de règle, et la distinction entre noms et variables de terme.

7.3.1 Premier contre-exemple et linéarité gauche

Montrons que deux radicaux compatibles peuvent avoir des résidus incompatibles dans un système combinatoire défini par $\mathcal{F} = \{A, B, F, G, S\}$ et les règles:

$$\begin{array}{ll} r_1: & S([x]Z(x), Z') \rightarrow Z(Z') \\ r_2: & F(Z, Z) \rightarrow Z \\ r_3: & A \rightarrow B \end{array}$$

Cet α-terme $t = S([x]F(x,x), A)$ contient trois radicaux: $u = (t, \epsilon, r_1)$, $v = (t, (1 \cdot 1), r_2)$ et $w = (t, (1 \cdot 2), r_3)$:

$$\begin{array}{l} S([x]F(x,x), A) \xrightarrow{u} F(A, A) \\ S([x]F(x,x), A) \xrightarrow{v} S([x]G(x), A) \\ S([x]F(x,x), A) \xrightarrow{w} S([x]F(x,x), B) \end{array}$$

Les radicaux u, v et w sont deux à deux compatibles ; le radical v a un résidu par u: $v[\![u]\!]v'$; et w a deux résidu par u: $w[\![u]\!]\{w_1, w_2\}$:

$$\begin{array}{l} F(A, A) \xrightarrow{v'} G(A) \\ F(A, A) \xrightarrow{w_1} F(B, A) \\ F(A, A) \xrightarrow{w_2} F(A, B) \end{array}$$

Les deux radicaux v' et w_1 sont incompatibles, ce qui montre que l'axiome C n'est pas vrai. Ce mauvais comportement du système a pour origine la présence de deux multi-variables Z dans la partie gauche de la règle r_2. Pour réagir et interdire cette situation nous introduisons les systèmes *linéaires gauches* — c'est-à-dire tels que les parties gauches de règle ne contiennent jamais deux mêmes méta-variables.

Définition 7.5 (Linéarité, systèmes combinatoires linéaires gauches)

- *un α-méta-terme est dit linéaire en Z^l_m si la méta-variable Z^l_m n'y apparaît qu'une fois, et linéaire s'il est linéaire en toutes les méta-variables qui y apparaissent.*
- *une règle $M \to N$ est linéaire gauche si le α-méta-terme M est linéaire,*
- *un système de réécriture combinatoire est linéaire gauche si toutes ses règles sont linéaires gauches.*

7.3.2 Deuxième contre-exemple et gestion des noms

Nous avons autorisé jusque là que les parties gauches et droites d'une règle de réécriture contiennent des variables libres, ce qui sort du cadre proposé par [Klo 80] et [KOR 93] pour en enrichir le pouvoir d'expression. En particulier, nos systèmes rendent possibles le traitement des noms à la manière du π-calcul avec des règles de la forme: $\delta(x,x) \to I$. De la sorte le calcul concrétise la proposition de [KOR 93] d'un calcul de nom. Jusqu'ici nous ne distinguons pas les variables de terme et les variables de nom. Nous donnons l'exemple d'un calcul combinatoire qui ne vérifie pas l'axiome C parce que justement il ne fait pas cette distinction entre nom et terme.

Soit le α-terme $t = S([y]S([x]\delta(x,x),y),A)$ dans le système défini par les règles:

$$\begin{array}{ll} r_1: & S([x]Z(x),Z') \to Z(Z') \\ r_2: & \delta(x,x) \to I \end{array}$$

Cet α-terme $t = S([y]S([x]\delta(x,x),y),A)$ contient trois radicaux: $u = (t,\epsilon,r_1)$, $v = (t,(1\cdot 1),r_1)$ et $w = (t,(1\cdot 1\cdot 1\cdot 1),r_2)$:

$$\begin{array}{l} S([y]S([x]\delta(x,x),y),A) \xrightarrow{u} S([x]\delta(x,x),A) \\ S([y]S([x]\delta(x,x),y),A) \xrightarrow{v} S([y]\delta(y,y),A) \\ S([y]S([x]\delta(x,x),y),A) \xrightarrow{w} S([y]S([x]I,y)A) \end{array}$$

Les radicaux v et w sont compatibles parce que v substitue à x une variable y, et rentre donc dans nos schéma de compatibilité. Cette variable y est substituée par un α-terme A durant la réduction de u, ce qui transforme le rapport entre v et w: les résidus v' et w' de v et w par u sont incompatibles.

$$\begin{array}{l} S([x]\delta(x,x),A) \xrightarrow{v'} \delta(A,A) \\ S([x]\delta(x,x),A) \xrightarrow{w'} S([x]I,A) \end{array}$$

Ce mauvais comportement justifie l'introduction de systèmes à réduction combinatoire avec variables de nom qui distinguent les variables de terme et les variables de nom.

Définition 7.6 (systèmes avec variables de nom) *Nous dirons qu'un CRS avec variables de nom est un CRS tel que:*

- *un sous-ensemble de* Var *est distingué, l'ensemble* $\mathsf{Nom} = \{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ *des noms, tel que* Nom *et* $\mathsf{Var}^\star \triangleq \mathsf{Var} - \mathsf{Nom}$ *soient infinis ;*

- *les* α*-conversions respectent les noms: par exemple, si* $[x]F(x) \sim_\alpha [y]F(y)$ *alors* $(x \in \mathsf{Nom} \iff y \in \mathsf{Nom})$ *;*

- *les valuations* σ *respectent les noms:* $x \in \mathsf{Nom} \iff \langle x, \sigma\rangle \in \mathsf{Nom}$ *;*

- *un couple* (M, σ) *de méta-terme et de valuation respecte les noms si lorsque une variable* x_i *dans* $\langle Z_m^k, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$ *se trouve dans* Nom *alors* Z_m^k *n'apparaît dans* M *que sous la forme* $Z_m^k(M_1, ..., M_k)$ *avec* $M_i \in \mathsf{Nom}$.

- *les règles de réécriture* $M \to N$ *du système vérifient:*
  - *toutes les variables libres de* M *et de* N *sont des noms,*
  - *une méta-variable* Z_m^k *qui apparait dans* M *sous la forme* $Z_m^k(x_1, ..., x_k)$ *avec* $x_i \in \mathsf{Nom}$ *n'apparait dans* N *que sous la forme* $Z_m^k(P_1, ..., P_k)$*, où* $P_i \in \mathsf{Nom}$.

- *les seules contractions* $u : \langle M, \sigma\rangle \to \langle N, \sigma\rangle$ *autorisées sont celles pour lesquelles* (M, σ) *respecte les noms ; dans ce cas, le couple* (N, σ) *respecte aussi les noms.*

- *de là les seuls radicaux autorisés:* $C[\langle M, \sigma\rangle] \stackrel{C[u]}{\to} C[\langle N, \sigma\rangle]$.

7.4 Axiome C dans un système linéaire gauche avec variable de nom

Nous démontrons l'axiome C dans tout système linéaire gauche avec variables de nom. Tout d'abord nous pouvons remarquer que la d'efinition de compatibilité peut être simplifiée. En effet, les deux contraintes notées "CP-2" et "CP-3" sont dorénavant à chaque fois vérifiées: toute méta-variable Z_m^k n'apparaît qu'une fois dans chaque partie gauche de règle — le calcul est linéaire gauche — et le radical (s, o'', r_u) n'utilise parmi les variables x_i que des noms, qui se retrouvent donc substitués dans N par des noms. Ceci ramène la relation de compatibilité à la seule contrainte "CP-1". Nous pouvons dorénavant considérer le mécanisme de résidu comme suit:

Lemme 7.7 (caractérisation des résidus) *Soit* u *le radical associé à la règle* $M \to N$ *dans* $\langle M, \sigma\rangle$ *; soit un radical* v *de* $\langle M, \sigma\rangle$ *; alors:*

$$v[\![u]\!]v' \iff \exists \underline{v} \text{ tel que } \begin{cases} (Z + \underline{v})\ [M, \sigma]\ v \\ (Z + \underline{v})\ [N, \sigma]\ v' \end{cases}$$

Les deux lemmes 7.8 et 7.9 examinent les rapports entre deux radicaux de α-termes avant et après substitution.

Lemme 7.8 (radicaux par substitution) *Soit un radical* $u = (t, o_u, r_u)$*,* $x_1, ..., x_n$ *des variables libres de* t*, et* $t_1, ..., t_n$ *des* α*-termes tels que* $x_i \in \mathsf{Nom} \Longrightarrow t_i \in \mathsf{Nom}$. *Soit* $v = (t_i, o_v, r_v)$ *un radical de* t_i*. Alors:*

1. *le triplet* $u^+ = (t^+, o, r_u)$ *est un radical de* $t^+ = t[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$*,*

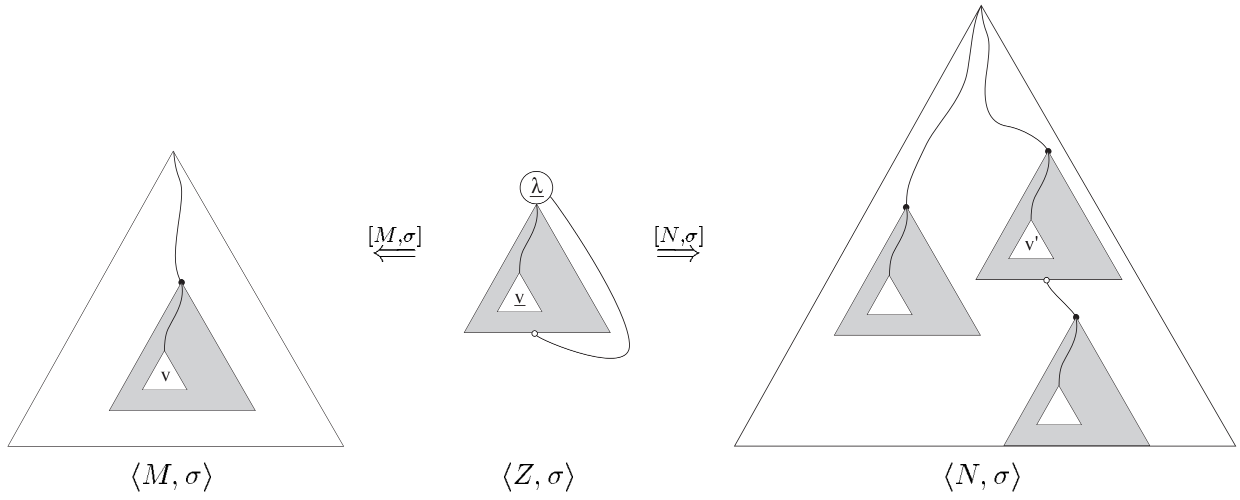


Figure 7.3: caractérisation des résidus

2. $v^+ = (t^+, (o_i \cdot o_v), r_v)$ est un radical de t^+ lorsque (t, o_i) est une occurrence de x_i dans t,

3. les deux radicaux u^+ et v^+ sont compatibles.

Démonstration en trois étapes:
• si la règle r_u est décrite par $M \to N$ alors pour un certain contexte $C[\ ]$ et une certaine valuation σ, le α-terme t vaut $t = C[\langle M, \sigma\rangle]$, où o_u est l'occurrence de $\Box$ dans $C[\ ]$. Une fois les t_i substitués dans t, on peut écrire $t^+ = t[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n] = C^+[\langle M, \sigma^+\rangle]$ où $C'[\ ]$ est le contexte $C[\ ]$ où les x_i sont substitués par des termes dans la classe des α-termes t_i, et σ^+ est la valuation définie par:

$$\langle x, \sigma^+\rangle = \begin{cases} t_j \text{ si la variable } \langle x, \sigma\rangle \text{ vaut } x_j \text{ et se trouve dans } \mathsf{Nom} \\ \langle x, \sigma\rangle \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\langle Z_n^k, \sigma^+\rangle = \langle Z_n^k, \sigma\rangle[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$$

où la substitution dans un α-substitut est définie de manière évidente:

$$(\underline{\lambda}(y_1, ..., y_k).s)[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n] \stackrel{\Delta}{=} \underline{\lambda}(y_1, ..., y_k).(s[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n])$$

lorsqu'aucun des y_j n'est une variable libre de t_i, ou vaut un des x_i. L'égalité entre t^+ et $C^+[\langle M, \sigma^+\rangle]$ peut être ramenée à l'égalité entre $\langle M, \sigma\rangle[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$ et $\langle M, \sigma^+\rangle$, qu'on peut vérifier par induction structurale sur M: on utilise alors le fait que les variables libres de M sont toutes des noms. Si (M, σ) respecte les noms alors (M, σ^+) les respectent évidement, ce qui démontre que le triplet $u^+ = (t^+, o, r_u)$ est un radical de $t^+ = t[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$.
• soit un contexte $D[\ ]$ où $\Box$ a pour occurrence o_i tel que $t = D[x_i]$ et $t^+ = D[t_i]$, contexte $D[\ ]$ qu'on choisit pour éviter toute capture de variable avec t_i. Le triplet $v^+ = (t^+, (o_i \cdot o_v), r_v)$ n'est dans ce cas rien d'autre que le radical $D[v]$.
• si o_u et o_i sont disjoints alors u^+ et v^+ auront leurs occurrences disjointes et donc $u^+ \uparrow v^+$. Sinon, $o_i = (o_u \cdot \underline{o_i})$: la variable x_i n'est pas un nom parce que t_i contient un radical v. La variable x_i n'apparaît donc pas dans le α-méta-terme M, ce qui fait provenir son occurrence $(\langle M, \sigma\rangle, \underline{o_i})$ de la substitution d'un Z_m^k dans (M, σ):

$$(Z_m^k + p_i)\ [M, \sigma]\ (o + p_i)$$

où $\underline{o}_i = (o \cdot p_i)$ et (s, p_i) est l'occurrence d'une variable x_i dans $\langle Z_m^k, \sigma\rangle$. On montre par induction structurale[2] sur M que cette égalité se transforme après substitution en:

$$(Z_m^k + p_i)\ [M, \sigma^+]\ (o + p_i)$$

et donc

$$(Z_m^k + (p_i \cdot o_v))\ [M, \sigma^+]\ (o + (p_i \cdot o_v))$$

c'est-à-dire:

$$(Z_m^k + \underline{v})\ [M, \sigma^+]\ \underline{v}^+$$

où $\underline{v} = (s^+, (p_i \cdot o_v), r_v)$ est le radical de $s^+ = s[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$ qui sous p_i correspond à v, et $\underline{v}^+$ est le radical qui dans $\langle M, \sigma^+\rangle$ correspond à v sous $\underline{o}_i = (o \cdot p_i)$: $o_i = (o \cdot \underline{o}_i$ et $v^+ = C[\underline{v}^+]$. Ce qui fait que $u^+ \uparrow v^+$. □

Lemme 7.9 *Soient $u = (t, o_u, r_u)$ et $v = (t, o_v, r_v)$ deux radicaux coinitiaux, $x_1, ..., x_n$ des variables libres de t et $t_1, ..., t_n$ des α-termes tels que $x_i \in \mathsf{Nom} \Longrightarrow t_i \in \mathsf{Nom}$ pour tout $i \in [1, ..., n]$. Les triplets $u^+ = (t^+, o_u, r_u)$ et $v^+ = (t^+, o_v, r_v)$ sont des radicaux de $t^+ = t[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n]$ qui vérifient:*

$$u \uparrow v \iff u^+ \uparrow v^+$$

Nous écrirons par la suite: $u[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n] \stackrel{\Delta}{=} u^+$.

Démonstration: le caractère de radical des deux triplets u^+ et v^+ est assuré par le lemme 7.8. Les occurrences de u et de v sont disjointes si et seulement si celles de u' et v' le sont, ce qui règle le premier cas de compatibilité ; reste le cas où $o_v = (o_u \cdot o'_v)$:

- si $u \uparrow v$ alors il existe un radical $w = (s, o_w, r_v)$ de $\langle Z_m^k, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(y_1, ..., y_k).s$ tel que

$$(Z_m^k + w)\ [M, \sigma]\ \underline{v}$$

où $v = C[\underline{v}]$ avec $r_u : M \to N$ et $C[\,]$ le contexte qui correspond à u, où □ a pour occurrence o_u et $C[\langle M, \sigma\rangle] \stackrel{u}{\to} C[\langle N, \sigma\rangle]$. On peut reprendre la construction du lemme 7.8 et donner une valuation σ^+ telle que:

$$\langle M, \sigma\rangle[x_1 := t_1, ..., x_n := t_n] = \langle M, \sigma^+\rangle$$

Encore une fois, l'égalité précédente se transforme en:

$$(Z_m^k + w)\ [M, \sigma^+]\ \underline{v}^+$$

où $v^+ = C^+[\underline{v}^+]$, pour $C^+[\,]$ le contexte $C^+[\,]$ qui correspond à u^+, construit à partir de $C[\,]$ en y substituant les variables x_i par des termes qui représentent les α-termes t_i.
- on peut reprendre la démonstration dans le sens inverse, et montrer que si $u^+ \uparrow v^+$ alors $u \uparrow v$. □

Corollaire 7.10 *Soient M un α-méta-terme et σ une valuation tels que (M, σ) respecte les noms. Soit Z_m^k une méta-variable et s un alpha-terme tel que $\langle Z_m^k, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$. Soit u un radical de s, et v le triplet tel que $(Z_m^k + u)\ [M, \sigma]\ v$. Alors v est un radical de $\langle M, \sigma\rangle$.*

[2] Il faut remarquer que la substitution des x_i dans les α-substituts $\langle Z_m^k, \sigma\rangle$ ne change pas l'occurrence des variables méta-liées par $\underline{\lambda}$.

Démonstration avec le lemme 7.8: chaque substitut $\langle Z_m^k, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$ substitué pour Z_m^k dans (M, σ) se retrouve sous la forme d'un sous-α-terme:

$$s^+ = s[x_1 := s_1, ..., x_k := s_k]$$

placé en une occurrence o telle que dans $\langle M_d, \sigma\rangle$:

$$Z_m^l\ [M, \sigma]\ o$$

Le triplet $u = (s, o_u, r_u)$ est un radical de s. Chaque variable de nom $x_i \in \mathsf{Nom}$ est substituée par une variable de nom $s_i \in \mathsf{Nom}$ lors de l'application de $\langle Z_m^k, \sigma\rangle$ à Z_m^l, d'après le lemme 7.8 les triplets $u^+ = (s^+, o_u, r_u)$ sont des radicaux eux aussi. Chaque triplet v a pour forme $C[u^+]$ pour un contexte $C[\ ]$ et un radical u^+ bien choisis, où $\Box$ a pour occurrence o dans $C[\ ]$: le triplet $v = C[u^+]$ est donc un radical. $\Box$

Corollaire 7.11 *Soient M un méta-terme, σ une valuation tels que (M, σ) respecte les noms. Soient u un radical de $\langle Z, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$ et v un radical de $\langle Z', \sigma\rangle = \underline{\lambda}(y_1, ..., y_l).t$. On supposera que $(Z + u)\ [M, \sigma]\ u^+$ et $(Z' + v)\ [M, \sigma]\ v^+$. Si $Z \neq Z'$ ou ($Z = Z'$ et $u \uparrow v$) alors $u^+ \uparrow v^+$.*

Démonstration en deux sous cas: le radical u^+ provient de u par substitution en o de Z dans (M, σ) ; et le radical u^+ provient de v par substitution en o' de Z' dans (M, σ).
• si $o = o'$ alors $Z = Z'$; u^+ et v^+ sont de la forme $u^+ = C[\underline{u}]$ et $v^+ = C[\underline{v}]$ pour un certain contexte $C[\ ]$ dans lequel $\Box$ a comme occurrence o ; $\underline{u}$ et $\underline{v}$ correspondent à u et v dans $s^+ = s[x_1 := \langle M_i, \sigma\rangle, ..., x_k := \langle M_k, \sigma\rangle]$ quand Z apparaît à cette endroit comme $Z(M_1, ..., M_k)$ dans M. La substitution répond aux contraintes du lemme 7.9, et donc u^+ et v^+ sont compatibles.
• deux cas se présentent si $o \neq o'$: o et o' sont disjoints, et donc $u^+ \uparrow v^+$, ou $o = (o' \cdot o'')$, l'autre choix: $o' = (o \cdot o'')$ étant sym'etrique ; alors $\langle M, \sigma\rangle = C[t^+]$ pour $\Box$ d'occurrence o dans $C[\ ]$, et $t^+ = t[x_1 := \langle M_1, \sigma\rangle, ..., \langle M_l, \sigma\rangle$ quand Z' apparaît sous la forme $Z'(M_1, ..., M_l)$; cette substitution répond aux contraintes du lemme 7.8, et le radical u^+ se trouve dans un des $\langle M_i, \sigma\rangle$: v^+ et u^+ sont pour cela compatibles. $\Box$

Les deux derniers corollaires nous permettent de prouver sans trop de mal l'axiome C.

Lemme 7.12 (axiome C) *Si u, v et w sont trois radicaux deux à deux compatibles, et $v[\![u]\!]v'$, $w[\![u]\!]w'$ alors v' et w' sont compatibles.*

Démonstration: on écrit $u = (t, o_u, r_u)$, $v = (t, o_v, r_v)$, $v' = (t', o_{v'}, r_v)$, $w = (t, o_w, r_w)$, $w' = (t', o_{w'}, r_w)$, et $r_u : M_g \to M_d$.
• si l'un des o_v ou o_w est disjoint de o_u alors $v' \uparrow w'$ automatiquement,
• si o_u contient o_v et o_w alors il existe $\underline{v}_0$ et $\underline{w}_0$ tels que:

$$\begin{array}{ll}
(Z_m^k + \underline{v}_0)\ [M_g, \sigma]\ \underline{v} & (Z_n^l + \underline{w}_0)\ [M_g, \sigma]\ \underline{w} \\
(Z_m^k + \underline{v}_0)\ [M_d, \sigma]\ \underline{v}' & (Z_n^l + \underline{w}_0)\ [M_d, \sigma]\ \underline{w}' \\
\quad v = C[\underline{v}] & \quad w = C[\underline{w}] \\
\quad v' = C[\underline{v}'] & \quad w' = C[\underline{w}']
\end{array}$$

pour le contexte $C[\ ]$ associé à u. Si $Z_m^k = Z_n^l$ alors $\underline{v} \uparrow \underline{w}$ parce que $v \uparrow w$, avec le lemme 7.9. Le corollaire 7.11 assure que $\underline{v}' \uparrow \underline{w}'$, et donc que $u' \uparrow v'$ par passage au contexte.

• si o_v contient o_u qui contient o_w: alors $t = D[\langle N_g, \tau\rangle] \stackrel{u}{\to} D[\langle N_d, \tau\rangle]$ où $r_v : N_g \to N_d$ et $D[\,]$ est le contexte qui correspond à v dans t: $\Box$ est d'occurrence o_v dans $D[\,]$. On tire de $v \uparrow u$ qu'il existe un radical $\underline{u}_0$ tel que

$$(Z^k_m + \underline{u}_0)\ [N_g, \tau]\ u \quad \text{et} \quad u = D[\underline{u}]$$

Le méta-terme Z^k_m apparaît dans N_g sous la forme $Z^k_m(x_1, ..., x_k)$, et o_u contient o_w. Nous montrons qu'il existe un radical $\underline{w}_0$ que contient $\underline{u}_0$ et tel que:

$$(Z^k_m + \underline{w}_0)\ [N_g, \tau]\ \underline{w} \quad \text{et} \quad w = D[\underline{w}]$$

Un mécanisme de nom serait la seule raison pour que ce radical $\underline{w}_0$ n'existe pas: le radical w utiliserait des noms dont certains seraient des instantiations de variables x_i dans $\langle Z^k_m, \tau\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s$. Premier point: chaque x_i instantié par un nom est un nom, parce que $\langle x, \tau\rangle \in \mathsf{Nom} \iff x \in \mathsf{Nom}$. Deuxième point: si deux variables de nom sous w sont identiques, alors elles proviennent de l'instantiation d'un même x_i: en effet, Z^k_m apparaît sous la forme $Z^k_m(y_1, ..., y_k)$ dans N_g ; ces y_j sont distincts deux à deux, et tous liés dans N_g ; si un nom $\langle y_i, \tau\rangle$ est substitué pour x_i dans s, il ne vaut aucun nom déjà dans s pour éviter la capture de nom ; tout nom $\langle y_i, \tau\rangle$ qu'utilise w dans $\langle N_g, \tau\rangle$ est le résultat d'une substitution de x_i dans s: le radical $\underline{w}_0$ existe donc, et utilise dans s les noms x_i au lieu de $\langle y_i, \tau\rangle$.

Soit o l'occurrence de $\langle N_g, \tau\rangle$ telle que:

$$Z^k_m\ [N_g, \tau]\ o$$

et s^+ le sous-α-terme de t d'occurrence o ; on peut l'écrire:

$$s^+ = s[x_1 := \langle y_1, \tau\rangle, ..., x_k := \langle y_k, \tau\rangle]$$

ce qui fait avec le lemme 7.9 que deux *radicaux* $\underline{u}^+_o$ et $\underline{w}^+_o$ dans s^+ correspondent à $\underline{u}_o$ et $\underline{w}_o$ dans s, et $\underline{u}_0 \uparrow \underline{w}_0$ parce que $\underline{u}^+_o \uparrow \underline{w}^+_o$. Les résidus de w par u sont ceux de $\underline{w}^+_0$ par $\underline{u}^+_0$ passés au contexte $D[\,]$; et donc ceux de $\underline{w}_0$ par $\underline{u}_0$ après substitution des $\langle y_i, \tau\rangle$ pour les x_i, et passage au contexte $D[\,]$. On peut donc écrire pour tout résidu w' de w par u que $w' = D[\underline{w}']$ pour un certain radical $\underline{w}'$ de $s' = \partial_1 \underline{u}_0$ tel que:

$$(Z^k_m + \underline{w}_0)\ [N_g, \tau']\ \underline{w}'$$

pour la substitution τ' définie par:

$$\begin{array}{ll}
\langle x, \tau'\rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle x, \tau\rangle & \\
\langle Z^k_m, \tau'\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_k).s' & \\
\langle Z^l_n, \tau'\rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle Z^l_n, \tau\rangle & \text{si } Z^l_n \neq Z^k_m
\end{array}$$

Les radicaux v' et w', résidus de v et w par u sont donc compatibles.

• si o_v contient o_w qui contient o_u, alors on peut reprendre le cas précédent, et réduire dans s le radical $\underline{u}_0$ dont l'occurrence est cette fois-ci contenue par celle de $\underline{w}_0$; le reste de la construction est identique, et permet de prouver que les résidus v' et w' de v et w par u sont compatibles. $\Box$

7.5 Axiome PERM+ de permutation

Nous montrerons l'axiome FD+ de terminaison au prochain chapitre. Nous d'emontrons ici l'axiome PERM+ de permutation, dont la preuve est très délicate. Il faut noter que nous démontrons cet axiome PERM+ pour la première fois dans le cadre des CRS. Malgré l'importance de l'axiome, aucun autre auteur à notre connaissance ne s'était attelé jusqu'ici à cette preuve.

7.5.1 Réindiçage

Il nous faut d'abord apprendre à réindicer les suites finies de méta-terme et de variable. Cette apprentissage permet ensuite de traiter correctement les phénomènes syntaxiques de duplication.

Définition 7.13 (réindiçage d'un substitut) *Soit ϕ une application de $[1,...,k]$ dans $[1,...,l]$, et un substitut $\underline{\lambda}(x_1,...,x_k).t$. Si aucun des y_i, $1 \leq i \leq l$ ne se trouve libre dans $\underline{\lambda}(x_1,...,x_k).t$, nous écrirons:*

$$(\underline{\lambda}(x_1,...,x_k).t)\cdot\phi \;\triangleq\; \underline{\lambda}(y_1,...,y_l).t[x_1 := y_{\phi(1)},...,x_k := y_{\phi(k)}]$$

Définition 7.14 (réindiçage d'une séquence de méta-termes) *Soit ϕ une application de $[1,...,k]$ dans $[1,...l]$. et $(M_1,...,M_l)$ une séquence de méta-termes. Nous écrirons*

$$\phi\cdot(M_1,...,M_l) \triangleq (M_{\phi(1)},...,M_{\phi(k)})$$

Par exemple, $Z_n^k(\phi\cdot(M_1,...,M_l)) = Z_n^k(M_{\phi(1)},...,M_{\phi(k)})$.

Lemme 7.15 (Trois propriétés de composition du réindiçage) *Soit ϕ' une application de $[1,...,j]$ dans $[1,...,k]$ et ϕ de $[1,...,k]$ dans $[1,...,l]$,*

$$\begin{array}{l}((\underline{\lambda}(x_1,...,x_j).t)\cdot\phi')\cdot\phi \;=\; (\underline{\lambda}(x_1,...,x_j).t)\cdot(\phi\circ\phi') \\ \phi'\cdot(\phi\cdot(M_1,...,M_l)) = (\phi\circ\phi')\cdot(M_1,...,M_l) \\ ((\underline{\lambda}(x_1,...,x_k).t)\cdot\phi)(M_1,...,M_l) = (\underline{\lambda}(x_1,...,x_k).t)(\phi\cdot(M_1,...,M_l))\end{array}$$

Démonstrations: manipulations simples d'indice. □

Définition 7.16 (substitut linéaire) *Un substitut $\underline{\lambda}(x_1,...,x_n).t$ est linéaire si t contient une et une seule occurrence de chaque variable x_i.*

7.5.2 Une bisimulation de substitution

Une bisimulation sur les couples (M,σ) où M est un α-méta-terme et σ une valuation permet de comparer deux manières d'opérer la substitution d'une valuation dans un α-méta-terme.

Définition 7.17 (bisimulation) *La relation $\sim$ sur les couples de α-termes et de valuations est la relation la plus grande telle que si $(M,\sigma)\sim(N,\tau)$ alors:*

- *si $M = x$ alors $N = y$ et $\langle x,\sigma\rangle = \langle y,\tau\rangle$,*
- *si $M = [x]M'$ alors $N = [x]N'$ et $(M',\sigma)\sim(N',\tau)$ si $\langle x,\sigma\rangle = x = \langle x,\tau\rangle$ et x n'apparaît libre dans aucun des $\langle Z,\sigma\rangle$ ou $\langle Z,\tau\rangle$ quand Z se trouve dans M ou dans N, et x ne vaut aucun des $\langle y,\sigma\rangle$ ou $\langle y,\tau\rangle$ pour une variable $y\neq x$ libre dans M' ou dans N'.*
- *si $(M,\sigma)\sim(N,\tau)$ et $M = F(M_1,...,M_n)$ alors $N = F(N_1,...,N_n)$ et $\forall i, 1\leq i\leq n \Longrightarrow (M_i,\sigma)\sim(N_i,\tau)$,*
- *si $M = Z_m^k(M_1,...,M_k)$ alors $N = Z_n^l(N_1,...,N_l)$ et il existe un substitut linéaire $\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t$, une application ϕ de $[1,...,p]$ dans $[1,...,k]$ et une application ψ de $[1,...,p]$ dans $[1,...,l]$ tels que:*
  - $\langle M,\sigma\rangle = (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t)\cdot\phi$,

- $\langle N, \tau\rangle = (\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \psi$,
- $\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (M_{\phi(i)}, \sigma) \sim (N_{\psi(i)}, \tau)$.

On dit que (M, σ) et (N, τ) sont bisimilaires lorsque $(M, \sigma) \sim (N, \tau)$.

Lemme 7.18 *Il est clair que la relation $\sim$ est réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive.*

Démonstration: nous démontrons la transitivité par induction sur la profondeur de M. Si $(M, \sigma) \sim (N, \tau) \sim (P, \upsilon)$, et si $(M', \sigma) \sim (N', \tau) \sim (P', \upsilon)$ implique $(M', \sigma) \sim (P', \upsilon)$ pour tout M' de profondeur inférieure à celle de M. On sait démontrer facilement que $(M, \sigma) \sim (P, \upsilon)$ si $M = x$ ou $M = [x]M'$ ou $M = F(M_1, ..., M_n)$. La démonstration est plus compliquée si $M = Z^k_m(M_1, ..., M_k)$: alors $N = Z^l_n(N_1, ..., N_l)$ et donc $P = Z^{k'}_{m'}(P_1, ..., P_{k'})$; il existe deux substituts linéaires $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t$ et $\underline{\lambda}(y_1, ..., y_{p'}).t'$ et quatre applications $\phi : [1, ..., p] \rightarrow [1, ..., k]$; $\psi : [1, ..., p] \rightarrow [1, ..., l]$; $\phi' : [1, ..., p'] \rightarrow [1, ..., l]$; $\psi' : [1, ..., p'] \rightarrow [1, ..., k']$ tels que:

- $\langle M, \sigma\rangle = (\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \phi$, et $\langle N, \tau\rangle = (\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \psi$,
- $\langle N, \tau\rangle = (\underline{\lambda}(y_1, ..., y_{p'}).t') \cdot \phi'$, et $\langle P, \upsilon\rangle = (\underline{\lambda}(y_1, ..., y_{p'}).t') \cdot \psi'$
- $\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (M_{\phi(i)}, \sigma) \sim (N_{\psi(i)}, \tau)$
- $\forall i, 1 \leq i \leq p' \Longrightarrow (N_{\phi'(i)}, \tau) \sim (P_{\psi'(i)}, \upsilon)$

Le substitut $\langle N, \tau\rangle$ apparaît deux fois, sous la forme de $(\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \psi$ et de $(\underline{\lambda}(y_1, ..., y_{p'}).t') \cdot \phi'$: les deux substituts $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t$ et $\underline{\lambda}(y_1, ..., y_{p'}).t'$ sont linéaires, ils font donc qu'ils représentent le même substitut, hormis pour l'ordre des variables x_i et y_i ; et donc $p = p'$, tandis qu'il existe une application bijective $\Phi : [1, ..., p] \rightarrow [1, ..., p]$ telle que $(\underline{\lambda}(y_1, ..., y_p).t') \cdot \Phi = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t$. On déduit de $(\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \psi = ((\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \Phi) \cdot \phi'$ et du lemme 7.15 que $\psi = \phi' \circ \Phi$. Ce qui permet d'écrire:

- $\langle M, \sigma\rangle = (\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot \phi$,
- $\langle P, \upsilon\rangle = (\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t) \cdot (\psi' \circ \Phi)$
- $\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (M_{\phi(i)}, \sigma) \sim (N_{\psi(i)}, \tau)$
- $\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (N_{\psi i}, \tau) = (N_{(\phi' \circ \Phi)(i)}, \tau) \sim (P_{(\psi' \circ \Phi)(i)}, \upsilon)$

Les deux dernières assertions se transforment en

$$\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (M_{\phi(i)}, \sigma) \sim (N_{\psi(i)}, \tau) \sim (P_{(\psi' \circ \Phi)(i)}, \upsilon)$$

qui se transforme par hypothèse de récurrence en:

$$\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (M_{\phi(i)}, \sigma) \sim (P_{(\psi' \circ \Phi)(i)}, \upsilon)$$

et indique que $\phi : [1, ..., p] \rightarrow [1, ...k]$ et $\psi' \circ \Phi : [1, ..., p] \rightarrow [1, ..., k']$ sont les applications qui avec le substitut linéaire $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_p).t$ permettent de prouver que $(M, \sigma) \sim (P, \upsilon)$. □

Lemme 7.19 (lemme de la bisimulation) *Soit M et N des méta-termes, σ et τ des valuations. Si $(M, \sigma) \sim (N, \tau)$ alors $\langle M, \sigma\rangle = \langle N, \tau\rangle$.*

Démonstration: par induction sur la profondeur de M. Soient M et N des méta-termes, σ et τ des valuations. Nous supposerons que si la profondeur de M' est plus petite que celle de M alors

$$(M',\sigma) \sim (N',\tau) \Longrightarrow \langle M',\sigma\rangle = \langle N',\tau\rangle$$

Nous démontrons maintenant la propriété sur M:

- si $M = x$ alors $N = x$ et $\langle M,\sigma\rangle = \langle N,\tau\rangle$,
- si $M = [x]M'$ alors $N = [x]N'$ et $(M',\sigma) \sim (N',\tau)$, donc $\langle M',\sigma\rangle = \langle N',\tau\rangle$ par hypothèse d'induction, ce qui permet d'identifier $\langle M,\sigma\rangle = [x]\langle M',\sigma\rangle$ et $\langle N,\tau\rangle = [x]\langle N',\tau\rangle$,
- si $(M,\sigma) \sim (N,\tau)$ et $M = F(M_1,...,M_n)$ alors $N = F(N_1,...,N_n)$ et pour tout $i \in [1,...,n]$, $(M_i,\sigma) \sim (N_i,\tau)$, ce qui implique par hypothèse d'induction que $\langle M_i,\sigma\rangle \sim \langle N_i,\tau\rangle$; donc

$$\langle M,\sigma\rangle = F(\langle M_1,\sigma\rangle,...,\langle M_n,\sigma\rangle) = F(\langle N_1,\tau\rangle,...,\langle N_n,\tau\rangle) = \langle N,\tau\rangle$$

- le dernier cas est le plus intéressant. Si $M = Z^k_m(M_1,...,M_k)$ alors $N = Z^l_n(N_1,...,N_l)$ et il existe un substitut linéaire $\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t$, une application ϕ de $[1,...,p]$ dans $[1,...,k]$ et une application ψ de $[1,...,p]$ dans $[1,...,l]$ tels que:
  - $\langle M,\sigma\rangle = (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t)\cdot\phi$,
  - $\langle N,\tau\rangle = (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t)\cdot\psi$,
  - $\forall i, 1 \leq i \leq p \Longrightarrow (M_{\phi(i)},\sigma) \sim (N_{\psi(i)},\tau)$.

  On en déduit d'abord que $\langle M_{\phi(i)},\sigma\rangle = \langle N_{\psi(i)},\tau\rangle$ par hypothèse d'induction. En particulier:

$$\phi\cdot(\langle M_1,\sigma\rangle,...,\langle M_k,\sigma\rangle) = \psi\cdot(\langle N_1,\tau\rangle,...,\langle N_l,\tau\rangle)$$

  L'identité de $\langle M,\sigma\rangle$ et $\langle N,\tau\rangle$ est démontrée par un calcul:

$$\begin{array}{ll}
\langle M,\sigma\rangle = \langle Z^k_m,\sigma\rangle(\langle M_1,\sigma\rangle,...,\langle M_k,\sigma\rangle) & \text{propagation de la valuation} \\
= (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t\cdot\phi)(\langle M_1,\sigma\rangle,...,\langle M_k,\sigma\rangle) & \text{hypothèse de bisimulation} \\
= (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t)(\phi\cdot(\langle M_1,\sigma\rangle,...,\langle M_k,\sigma\rangle)) & \text{lemme 7.15} \\
= (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t)(\psi\cdot(\langle N_1,\tau\rangle,...,\langle N_l,\tau\rangle)) & \text{hypothèse d'induction} \\
= (\underline{\lambda}(x_1,...,x_p).t\cdot\psi)(\langle N_1,\tau\rangle,...,\langle N_l,\tau\rangle) & \text{lemme 7.15} \\
= \langle Z^l_n,\tau\rangle(\langle N_1,\tau\rangle,...,\langle N_l,\tau\rangle) = \langle N,\tau\rangle & \text{hypothèse de bisimulation}
\end{array}$$

L'hypothèse d'induction peut être reconduite sur M dans les quatre cas ; le lemme est donc prouvé. □

7.5.3 Résidus par bisimulation

Nous pouvons construire avec la relation de bisimulation $(M,\sigma) \sim (N,\tau)$ une loi de résidu entre les méta-variables qui apparaissent en même position lors de la construction de $\langle M,\sigma\rangle$ et de $\langle N,\tau\rangle$.

Définition 7.20 *Soient M et N deux α-méta-termes, et σ et τ deux valuations telles que $(M,\sigma) \sim (N,\tau)$. On dit que Z a pour résidu Z' par $(M,\sigma) \sim (N,\tau)$, ce qu'on écrit $Z\ \boxed{(M,\sigma) \sim (N,\tau)}\ Z'$, et qu'on définit par induction structurale sur M:*

$$Z\boxed{(x,\sigma)\sim(x,\tau)}=\emptyset$$

$$Z\boxed{([x]M,\sigma)\sim([x]N,\tau)}Z' \iff Z\boxed{(M,\sigma)\sim(N,\tau)}Z'$$

$$Z\boxed{(F(M_1,...,M_n),\sigma)\sim(F(N_1,...,N_n),\tau)}Z' \iff \exists i\in[1,...,n], Z\boxed{(M_i,\sigma)\sim(N_i,\tau)}Z'$$

$$Z\boxed{(Z_m^k(M_1,...,M_k),\sigma)\sim(Z_n^l(N_1,...,N_l),\tau)}Z' \iff \begin{cases} \exists i\in[1,...,n], Z\boxed{(M_{\phi(i)},\sigma)\sim(N_{\psi(i)},\tau)}Z' \\ \textit{ou } Z=Z_m^k \textit{ et } Z'=Z_n^l \end{cases}$$

Lemme 7.21 *Soient deux couples (M,σ) et (N,τ) de α-méta-termes et de valuations tels que $(M,\sigma)\sim(N,\tau)$. Si Z a pour résidu par $\boxed{(M,\sigma)\sim(N,\tau)}$ les méta-variables $Z_1,...,Z_n$ et elles seules ; si Z_i n'est le résidu par $\boxed{(M,\sigma)\sim(N,\tau)}$ d'aucune autre méta-variable ; alors*

$$Z\ [M,\sigma]\ o \iff \exists i, Z_i\ [N,\tau]\ o$$

Démonstration: par induction structurale sur M. □

Corollaire 7.22 *Avec les hypothèses du lemme 7.21, si u est un redex de $\langle Z,\sigma\rangle$ et u_i est le radical correspondant dans chacun des $\langle Z_i,\tau\rangle$, alors:*

$$(Z+u)\ [M,\sigma]\ v \iff \exists i, (Z_i+u_i)\ [N,\tau]\ v$$

Définition 7.23 *Soit $x_1,...,x_k$ une suite de variables et $t_1,...,t_k$ une suite de termes telles que $\forall i,\ x_i\in \mathsf{Nom} \iff t_i\in\mathsf{Nom}$. On écrit alors $\tau=\sigma[x_1:=t_1,...,x_k:=t_k]$ la valuation définie par $\forall Z\in\mathsf{MVar}, \langle Z,\tau\rangle=\langle Z,\sigma\rangle[x_1:=t_1,...,x_k:=t_k]$*

Lemme 7.24 *Si M est un α-méta-terme et $\tau=\sigma[x_1:=t_1,...,x_n:=t_k]$ alors*

$$\langle M,\tau\rangle=\langle M,\sigma\rangle[x_1:=t_1,...,x_k:=t_k]$$

et

$$Z\ [M,\tau]\ o \iff Z\ [M,\sigma]\ o$$

Démonstration: par induction structurale sur M. □

7.5.4 Axiome PERM+ de permutation

Définition 7.25 (couple linéaire en une méta-variable) *On dit qu'un couple (M,σ) formé d'un α-méta-terme M et d'une valuation σ est linéaire en une méta-variable Z si et seulement si Z n'apparaît qu'une fois dans M et n'a qu'un résidu par $[M,\sigma]$.*

Lemme 7.26 (résidus et passage aux valuations) *Soit M un α-méta-terme et σ une valuation tels que (M,σ) est linéaire en Z. Soit $\underline{v}$ un redex de $\langle Z,\sigma\rangle$ et τ la valuation égale partout à σ sauf en Z, où $\langle Z,\sigma\rangle\xrightarrow{\underline{v}}\langle Z,\tau\rangle$. On note v l'unique radical de $\langle M,\sigma\rangle$ tel que $\underline{v}\langle M,\sigma\rangle v$.*
Si $(Z+\underline{w})\ [M,\sigma]\ w$ alors

$$w[\![v]\!]w' \iff \exists\underline{w}' \text{ radical de } \langle Z,\tau\rangle \mid (Z+\underline{w})[\![\underline{v}]\!]\underline{w}', \text{ et } \underline{w}'\ [M,\tau]\ w'$$

Si (M,σ) est linéaire en $Z'\neq Z$ et $(Z'+\underline{w})\ [M,\sigma]\ w$ alors

$$w[\![v]\!]w' \iff (Z'+\underline{w})\ [M,\tau]\ w'$$

Démonstration: nous appellerons $M_v \to N_v$ la règle associée au redex v. Nous utiliserons dorénavant l'indice 0 pour désigner toute construction d'un radical "de tête". Par exemple, $v = C_v[v_0]$ où v_0 est de la forme $\langle M_v, \sigma_v\rangle \to \langle N_v, \sigma_v\rangle$.

Si v ne contient pas w et $w[\![v]\!]w'$ alors w' a la même occurrence dans $\partial_1 v = \langle M, \tau\rangle$ que w dans $\partial_0 v = \langle M, \sigma\rangle$. Si $(Z' + \underline{w})\ [M, \sigma]\ w$ pour (M, σ) linéaire en Z' alors (M, τ) est aussi linéaire en Z' et $(Z' + \underline{w})\ [M, \tau]\ w'$ (que Z' vaille ou non Z).

L'autre cas est plus difficile: si v contient w, on déduit d'après la caractérisation en lemme 7.7 des résidus que $C_v[w][\![v]\!]C_v[w']$ si et seulement s'il existe un radical w_v de $\langle Z'', \sigma_v\rangle$ tel que $(Z'' + w_v)\ [M_v, \sigma_v]\ w$ et $(Z'' + w_v)\ [N_v, \sigma_v]\ w'$. Il nous faut décrire les rapports qu'entretiennent v_0 et $\underline{v}$: on peut décomposer $\underline{v}$, le radical de $\langle Z, \sigma\rangle$: il existe un radical $\underline{v}_0$ tel que $C_{\underline{v}}[\underline{v}_0] = \underline{v}$; le radical $\underline{v}_0$ est de la forme $\langle M_v, \sigma_{\underline{v}}\rangle \to \langle N_v, \sigma_{\underline{v}}\rangle$. Si $\langle Z, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_n).t$ et Z apparaît dans M sous la forme $Z(M_1, ..., M_n)$ alors chaque $\langle Z'', \sigma_v\rangle$ vaut:

$$\langle Z'', \sigma_v\rangle = \langle Z'', \sigma_{\underline{v}}\rangle[x_1 := \langle M_1, \sigma\rangle, ..., x_n := \langle M_n, \sigma\rangle]$$

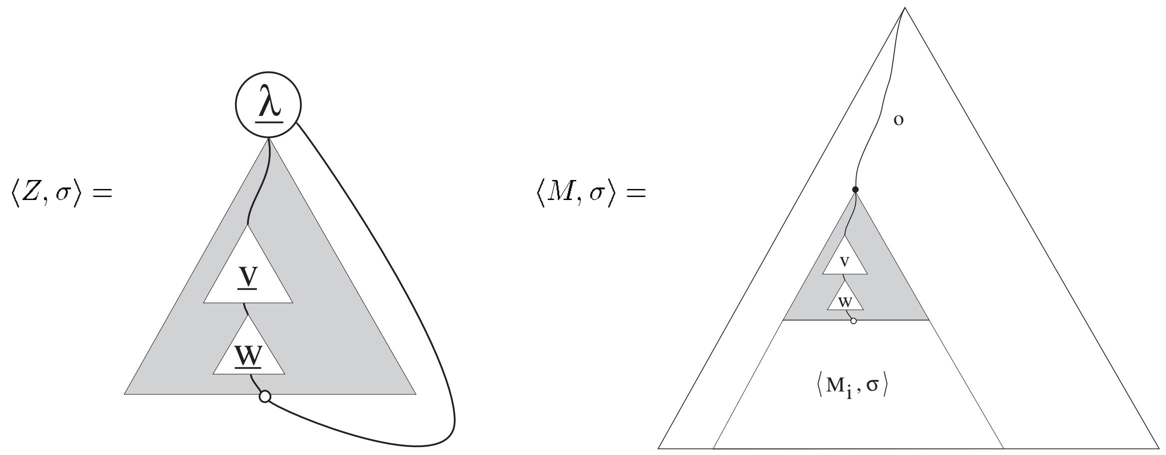


Figure 7.4: le cas où v contient w

Si $(Z + \underline{w})\ [M, \sigma]\ C_v[w]$, alors:

$$\begin{array}{ll} & C_v[w][\![v]\!]C_v[w'] \\ \iff & \exists w_v \text{ radical de } \langle Z'', \sigma_v\rangle \mid (Z'' + w_v)\ [M_v, \sigma_v]\ w \text{ et } (Z'' + w_v)\ [N_v, \sigma_v]\ w' \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} \exists w_{\underline{v}} \text{ radical de } \langle Z'', \sigma_{\underline{v}}\rangle \mid (Z'' + w_{\underline{v}})\ [M_v, \sigma_{\underline{v}}]\ \underline{w} \text{ et } (Z'' + w_{\underline{v}})\ [N_v, \sigma_{\underline{v}}]\ \underline{w}' \\ \text{et } w = \underline{w}[x_1 := \langle M_1, \sigma\rangle, ..., x_n := \langle M_n, \sigma\rangle] \text{ et } w' = \underline{w}'[x_1 := \langle M_1, \sigma\rangle, ..., x_n := \langle M_n, \sigma\rangle] \end{array} \right. \\ \iff & \exists \underline{w}' \mid C_{\underline{v}}[\underline{w}'] \text{ est radical de } \langle Z, \tau\rangle \text{ et } C_{\underline{v}}[\underline{w}][\![\underline{v}]\!]C_{\underline{v}}[\underline{w}'] \text{ avec } (Z + C_{\underline{v}}[\underline{w}'])\ [M, \tau]\ C_v[w'] \end{array}$$

Ce qui prouve dans ce cas le lemme 7.26, si on prend garde au changement de notation.

Dans l'autre situation, si $(Z' + \underline{w})\ [M, \sigma]\ C_v[w]$ pour un couple (M, σ) linéaire en $Z' \neq Z$:

$$\begin{array}{ll} & C_v[w][\![v]\!]C_v[w'] \\ \iff & \exists w_v \text{ radical de } \langle Z'', \sigma_v\rangle \mid (Z'' + w_v)\ [M_v, \sigma_v]\ w \text{ et } (Z'' + w_v)\ [N_v, \sigma_v]\ w' \\ \iff & \exists M_i \mid Z \text{ apparaît sous la forme } Z(M_1, ..., M_k) \text{ dans } M \\ & \text{avec } (M_i, \sigma) \text{ qui est linéaire en } Z' \text{ ;} \\ & \text{si on note } w_i \text{ le radical tel que } (Z' + \underline{w})\ [M_i, \sigma]\ w_i \text{ et si } w_v = D[w_i] \\ & \text{pour } \langle Z'', \sigma_{\underline{v}}\rangle = \underline{\lambda}(y_1, ..., y_p).D[x_i] \text{ on obtient } (Z'' + D[w_i])\ [N_v, \sigma_v]\ w' \\ & \text{et bien entendu } (Z'' + D[w_i])\ [M_v, \sigma_v]\ w \\ \iff & (Z' + \underline{w})\ [M, \tau]\ C_v[w'] \end{array}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 7.26. $\square$

Corollaire 7.27 (permutation de résidus) *Soient M un α-méta-terme et σ une valuation tels que (M, σ) est linéaire en les méta-variables Z_i. Soit τ une valuation telle que:*

$$\begin{array}{ll} \langle Z, \sigma\rangle = \langle Z, \tau\rangle & \textit{si } Z \textit{ ne vaut aucun des } Z_i, \\ \langle Z_i, \sigma\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_{k_i}).s_i \textit{ et } \langle Z_i, \tau\rangle = \underline{\lambda}(x_1, ..., x_{k_i}).s_i' & \textit{pour } s_i \stackrel{\underline{v_i}}{\to} s_i' \textit{ par réduction de } \underline{v}_i. \end{array}$$

Il existe un développement

$$f : \langle M, \sigma\rangle \twoheadrightarrow \langle M, \tau\rangle$$

de l'ensemble des radicaux v_i définis dans $\langle M, \sigma\rangle$ par:

$$\underline{v}_i \ [M, \sigma] \ v_i$$

tel que si $(Z + \underline{w})$ $[M, \sigma]$ w et $(Z + \underline{w}')$ $[M, \tau]$ w' alors:

$$w[\![f]\!]w' \iff \begin{cases} w = w' \textit{ et } \forall i, \ Z \neq Z_i \\ \textit{ou } \underline{w}[\![\underline{v}_i]\!]\underline{w}' \textit{ et } Z = Z_i \end{cases}$$

Démonstration: en partant du lemme 7.26, nous utiliserons une stratégie interne pour calculer un développement d des radicaux v_i. Ce choix de stratégie permet d'assurer qu'à chaque étape $j \leq i$ de réduction le couple (M, σ_j) obtenu reste linéaire en chaque méta-variable Z_i dont le α-terme $\langle Z_i, \sigma\rangle = \langle Z_i, \sigma_j\rangle$ n'a pas été réduit en $\langle Z_i, \tau\rangle$. $\square$

Corollaire 7.28 *Soit M un méta-terme et σ une valuation. Soit une valuation τ égale partout à σ sauf en une méta-variable Z, pour laquell $\langle Z, \tau\rangle$ vérifie:*

$$\langle Z, \sigma\rangle \stackrel{\underline{v}}{\to} \langle Z, \tau\rangle$$

Il existe alors un développement

$$f : \langle M, \sigma\rangle \twoheadrightarrow \langle M, \tau\rangle$$

de l'ensemble $\{v \mid Z + \underline{v} \ [M, \sigma] \ v\}$. tel que:

$$(Z' + \underline{w}) \ [M, \sigma] \ w \textit{ et } w[\![f]\!]w' \iff (Z' + \underline{w}') \ [M, \tau] \ w' \textit{ et } \begin{cases} Z' = Z \textit{ et } \underline{w}[\![\underline{v}]\!]\underline{w}' \\ \textit{ou } Z' \neq Z \textit{ et } \underline{w}' = \underline{w} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \langle Z, \sigma\rangle \arrow[r, Rightarrow, "{[M,\sigma]}"] \arrow[d, "\underline{v}"'] & \langle M, \sigma\rangle \arrow[d, "f"] \\ \langle Z, \tau\rangle \arrow[r, Rightarrow, "{[M,\tau]}"'] & \langle M, \tau\rangle \end{tikzcd}$$

Démonstration: il est possible de linéariser (M, σ), c'est-à-dire de trouver un couple (M_l, σ_l) linéaire en chacune des méta-variables de M_l et tel que $(M, \sigma) \sim (M_l, \sigma_l)$. Avec cette construction, on sait par le corollaire 7.22 que $zede{+}\underline{v}\ [\sigma, v]$ si et seulement si il existe une méta-variable Z_i telle que

$$Z \boxed{(M, \sigma) \sim (M_l, \sigma_l)} Z_i$$

$$(Z_i + \underline{v}_i)\ [M_l, \sigma_l]\ v$$

où $\underline{v}_i$ est le radical correspondant à $\underline{v}$ dans $\langle M_l, \sigma_l \rangle$. On applique alors le corollaire 7.27. □

Corollaire 7.29 (permutation) *Soit $M \to N$ une règle de réécriture et v un radical de $\langle M, \sigma \rangle$ compatible $\uparrow$ avec le radical u associé à $M \to N$: $\langle M, \sigma \rangle \xrightarrow{u} \langle N, \sigma \rangle$. Si nous appelons u' le résidu de u par v, il existe un développement f de $v[\![u]\!]$ tel que f et u' ait même terme d'arrivée: $\partial_1 f = \partial_1 u'$ et $[\![u \cdot f]\!] = [\![v \cdot u']\!]$.*

$$\begin{tikzcd}
\langle M, \sigma \rangle \arrow[d, "v"'] & \langle Z, \sigma \rangle \arrow[l, Rightarrow, "{[M,\sigma]}"'] \arrow[r, Rightarrow, "{[N,\sigma]}"] \arrow[d, "\underline{v}"'] & \langle N, \sigma \rangle \arrow[d, twoheadrightarrow, "f \propto v[\![u]\!]"] \\
\langle M, \tau \rangle & \langle Z, \tau \rangle \arrow[l, Rightarrow, "{[M,\tau]}"] \arrow[r, Rightarrow, "{[N,\tau]}"'] & \langle N, \tau \rangle
\end{tikzcd}$$

Démonstration: appliquer le corollaire 7.28. □

Lemme 7.30 (axiome PERM+ de permutation) *Si u et v sont deux radicaux coinitiaux, alors il existe f et g des développements de $u[\![v]\!]$ et de $v[\![u]\!]$ tels que $u \cdot g$ et $v \cdot f$ induisent deux relations $[\![u \cdot g]\!]$ et $[\![v \cdot f]\!]$ identiques.*

Démonstration: la propriété est évidente si u et v sont disjoints. Autrement, si u contient v on utilise le corollaire 7.29: u s'écrit $u = C[u_0]$ avec $v = C[v_0]$ où u_0 est de la forme $\langle M, \sigma \rangle \xrightarrow{u_0} \langle N, \sigma \rangle$ quand $M \to N$ est la règle associée à u. On utilise le corollaire 7.29 pour démontrer que $[\![u_0 \cdot f]\!] = [\![v_0 \cdot u_0']\!]$ ce qui permet en passant au contexte d'écrire que $[\![u \cdot g]\!] = [\![v \cdot u']\!]$ où g développe $u[\![v]\!]$ et $u[\![v]\!]u'$. □

7.6 Axiome FD+ des développements finis

La définition des relations $<$ et $\ll$ généralise pour les CRS ce que nous avons défini dans le cadre du λ-calcul. Supposons donné un CRS. Soient deux radicaux u et v d'un α-terme t. Par définition u et v sont des triplets (t, o_u, r) et (t, o_v, r') où o_u et o_v sont des occurrences de t et r, r' des règles du système combinatoire. Nous dirons que u contient v: $u < v$ lorsque o_u est un préfixe strict de o_v. Nous dirons que u agrippe v lorsque $u < v$ et que le sous-terme sous o_v contient une variable de terme lié par u.

Démontrons le lemme FD+ des développements finis. Il est clair tout d'abord que les relations $<$ et $\ll$ sont acycliques: $<$ est un ordre et $\ll$ en est une sous relation. Les axiomes A et B ont déjà été vérifiés. La vérification de l'axiome fd-1 est immédiate.

Axiome fd-4

On démontre l'axiome fd-4 de la façon suivante. Si $u \ll w$ et $v < w$ alors parce que $\ll$ est inclus dans $<$ et que $<$ a la propriété d'arbre: soit $u < v < w$ soit $v < u < w$; dans le premier cas $u \ll v$.

Axiomes fd-2 et fd-3

Ces axiomes sont démontrés de la même manière que dans le cas du λ-calcul. Nous ne répétons pas l'argument géométrique.

Un exemple: l'opérateur μ de récursion

Nous donnons l'exemple de l'opérateur μ de récursion, qu'on peut définir par:

$$\mu x.M \to M[x := \mu x.M] \qquad (\mu)$$

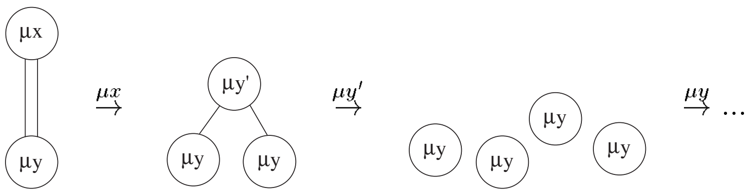
dans le cadre des CRS. Le α-terme $\mu x.\mu y.xyx$ contient deux radicaux qu'on peut développer de la manière suivante, où les radicaux non encore réduits sont soulignés.

$$\begin{array}{lc} & \mu\mathbf{xy}.xyx \\ \stackrel{\mu x}{\to} & \mu\mathbf{y}'.(\mu x\mathbf{y}.xyx)y'(\mu x\mathbf{y}.xyx) \\ \stackrel{\mu y'}{\to} & (\mu x\mathbf{y}.xyx)\{\mu y'.(\mu x\mathbf{y}.xyx)y'(\mu x\mathbf{y}.xyx)\}(\mu x\mathbf{y}.xyx) \\ \stackrel{\mu y}{\to} & \ldots \end{array}$$

Nous venons de démontrer que le calcul termine et calcule un α-terme particulier, en l'occurrence

$$N\{N(\mu y'.Ny'N)N\}N$$

où N vaut $\mu x.x(\mu y.xyx)x$. Il est intéressant de comprendre comment notre description abstraite traite ce phénomène de terminaison. La figure suivante transcrit chaque phase du développement de $\mu\mathbf{xy}.xyx$ en terme d'agrippement et d'emboitement:



7.7 Axiomes de standardisation

7.7.1 Un contre-exemple à la standardisation: la η-règle

La règle de η-réduction du λ-calcul donne un contre-exemple remarquable à nos principes de standardisation:

$$(\eta) \quad \lambda x(Mx) \to M \text{ si } x \text{ n'est pas libre dans } M$$

En effet, la η-règle ne respecte pas l'axiome III: un η-redex w peut être créé "à travers" un β-redex u par un β-redex effaceur v que u contient.

$$\lambda x.(Kax)x \stackrel{u}{\leftarrow} \lambda x.(I(Kax))x \stackrel{v}{\to} \lambda x.(Ia)x \stackrel{w}{\to} Ia$$

Or, les CRS peuvent décrire la η-règle avec la règle:

$$(\eta) \quad \lambda([x]App(Z,x)) \to Z$$

En effet, aucune variable x ne peut être liée dans le α-terme $\langle Z,\sigma\rangle$ qu'on substitue à Z lors de la η-réduction: $\langle \lambda([x]App(Z,x)),\sigma\rangle \to \langle Z,\sigma\rangle$.

7.7.2 CRS locaux

Nous proposons donc une condition suffisante sur les règles d'un CRS pour qu'il vérifie l'axiome III. L'idée est d'interdire pour une règle $M \to N$ qu'un lieur $[x]$ du méta-terme M ne se trouve pas argument d'une méta-variable $Z(x_1,...,x_k)$ qu'il domine.

Définition 7.31 (α-méta-terme local) *Soit M une partie gauche de règle $r : M \to N$, et E un ensemble fini de variables. On dit que M est local sous E:*
si $M = x$
ou si $M = [x]M'$ et M' est local sous $E \cup \{x\}$, avec x choisi hors de E
ou si $M = F(M_1,...,M_n)$ et chaque M_i est local sous E,
ou si $M = Z(x_1,...,x_k)$ et $E \subset \{x_1,...,x_k\}$.
On dit que M est local si M est local sous l'ensemble vide.

Par exemple, le α-méta-terme $App(\lambda([x]Z(x)),Z')$ est local alors que $\lambda([x]App(Z,x))$ ne l'est pas.

Définition 7.32 (CRS locaux) *Une règle de réduction est locale si sa partie gauche est locale ; un système de réduction combinatoire est local si toutes ses règles sont locales.*

En conséquence, la β-règle est locale tandis que la η-règle ne l'est pas.

7.7.3 Démonstration des axiomes I, II, III et IV

Axiomes I et II

Quel que soit le CRS, local ou pas, les axiomes I et II sont vérifiés. L'axiome I est immédiat, démontrons l'axiome II. Soit u' et v' définis par $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $r \not< v$ et $u < v$ alors $r \not< u$ parce que l'ordre d'emboîtement est transitif et donc la réduction de r se déroule sans effet sur l'ordre de u et v, et donc $u' < v'$. Réciproquement, si $r \not< v$ et $u' < v'$ alors $u < v$ parce que la réduction de r ne peut pas placer le résidu u' de u au dessus de v' sans contenir lui-même v.

Axiome III

Si le CRS est local alors l'axiome III est vérifié. En effet, supposons que $u < r$, $u \uparrow r$ et $u[\![r]\!]u'$ avec $a \xrightarrow{r} b$; décidons qu'un certain radical s de b contient u' et vérifie $s \uparrow u'$. Le radical s applique une règle $M \to N$ et le sous-terme que s circonscrit dans b est de la forme $\langle M,\tau\rangle$. Le radical u' se trouve sous la forme d'un radical $\underline{u}$ dans $\langle Z^l_m,\tau\rangle$ substitué par la valuation τ à la place de la méta-variable $Z^l_m(x_1,...,x_l)$ de M. Le radical u contient r ; il faut montrer que r peut être lui aussi simulé par un radical $\underline{r}$ de l'α-substitut $\underline{\lambda}(x_1,...,x_l).t$ tel que:

$$\underline{\lambda}(x_1,...,x_l).t \xrightarrow{\underline{r}} \langle Z^l_m,\tau\rangle$$

Dans ce cas, on peut définir la valuation σ partout comme τ sauf en Z^l_m auquel elle associe $\underline{\lambda}(y_1,...,y_l).t$. La localité de M assure que r n'a pas créé s, c'est-à-dire qu'il existe dans a un radical s_0 qui correspond à s en ce sens qu'il circonscrit le sous-terme $\langle M, \sigma\rangle$ et qu'il a s comme résidu par r. Les constructions de s et de $\underline{r}$ assurent aussi que $s_0 \uparrow r$, voir le lemme 7.7 de caractérisation. Ainsi, l'axiome III est vérifié.

Reste à montrer que $\underline{r}$ existe! Il existe bien une occurrence o de $\underline{\lambda}(y_1, ..., y_l).t$ qui correspond à la position de r dans $\langle M, \sigma\rangle$, c'est-à-dire dans a. Cependant, si r procède de la règle $M_r \rightarrow N_r$, le sous-α-terme t_o dont la racine est o est-il de la forme $\langle M_r, \sigma_{\underline{r}}\rangle$? Car alors o définit le radical $\underline{r}$ que nous recherchons dans $\underline{\lambda}(x_1, ..., x_l).t$. Il faut rappeler ici que les méta-variables dans M apparaissent sous la forme $Z(x_1, ..., x_k)$ où les x_i sont distincts deux à deux. Cela fait que si $\langle M_r, \sigma_r\rangle$ désigne le sous-α-terme que circonscrit r dans a alors t_o vaut exactement $\langle M_r, \sigma_r\rangle[y_1/x_1, ..., y_l/x_l]$. Il s'en suit que t_o est de la forme $\langle M_r, \sigma_{\underline{r}}\rangle$ où $\sigma_{\underline{r}}$ est la valuation:

$$\forall Z \in \mathsf{MVar}, \quad \langle Z, \sigma_{\underline{r}}\rangle = \langle Z, \sigma_r\rangle[y_1/x_1, ..., y_l/x_l]$$

$$\forall z \in \mathsf{Var}, \quad \langle z, \sigma_{\underline{r}}\rangle = \langle z, \sigma_r\rangle[y_1/x_1, ..., y_l/x_l]$$

Axiome IV

Si u et v disjoints créent le "même" radical t' alors ...la même règle de réduction $M \rightarrow N$ (celle de t') peut être appliquée en P^1 et P^2 sans être applicable en P, pour

$$P \xrightarrow{u} P^1 \quad \text{et} \quad P \xrightarrow{v} P^2$$

Si t' a pour occurrence o alors o domine nécessairement u et v — parce que les termes ont une structure d'arbre. Soit $P^1|o$ le terme circonscrit par o dans P^1 et $P^2|o$ le terme circonscrit par o dans P^2. Alors $P^1|o = \langle M, \sigma_1\rangle$ et $P^2|o = \langle M, \sigma_2\rangle$ pour certaines valuations σ_1 et σ_2. On peut construire une valuation τ telle que $P|o$, le sous-terme circonscrit par o dans P, ait pour valeur $\langle M, \tau\rangle$. En effet: M peut écrire $C[M_i, M_j]$ avec o_i et o_j les occurences de M_i et M_j, occurence disjointes telles que $o \cdot o_i$ domine u dans P et $o \cdot o_j$ dominent v dans P. Alors σ_1 et σ_2 sont égales sur les méta-variables et noms de M sauf lorsqu'ils apparaissent dans M_i ou M_j. Plus exactement: M_i et M_j ne se partagent aucune aucune méta-variable par définition d'un CRS linéaire gauche ; une variable de nom z qui apparait dans M_i et dans M_j sans être liée dans M aura la même image par σ_1 et σ_2, la variable $\langle z, \sigma\rangle$. Par ces remarques on établit la validité de la prochaine construction de τ:

$$\langle Z, \tau\rangle = \begin{cases} \langle Z, \sigma_1\rangle \text{ si } Z \text{ apparait dans } M_j \\ \langle Z, \sigma_2\rangle \text{ si } Z \text{ apparait dans } M_i \end{cases} \quad \langle z, \tau\rangle = \begin{cases} \langle z, \sigma_1\rangle \text{ si } z \text{ apparait dans } M_j \\ \langle z, \sigma_2\rangle \text{ si } z \text{ apparait dans } M_i \end{cases}$$

Le radical $t = (P, o, M \rightarrow N)$ est bien compatible à u et v et les contient ; il a pour résidu t_1 par u et t_2 par v. Ce qui démontre l'axiome IV.

Théorème de standardisation

Les axiomes A, B, C, C', D, E sont eux aussi vérifiés, ce qui permet d'appliquer le théorème de standardisation à tous les CRS avec noms, tels que nous les avons définis en partie 7.1.

Ces systèmes ont pourtant des comportements parfois inattendus. Soit le CRS (avec noms) suivant:

$$Z|Z' \rightarrow Z'|Z \quad a|b \times b|a \rightarrow 1$$

Les deux radicaux

$$u : a|b \times a|b \to b|a \times a|b$$

et

$$v : a|b \times a|b \to a|b \times b|a$$

crèent des radicaux t_1 et t_2 très ressemblants:

$$t_1 : b|a \times a|b \to 1$$

$$t_1 : a|b \times b|a \to 1$$

Cependant, si on appelle u' et v' les résidus mutuels de u et de v : $u[\![v]\!]u'$ et $v[\![u]\!]v'$ alors t_1 et t_2 sont en paire critique avec v' et u'. L'axiome IV est bien vérifié.

7.8 Normalisation forte

Nous conjecturons que les axiomes B+, F, G, H, sn-1, sn-2, sn-3, sn-4, sn-5, sn-6, sn-7, sn-8, sn-9 sont vérifiés par les CRS locaux et à nom. Si cette propriété est effectivement vraie, nous pourrons conclure:

Conjecture 1 (Normalisation forte) *Un CRS local et à nom dont la profondeur de production est bornée est fortement normalisant.*

Une fois vérifié, ce résultat s'appliquerait aux systèmes orthogonaux et non orthogonaux sans distinction.

Chapitre 8

Conclusion

Pour une grande part, notre travail est une reprise d'un article en deux parties de Gérard Huet et Jean-Jacques Lévy, [HL 79] sur les questions de standardisation et de séquentialité dans les systèmes syntaxiques orthogonaux du premier ordre. Nous réinterprétons leurs résultats dans un cadre abstrait pour en dévoiler certains mécanismes et en permettre l'application aux systèmes non déterministes.

Cette relecture s'est développée selon trois axes. En premier lieu, nous avons trouvé dans les λ-calculs avec substitutions explicites un champs d'application exemplaire pour nos théories. Ce fut une grande chance dont nous avons profité pour définir la notion de "ω-déterminisme" et démontrer — résultat spectaculaire — la finitude du nombre de classes de permutation d'un $\lambda\sigma$-terme à sa forme normale, quand celle-ci existe. Qu'on puisse trouver des résultats de normalisation dans des calculs non déterministes fut une très bonne surprise.

Le travail sur les substitutions explicites, parce qu'il nécessite une meilleure compréhension des mécanismes de réduction, a permis d'obtenir un exemple inattendu de non terminaison forte du $\lambda\sigma$-calcul simplement typé.

Enfin, nous avons voulu redémontrer les deux résultats de normalisation fondamentaux du λ-calcul: le lemme des développements finis et le théorème de normalisation forte du λ-calcul simplement typé. D'abord, nous obtenons une démonstration abstraite et générique des développements finis pour les calculs d'ordre supérieur; quatre axiomes agréables sont utilisés pour décrire ces systèmes et passer la preuve. Ensuite, nous soupçonnons — et c'est une première — la capacité de description qu'a l'étiquetage décroissant des radicaux sur les mécanismes de normalisation forte; nous avançons un procédé de description plus fin et donnons une démonstration cette fois juste — nous l'espérons — de la normalisation forte des systèmes d'ordre supérieur à étiquetage décroissant. Contrairement à la plupart des autres approches, les démonstrations des théorèmes de développement fini et de normalisation forte s'appliquent aussi aux systèmes non déterministes — nouvelle importante quand il s'agit de systèmes aussi pauvres en résultats généraux.

Nous le répétons pour finir, cet héritage qui nous occupe est double: standardisation *et* séquentialité. La standardisation s'est vue traitée sous de nombreux angles. La séquentialité doit maintenant trouver sa place dans notre échaffaudage. Avec son étude s'ouvre la question passionnante des rapports entre sémantique et syntaxe — de leur intimité complice. Nous attendons beaucoup de notre analyse abstraite de la réécriture pour éclaircir ces relations encore mal comprises et offrir — est-ce une dette inattendue à notre séjour hollandais? — les moyens d'établir entre ces deux nations un commerce fructueux.

Bibliographie

[ACCL 90] M. Abadi, L. Cardelli, P.-L. Curien, J.-J. Lévy, "*Explicit substitutions*". Conférence Principle Of Programming Languages, 1990.

[AJM 95] S. Abramsky, R. Jagadeesan, P. Malacaria, "*Full Abstraction for PCF*", soumis à publication, 1995.

[Alt 93] Thorsten Altenkirch, "*Constructions, inductive types and strong normalisation*", Thèse de l'Université d'Edimbourgh, 1993.

[AL 92] Andrea Asperti, Cosimo Laneve, "Interaction Systems I: the theory of optimal reductions". Rapport de recherche 1748 INRIA, 1991.

[Bar 80] H.-P. Barendregt, "*The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*". North Holland, 1985.

[BBLR 95] Zine-El-Abidine Benaissai, Daniel Briaud, Pierre Lescanne, Jocelyne Rouyer-Degli, "$\lambda\upsilon$, a calculus of explicit substitutions which preserves strong normalisation", Submitted to the Journal of Functional Programming, 1995.

[Ber 79] G. Berry, "*Modèles complètement adéquats et stables des lambda-calculs typés*" Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII, 1979.

[BB 88] G. Berry, G. Boudol, "*The Chemical Abstract Machine*" Journal of Theoretical Computer Science, Vol 96, pp 217-248, 1992.

[BC 82] G. Berry, P.-L. Curien, "*Sequential Algorithms on concrete data structures*" Theoretical Computer Science, 20:265—321, 1982.

[BL 79] G. Berry, J.-J. Lévy, "*Minimal and Optimal Computations of Recursive Programs*". Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 26, No 1, 1979.

[Bou 85] G. Boudol, "*Computational semantics of term rewriting systems*". Algebraic methods in Semantics, Maurice Nivat and John C. Reynolds (eds), Cambridge University Press, 1985.

[Bou 89] G. Boudol, "*Towards a lambda-calculus for concurrent and communicating systems*" TAPSOFT 1989, Lecture Notes in Computer Science 351, pages 149–161. Springer Verlag, 1989.

[BTG 94] Val Breazu-Tannen, Jean Gallier, "*Polymorphic Rewriting Conserves Algebraic Confluence*", Information and Computation, Vol. 14, No. 1, 1-29, 1994.

[BE 92] A. Bucciarelli, T. Ehrhard, "*Sequentiality in an extensional framework*". Information and Computation 110, numéro 2, page 265—296, 1994.

[Chu 36] A. Church, J.-B. Rosser, "*Some properties of conversion*". Transactions of the American Mathematical Society Volume 39, pages 472—482, 1936.

[Chu 41] A. Church, "*The calculi of lambda conversion*", Princeton University, 1941.

[CH 88] Thierry Coquand, Gérard Huet, "*The calculus of construction*", Information and Computation, 76: 95—120, 1988.

[CK 95] D. Clark, R. Kennaway, "*Some properties of non-orthogonal Graph Rewriting* To appear as part of the Elsevier Electronic Notes on Computer Science, 1995.

[Cur 86] P.-L. Curien, "*Categorical Combinators, Sequential Algorithm and Functional Programming*". Research Notes in Theoretical Computer Science, Pitman Publishing Ltd., 1986.

[Cur 88] P.-L. Curien, "*The $\lambda\rho$-calculi: an Abstract Framework for Closures*". Unpublished, (preliminary version printed as LIENS report, 1988).

[CHR 92] P.-L. Curien, T. Hardin, A. Ríos, "*Strong Normalization of Substitutions*". Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 629, 1992.

[Cur 58] H.-B. Curry, R. Feys, "*Combinatory Logic*". North Holland Volume 1, 1958.

[vDa 77] Dirk van Daalen, "The language theory of Automath", PhD thesis, Eindhoven, 1977.

[DeB 72] N. De Bruijn, "*Lambda-calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation*". Indag. Mat. Volume 34, 1972.

[DHK 95] G. Dowek, Th. Hardin, C. Kirchner, "*Higher-order unification via explicit substitutions*", Logic in Computer Science (1995). Rapport de Recherche 2709 INRIA, 1995.

[FK 72] P.J. Freyd, G.M. Kelly, "*Categories of continuous functors, I*". Journal of Pure and Applied Algebra 2, pp 169—191, 1972.

[Gir 72] Jean-Yves Girard, "*Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures dans l'arithmétique d'ordre supérieur*", Thèse de l'université Paris VII, 1972.

[Gir 95] J. Y. Girard, "*Linear Logic: its syntax and semantics*" in "Advances in Linear Logic", edited by Jean-Yves Girard, Yves Lafont aet Laurent Regnier, Cambridge University Press, 1995.

[Gir 89] J.-Y. Girard, "*Geometry of Interaction 1: Interpretation of System F*". In R. Ferro et al., editor, Logic Colloquium 88. North Holland, 1989.

[GLM 92] G. Gonthier, J.-J. Lévy, P.-A. Mellies, "*An abstract standardisation theorem*". Seventh Annual IEEE Symposium on Logic In Computer Science, August 1992.

[Har 87] Thérèse Hardin, "*Résultats de confluence pour les Règles fortes de la Logique Combinatoire Catégorique et Liens avec les Lambda-calculs*". Thèse de l'Université Paris 7, octobre 1987.

[Har 88] T. Hardin, "Confluence Results for the Pure Strong Categorical Combinatory Logic. λ-calculi as subsystems of CCL". *Journal of Theoretical Computer Science*, 1989.

[HaLa 86] T. Hardin, A. Laville, "*Proof of Termination of the Rewriting System SUBST on CCL*". Journal of Theoretical Computer Science, Volume 46, 1986.

[HaLé 92] T. Hardin, J.-J. Lévy, "*Confluence Properties of Weak and Strong Calculi of Explicit Substitutions*". Rapport de recherche INRIA Rocquencourt 1617, février 1992.

[HMP 96] Thérèse Hardin, Luc Maranget, Bruno Pagano, "*Functional Back-Ends within the Lambda-Sigma Calculus*", Proc. of the 1996 International Conference on Functional Programming, 1996.

[Hin 78] R. Hindley, "*Reductions of residuals are finite*". Transactions of the American Mathematical Society Volume 240, June 1978.

[Hin 69] R. Hindley, "*An abstract form of the Church Rosser theorem*". Journal of Symbolic logic Volume 34, Number 4, December 1969.

[Hin 86] J.R. Hindley, J.P. Seldin, "*Introduction to Combinators and λ-calculus*". London Mathematical Society, Students Texts 1, Cambridge University Press, 1986.

[Hon 94] Kohei Honda, TACS'94.

[Hue 80] G. Huet, "*Confluent Reductions : Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems*". Journal of the Association for Computing Machinery vol. 27, No 4 (1980), 797–821.

[HL 79] G. Huet, J.-J. Lévy, "*Call by Need Computations in Non-Ambiguous Linear Term Rewriting Systems*". Rapport de recherche INRIA 359, 1979.

[HL 91] G. Huet, J.-J. Lévy, "*Computations in orthogonal rewriting systems*". In J.-L. Lassez and G. D. Plotkin, editors, *Computational Logic; Essays in Honor of Alan Robinson*, pages 394–443. MIT Press, 1991.

[Hyl 73] J.M.E. Hyland, "*A simple proof of the Church-Rosser theorem*", Type Script, Oxford University.

[JO 91] Jean-Pierre Jouannaud, Mitsuhiro Okada, "*A computational model for executable higher-order algebraic specification languages*", Sixth Annual IEEE Symposium on Logic In Computer Science, 1991.

[Kah 92] Stefan Kahrs, "*Context rewriting*". CTRS'92.

[Kha 95] Zurab Khasidashvili, "Smallest perpetual reductions in orthogonal expression reduction systems". Manuscript, 1995.

[Klo 80] J.W. Klop, "*Combinatory Reduction Systems*". Thèse de l'Université d'Utrecht, Pays-Bas (1980).

[Klo 92] J.W. Klop, "*Term Rewriting Systems*" Handbook of Logic in Computer Science, Volume 2, in S. Abramsky, Dov M. Gabbay, T.S.E. Maibaum, editors, Oxford Science Publications, 1992.

[KM 89] J.W. Klop, A. Middeldorp, "*Sequentiality in Orthogonal Term Rewriting Systems*". Report Cs-R8932, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, Pays-Bas.

[KOR 93] Jan Willem Klop, Vincent van Oostrom, Femke van Raamsdonk, "*Combinatory Reduction Systems: introduction and survey*". in "A Collection of Contributions in Honour of Corrado Böhm", M. Dezani-Ciancaglini, S. Ronchi Della Rocca, and M. Venturini Zilli editors, Theoretical Computer Science, volume 121, pages 279–308, 1993.

[KB 70] D.E. Knuth, P.B. Bendix, "*Simple word problems in universal algebras*", In J. Leech, editor, Computational Problems in Abstract Algebra, page 263–297, Pergamon Press, 1970.

[Kru 60] J. B. Kruskal, "*Well quasi orderings, the tree theorem, and Vázsonyi's conjecture*", Trans. America Math. Soc. 95, 210—225, 1960.

[Laf 95] Yves Lafont, "*From proof-nets to interaction nets*", in "Advances in Linear Logic", edited by Jean-Yves Girard, Yves Lafont aet Laurent Regnier, Cambridge University Press, 1995.

[Lév 78] Jean-Jacques Lévy, "*Réductions correctes et optimales dans le λ-calcul*". Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII, 1978.

[Lév 80a] Jean-Jacques Lévy, "*Optimal reductions in the lambda-calculus*". In J.P. Seldin and J.R. Hindley editors, "To H.B. Curry: Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism", Academic Press. 1980.

[Lév 80b] Jean-Jacques Lévy, "*Computation as Deduction*". Course note 7 at CMU.

[Mac 71] Sauders Mac Lane, "*Categories for the working mathematician*", Springer Verlag, 1971.

[MM 92] Sauders Mac Lane, Ieke Moerdijk, "*Sheaves in Geometry and Logic — a first introduction to topos theory*", Springer-Verlag, 1992.

[Mar 92] Luc Maranget, "*La stratégie paresseuse*", Thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 1992.

[Mel 94] Paul-André Melliès, "*Four typed lambda-calculi with explicit substitutions may not terminate: the first examples*". Manuscrit.

[Mel 95] Paul-André Melliès, "*Typed Lambda-Calculi with Explicit Substitutions may not terminate*". Proceedings of TLCA'95, Lecture Notes in Computer Science 902, Springer, 1995.

[Mel 95a] Paul-André Melliès, "*Exemple de non terminaison forte dans un lambda-sigma calcul typé avec priorités et lois de monoide*". Manuscrit.

[Mel 95b] Paul-André Melliès, "Braids as an orthogonal system". En préparation.

[MW 96] Paul-André Melliès, Benjamin Werner, "A generic proof of normalisation for pure type systems". Soumis à publication.

[Mil 91] R. Milner, "*The polyadic pi-calculus:a tutorial*" Research Report ECS-LFCS-01-180, Laboratory for Fondations of Computer Science, Edinburgh University, 1991.

[Mil 92] R. Milner, "*Action structures*" Research Report LFCS-92-249, Laboratory for Fondations of Computer Science, Edinburgh University, 1992.

[Mil 94] R. Milner, "*Action calculi, or syntactic action structures*" Proceedings of MFCS'93, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1993.

[Mun 95] César Muñoz, "$\lambda\zeta$-calculus: a confluent and strongly normalising system with explicit substitutions". Unpublished note, 1995.

[Ned 73] R. P. Nederpelt, "*Strong Normalisation in a typed lambda calculus with lambda structured types*" in R. P. Nederpelt, J. H. Geuvers, R. C. de Vrijer Editors, "Selected Papers on Automath", Studies in Logic, North Holland, volume 133, 1994.

[New 42] M.H.A. Newman, "On theories with a combinatorial definition of "equivalence"" Annals of Mathematics, 43, Number 2, pages 223–243.

[NW 95] M. Nielsen, G. Winkel, "Models for concurrency", in *Handbook of Logic in Computer Science*, Abramsky, Gabbay, Maibaum editors, Oxford Science, 1995.

[O'D 77] M. O'Donnell, "*Computing in Systems Described by Equations*". LNCS No 58, Eds G. Goos and J. Hartmanis, Springer, 1977.

[Oos 94] V. van Oostrom, "*Confluence for Abstract and Higher-Order Rewriting*", Thèse de l'Université Libre d'Amsterdam, Pays-Bas (1994).

[Oos 96] V. van Oostrom, "*Higher Order Families*" Rewriting Techniques and Applications Proceedings (1996).

[Ram 96] F. van Raamsdonk, "*Confluence and Normalisation for Higher-Order Rewriting*", Thèse de l'Université Libre d'Amsterdam, Pays-Bas (1996).

[Rev 85] G. Revesz, "Axioms for the theory of lambda-conversion", *S.I.A.M. Journal of Computation*, 14(2):373-382, mai 1985.

[Sch 65] D. E. Schroer, "*The Church-Rosser theorem*", Phd thesis, Cornell University, 1965.

[Sor 95] M. H. Sorensen, "Properties of infinite reduction paths in untyped λ-calculus", Selected proc. of the Tbilisi Symposium on Logic, Language and computation, TSLLC'95, J. Ginzburg, Z. Khasidashvili, J.-J. Lévy and E .Vallduvi, eds. CSLI, stanford. A paraître.

[Sta 80] J. Staples, "*Computations on graph-like expressions*", "*Optimal evaluation of graph-like expressions*", "*Speeding up subtree replacement systems*". Theoretical Computer Science 10 and 11 (1980).

[Sta 89] E. W. Stark, "Concurrent transition systems", *J. Theoretical Computer Science*, volume 64, number 3, may 1989.

[Toy 92] Yoshihito Toyama, "Strong sequentiality of left-linear overlapping term rewriting systems", Seventh Annual IEEE Symposium on Logic In Computer Science, August 1992.

[Vri 85] R. de Vrijer, "*A direct proof of the Finite Developments theorem*" The Journal of Symbolic Logic, Number 2, June 1985.

[Wad 71] C.P. Wadsworth, "*Semantics and Pragmatics of the Lambda Calculus*". Oxford Universtity, 1971.

[Zan 93] H. Zantema, "*Termination of term rewriting by interpretation*". Proceedings of CTRS'93, Lecture Notes in Computer Science 656, 1993.

Table des matières

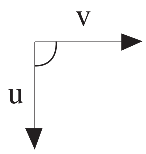
Index

Chapitre 9

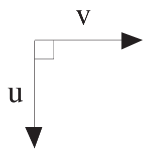
Memento des axiomes, critères et relations

9.1 Relations sur les radicaux co-initiaux

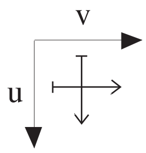
compatibilité: $u \uparrow v$



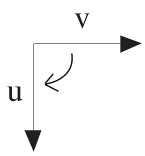
disjonction: $u \parallel v$



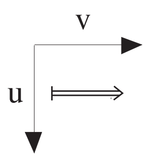
ou



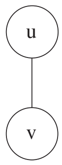
emboîtement: $u < v$



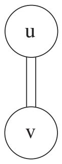
ou



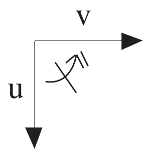
ou



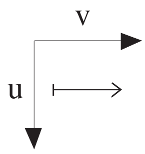
agrippement: $u \ll v$



non emboîtement: $v \not\leq u$



ou



9.2 Petits axiomes

Petit axiome A (auto-réduction)**:** Soit r un radical. L'ensemble $r[\![r]\!]$ est vide.

Petit axiome B (nombre de résidus finis): Soit u et r deux radicaux coinitiaux. L'ensemble $\{v \mid u[\![r]\!]v\}$ est fini.

Petit axiome C (compatibilités): Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que $u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v'$. Si $r \uparrow u$ et $r \uparrow v$, alors $u \uparrow v \Longrightarrow u' \uparrow v'$

Petit axiome C' (compatibilité des ancêtres): Soit quatre radicaux r, u, v et v' tels que $r \uparrow u$, $r \uparrow v$, $r \not\leq v$, et $v[\![r]\!]v'$. Si $u[\![r]\!] = \emptyset$ ou ($u[\![r]\!]u'$ et $u' \uparrow v'$) alors $u \uparrow v$.

Petit axiome D (unicité des ancêtres): Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $u' = v'$ alors $u = v$.

Petit axiome E (incompatibilité): Soit deux radicaux coinitiaux u et v. Si $u \# v$ alors $v[\![u]\!] = \emptyset$.

Pour la normalisation forte

Petit axiome B+ (nombre de radical fini): Le nombre de radicaux dans chaque terme est fini.

Petit axiome F (transitivité): Si $u \in \alpha$ et $u \prec v$ alors $v \Downarrow \alpha$ ou $\alpha \prec v$.

Petit axiome G (nombre fini de résidus de contextes λ-clos): Le nombre de résidu α' par r d'un contexte λ-clos α est fini.

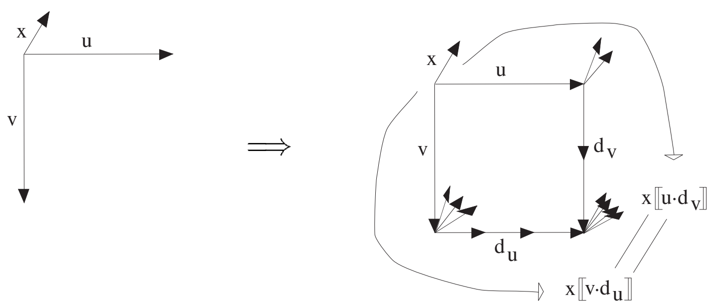
Petit axiome H1 (compatibilité des radicaux et contextes λ-clos): Soit un radical r et deux contextes λ-clos α et β. Si $r \in \alpha$ et $\alpha \Uparrow \beta$ alors $r \Uparrow \beta$.

Petit axiome H2 (compatibilité par des contextes λ-clos): Soit quatre contextes λ-clos α, β, α', β' et un radical r tels que: $\alpha[\![r]\!]\alpha'$ et $\beta[\![r]\!]\beta'$. Alors $r \Uparrow \alpha, r \Uparrow \beta, \alpha \Uparrow \beta \Longrightarrow \alpha' \Uparrow \beta'$

9.3 Axiomes généraux

Axiome FD Terminaison des développements
Soit U un ensemble pointé fini de radicaux de même source. Alors tous les développements de U sont finis.

Axiome PERM Axiome de permutation générale
Soient u et v deux radicaux coinitiaux. Il existe d_u et d_v deux développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$ tels qu'ils terminent sur le même terme et induisent deux relations $[\![u]\!][\![d_v]\!]$ et $[\![v]\!][\![d_u]\!]$ identiques.



Axiome FD+ Axiome des développements finis entre radicaux compatibles
Soit U un ensemble pointé fini de radicaux deux à deux compatibles: $\forall (u, v) \in U, u \uparrow v$. Alors tous les développements de U sont finis (= dérivations).

Axiome PERM+ Axiome de permutation entre radicaux compatibles
Soit u et v deux radicaux coinitiaux et compatibles. Il existe alors d_u et d_v deux développements de $u[\![v]\!]$ et $v[\![u]\!]$ tels que:

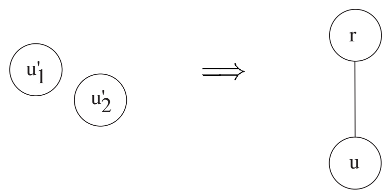
1. d_u et d_v terminent sur le même terme b,

2. pour tout radical x tel que $x \uparrow u$ et $x \uparrow v$, on a pour tout radical y à partir de b:

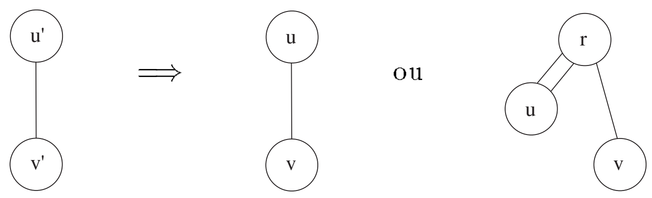
$$x[\![u \cdot d_v]\!]y \iff x[\![v \cdot d_u]\!]y$$

9.4 Axiomes des développements finis

Axiome fd-1 Duplication
$u[\![r]\!]u'_1, u[\![r]\!]u'_2, u_1 \neq u_2 \Longrightarrow r < u$

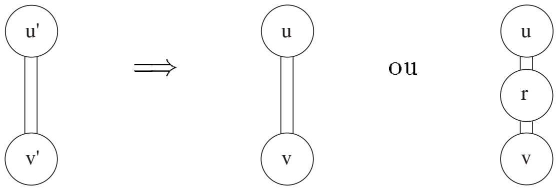


Axiome fd-2 Instantiation
$u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v', u' < v' \Longrightarrow u < v$ ou $u \gg r < v$

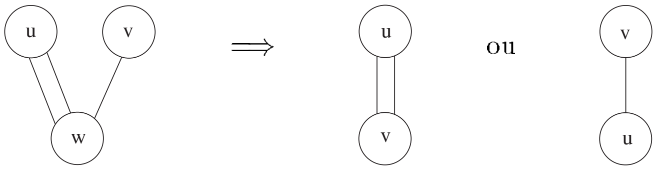


Axiome fd-3 Migration de la variable

$u[\![r]\!]u', v[\![r]\!]v', u' \ll v' \Longrightarrow u \ll v$ ou $u \ll r \ll v$

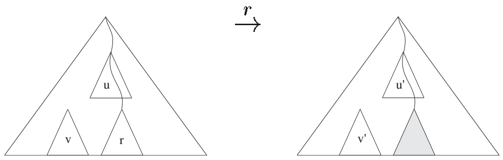


Axiome fd-4 Convexité
$u \ll w$ et $v < w \Longrightarrow u \ll v$ ou $v < u$.



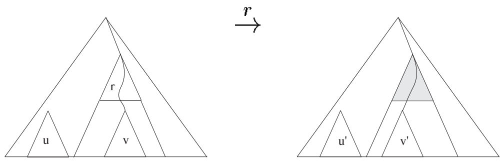
9.5 Axiomes de standardisation

Axiome I de Linéarité
Soit deux radicaux coinitiaux r et u. Si $r \not\leq u$ et $r \uparrow u$, alors: $\exists! u'$, $u[\![r]\!]u'$.

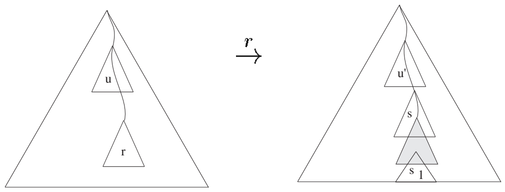


Axiome II de Non-Contextualité
Soit r, u, v, u' et v' cinq radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Ils vérifient la propriété suivante:

$$(u < v \iff u' < v') \text{ ou } r < v.$$

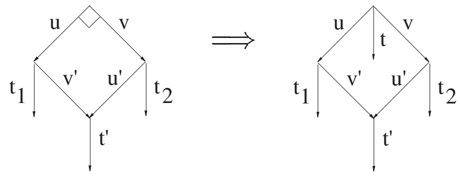


Axiome III d'enclave
Soit $u[\![r]\!]u'$,
Soit r, u, u' trois radicaux tels que $u[\![r]\!]u'$.
(Création) si $u < r$ et r crée s, c'est-à-dire $[\![r]\!]s = \emptyset$, alors $u' < s$ ou $u' \# s$.
(Emboîtement) si $u < r < v$ et $v[\![r]\!]v'$ alors $u' < v'$ ou $u' \# v'$.



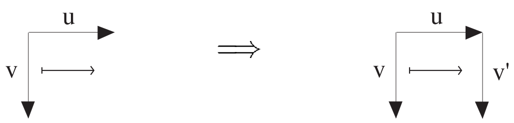
Axiome IV stabilité
Soit deux radicaux compatibles et disjoints u et v: $u \uparrow v$ et $u \parallel v$, et leurs résidus mutuels les radicaux u' et v': $u[\![v]\!]u'$ et $v[\![u]\!]v'$. Soit t_1 un radical coinitial à v' et t_2 un radical coinitial à u'. Nous supposons qu'il existe un radical t' tel que $t_1[\![v']\!]t'$ et $t_2[\![u']\!]t'$.

Si $v' \not\leq t_1$ et $u' \not\leq t_2$ alors
(Création) il existe un radical t compatible avec u et v tel que $t[\![u]\!]t_1$ et $t[\![v]\!]t_2$.
(Emboîtement) ce radical t vérifie que $u \not\leq t$ ou $v \not\leq t$.

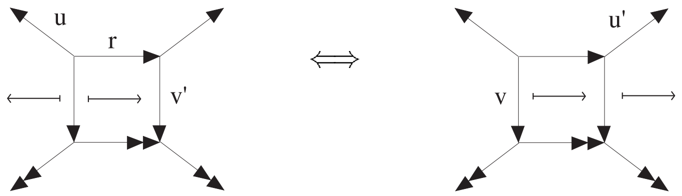


9.6 Axiomes de standardisation

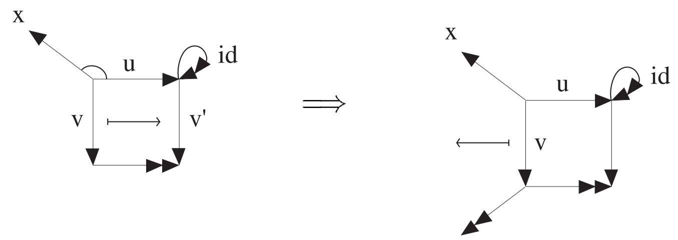
Critère 1 $u\mathsf{R}v \Longrightarrow \exists! v', v[\![u]\!]v'$.



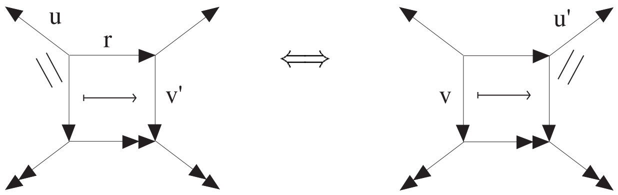
Critère 2 *Soient r et u deux radicaux compatibles et $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$. Si $r\mathsf{R}v$ alors ($u\mathsf{R}v \iff u'\mathsf{R}v'$).*



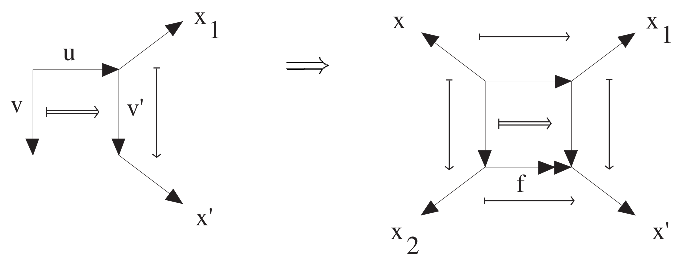
Critère 3 *Soit u et x deux radicaux coinitiaux compatibles. Si $u\mathsf{R}v$ et $x[\![u]\!] = \emptyset$ alors $x\mathsf{R}v$.*



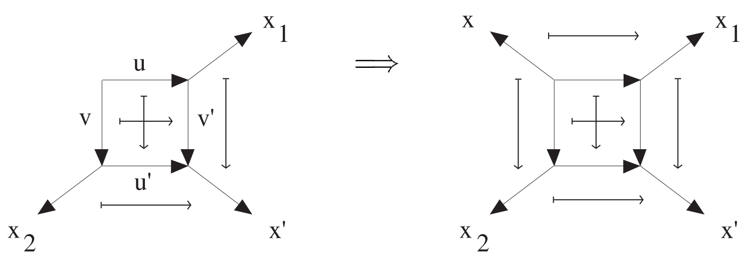
Critère 4 *si* $r\mathsf{R}y$ *alors* $(x = y \iff x' = y')$.



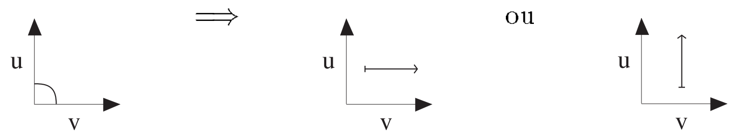
Critère 5 (Critère d'enclave) *Si* $u\mathsf{R}_+v$ *et* $x_1 \overset{v'}{\mapsto} x'$ *alors il existe deux radicaux* x *et* x_2 *et un développement* f *de* $v[x]$ *tels que* $x \overset{u}{\mapsto} x_1$, $x \overset{v}{\mapsto} x_2$ *et* $x_2 \overset{f}{\mapsto} x'$.



Critère 6 (Critère de stabilité) *si* $u\mathsf{R}_{\square}v$ *et* $x_1 \overset{v'}{\mapsto} x'$, $x_2 \overset{u'}{\mapsto} x'$ *alors il existe* x *tel que* $x \overset{u}{\mapsto} x_1$ *et* $x \overset{v}{\mapsto} x_2$.



Critère 7 *$u \uparrow v \Longrightarrow u\mathsf{R}v$ ou $v\mathsf{R}u$.*



Critères annexes

Critère 8 (critère de transitivité faible) *Soit u, v, x et x_1 quatre radicaux. Si $u\mathsf{R}_+v$, $v\mathsf{R}_+x$ et $x \overset{u}{\mapsto} x_1$ alors $x \underset{+}{\overset{u}{\mapsto}} x_1$.*

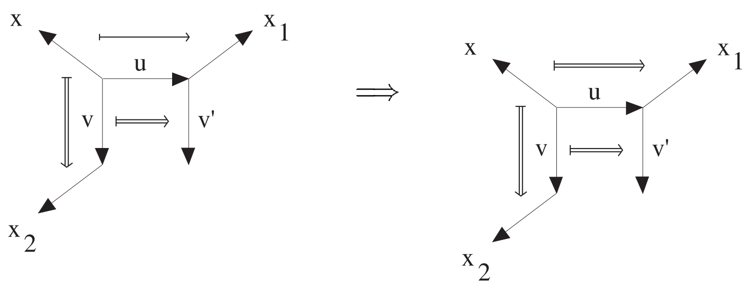


Figure 9.1: critère 8 de transitivité faible

Critère 9 (critère 2+) *Soit cinq radicaux r, u, v, u', v' tels que r et u sont compatibles et $u[\![r]\!]u'$ et $v[\![r]\!]v'$.*

$$\textit{Si } r\mathsf{R}u \textit{ alors } (u\mathsf{R}v \iff u'\mathsf{R}v')$$

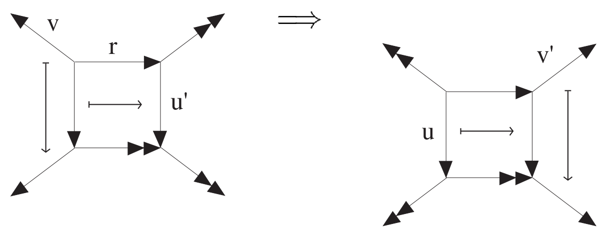


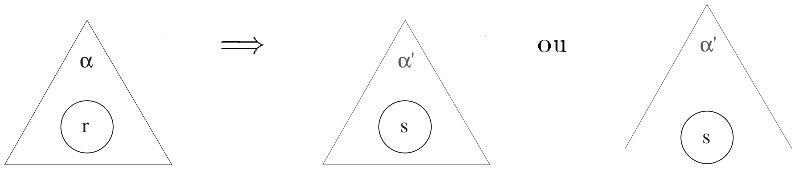
Figure 9.2: critère 9 = critère 2+

9.7 Axiomes de normalisation forte

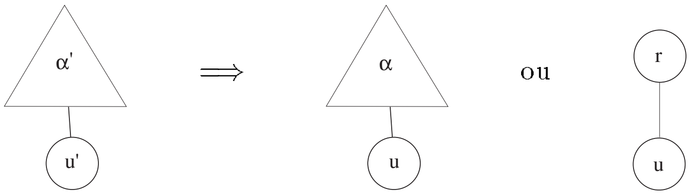
Axiome sn-1 création I
Soit $r \in \mathcal{R}$. L'ensemble H_r est plein sous r.

Axiome sn-2 emboîtement I
Soit $r \in \mathcal{R}$. L'ensemble H_r est plein.

Axiome sn-3 création II
Soit deux radicaux r et s, et un contexte λ-clos α. Si $r \in \alpha$ et r crée s, alors il existe un contexte λ-clos α' tel que: $\alpha[\![r]\!]\alpha'$ et $s \Downarrow \alpha'$.



Axiome sn-4 emboîtement II
Soit deux contextes λ-clos α et α' et un radical r tel que $r \Uparrow \alpha$ et $\alpha[\![r]\!]\alpha'$. Soit deux radicaux u et u' tels que $u[\![r]\!]u'$. Si $\alpha' \prec u'$ alors $\alpha \prec u$ ou $u\mathsf{R}_+r$.



Axiome sn-5 préservation
Soit trois radicaux u, r et u' tels que $u[\![r]\!]u'$. Soit un contexte λ-clos α tel que $r \Uparrow \alpha$. Si $u \Downarrow \alpha$ alors il existe un contexte λ-clos α' tel que $\alpha[\![r]\!]\alpha'$ et $u' \Downarrow \alpha'$.

Axiome sn-6 duplication
Soit un radical r et un contexte λ-clos α tels que $r \in \alpha$. Soient trois contextes λ-clos β, β_1 et β_2 tels que $\beta[\![r]\!]\beta_1$ et $\beta[\![r]\!]\beta_2$. Si $\beta_1 \neq \beta_2$ alors ($\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$).

Axiome sn-7 instantiation
Soit $r \in \gamma$ avec $\gamma \uparrow \alpha$ et $\gamma \uparrow \beta$, et $\alpha[\![r]\!]\alpha'$, $\beta[\![r]\!]\beta'$. Alors $\alpha' < \beta' \Longrightarrow \alpha < \beta$.

Axiome sn-8 La loi de projection
Soit $\mathcal{D}$ une dérivation infinie et $\vec{\gamma}$ une ligne de réduction de $\gamma \in \Gamma$ par $\mathcal{D}$. Il existe alors une dérivation $\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma}$ relative à γ. On appelle cette dérivation la projection par $\mathcal{D}$ de $\vec{\gamma}$ sur γ.

Nous ferons l'hypothèse d'un certain respect de notre construction vis à vis du nombre de fois que $\mathcal{D}$ réduit dans $\vec{\gamma}$: pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma}$ est de longueur au moins k lorsque $\mathcal{D}$ réduit dans $\vec{\gamma}$ plus de n fois.

Axiome sn-9 Loi de l'harmonique
Si $\gamma \in H_r$ tandis que $\vec{\gamma}$ est une ligne de réduction de γ par $\mathcal{D}$ alors $(\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma})\mathsf{R}_+ r$.
