

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT  
Institut de Recherche en Informatique Fondamentale

---

# AUTOMATES, (SEMI)GROUPES, DUALITÉS

---

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Matthieu PICANTIN

*soutenu publiquement le 10 juillet 2017 devant le jury constitué de*

Laurent BARTHOLDI,	ENS Paris & Université de Göttingen,	<i>Rapporteur</i>
Marie-Pierre BÉAL,	Université Paris-Est Marne-la-Vallée,	<i>Examinatrice</i>
Valérie BERTHÉ,	CNRS & Université Paris Diderot,	<i>Examinatrice</i>
Olivier CARTON,	Université Paris Diderot,	<i>Rapporteur</i>
Pierre-Louis CURIEN,	CNRS & Université Paris Diderot,	<i>Examineur</i>
Jean MAIRESSE,	CNRS & Université Pierre & Marie Curie,	<i>Examineur</i>
Ivan MARIN,	Université de Picardie Jules Verne,	<i>Examineur</i>
Pedro V. SILVA,	Université de Porto,	<i>Rapporteur</i>



# Table des matières

<b>Organisation</b>	<b>1</b>
<b>I Automates de Mealy et (semi)groupes d'automate</b>	<b>3</b>
<b>1 Pavages, rigidité et automates cellulaires</b>	<b>5</b>
1.1 Minimisation et dualisation . . . . .	6
1.2 Pavages et automates reset . . . . .	12
1.3 Graphe en hélice et rigidité . . . . .	19
<b>2 Burnside, réversibilité et arbres de Schreier</b>	<b>25</b>
2.1 Arbre de Schreier . . . . .	26
2.2 Automate orbital . . . . .	32
2.3 Rayon de transitivité . . . . .	37
<b>II Monoïdes de tresses et théorie de Garside</b>	<b>41</b>
<b>3 Groupes de tresses, structures de Garside multiples et dualité</b>	<b>43</b>
3.1 Monoïde de Garside et monoïde-germe . . . . .	44
3.2 Monoïdes dual et (post)classique . . . . .	49
3.3 Triple dualité pour le groupe hyperoctaédral . . . . .	55
<b>4 Amalgames, extensions HNN et groupes à unique relateur</b>	<b>61</b>
4.1 Produits libres amalgamés . . . . .	62
4.2 Extensions HNN . . . . .	66
4.3 Groupes à unique relateur . . . . .	70
<b>III Convergences et perspectives</b>	<b>73</b>
<b>5 Automaticité vs autosimilarité</b>	<b>75</b>
5.1 Normalisations quadratiques . . . . .	77
5.2 Deux propriétés duales . . . . .	80
5.3 Exemples et contrexemples . . . . .	83
<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>91</b>
<b>Bibliographie générale</b>	<b>95</b>
<b>Index</b>	<b>107</b>



# Organisation

Recueil d'éléments sélectionnés de mon travail de recherche depuis la soutenance de ma thèse de doctorat en octobre 2000 [1], le présent mémoire se compose de cinq chapitres. Les quatre premiers forment deux parties indépendantes.

La première partie, intitulée *Automates de Mealy et (semi)groupes d'automate*, est construite à partir des articles [12, 13, 15–19]. Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec mes coauteur.e.s A. AKHAVI, D. D'ANGELI, Th. GODIN, I. KLIMANN, S. LOMBARDY, J. MAIRESSE, E. RODARO, D. SAVCHUK. Le chapitre 1 aborde le problème de finitude via la  $m\mathfrak{d}$ -réduction, les pavages de Wang, les graphes paginés et hélicoïdaux, la rigidité et la conjugaison. Le chapitre 2 concerne le problème de torsion dans le cas réversible via les arbres de Schreier, le rayon de transitivité, les branches autorepliables, les arbres et automates orbitaux.

La deuxième partie, intitulée *Monoïdes de tresses et théorie de Garside*, est construite à partir des articles [4, 5, 9–11, 14] et de l'article [8] élaboré avec ma coauteure R. CORRAN. Le chapitre 3 examine le principe de dualité(s) pour les monoïdes de Garside de groupes de tresses, en lien souvent avec la notion de monoïde-germe, avec des traitements singuliers pour le type complexe  $(e, e, r)$  et le type hyperoctaédral. Le chapitre 2 traite de clôture de la classe des groupes de Garside par produit libre avec amalgame cyclique et extension HNN, et place au sein de cette classe les groupes à unique relateur et centre non-trivial.

La troisième et dernière partie se compose d'un unique chapitre *Automaticité vs autosimilarité* basé essentiellement sur l'article [20] avec des références vers [6, 7]. Elle permet d'établir un lien entre les thèmes des deux premières parties pour finalement constituer un ensemble cohérent, en montrant en particulier que tout monoïde de Garside est un monoïde d'automate et que les deux propriétés impliquées—*automaticité* et *autosimilarité*—sont en réalité duales l'une de l'autre.

Se voulant aussi peu technique que possible, ce document s'articule autour d'exemples des objets d'étude et des principales constructions, d'énoncés ainsi contextualisés de théorèmes dont les preuves ne sont pas ici reproduites, mais aussi de plusieurs conjectures ambitieuses *et* raisonnables.



Première partie

Automates de Mealy  
et (semi)groupes d'automate



# Chapitre 1

## Pavages, rigidité et automates cellulaires

Nous nous intéressons au problème de finitude pour les (semi)groupes d'automate, en plaçant la notion de dualité au cœur de notre approche.

Le problème de finitude fait partie des tout premiers dans la longue liste recensant les problèmes de décision ouverts (voir par exemple [82]). Il s'inscrit dans la problématique plus générale de reconnaître la croissance d'un automate de Mealy donné, définie comme la croissance du nombre d'états non-équivalents dans les produits itérés de cet automate avec lui-même. Cette notion de croissance a été introduite par R. I. GRIGORCHUK dans [81] et coïncide avec la croissance du semigroupe engendré. Il existe peu de sous-classes pour lesquelles le problème de finitude est démontré décidable [15]. Maintenant que nous savons qu'il est indécidable pour la classe des automates reset non-inversibles [76], le problème de finitude pour les automates inversibles constitue un défi d'autant plus important.

Après avoir rappelé les définitions de base, nous proposons dans la section 1.1 une réduction d'automate de Mealy mêlant minimisation et dualisation [12], qui s'avère particulièrement efficace en pratique [12, 13] et permet de résoudre le problème de finitude pour les biréversibles à 2 états et/ou 2 lettres selon I. KLIMANN [92].

Dans la section 1.2, nous rappelons les différents liens entre les automates de Mealy et les pavages de Wang [19, 21] et énonçons le résultat d'indécidabilité de P. GILLIBERT pour le problème de finitude des semigroupes d'automate [76]. Puis nous développons en quoi son extension au cas des groupes apparaît cruciale, en exposant une connexion éclairante entre automates de Mealy reset et automates cellulaires unidirectionnels. Nous expliquons le statut clivant du problème de finitude pour les groupes d'automate reset, donnons les récents arguments de M. Delacourt et N. Ollinger plaidant pour l'indécidabilité et arguons finalement pour la décidabilité via une conjecture précise et un critère d'infinitude basé sur la construction d'un graphe paginé.

La section 1.3 se concentre d'abord sur les graphes en hélice, objet singulier qui encode toute la dynamique mais qui explicite la dualité en plaçant sur un même plan les rôles symétriques des états et des lettres de l'alphabet [12, 19]. Nous proposons alors une notion de rigidité qui s'avère liée à la primalité spécialement dans le cas biréversible, et qui justifie le fait que la réduction de la section 1.1 ne soit suffisante en soi. Ceci nous conduit à conjecturer la décidabilité du problème de finitude pour cette classe, via une nouvelle réduction mêlant cette fois minimisation, dualisation et conjugaison.

## 1.1 Minimisation et dualisation

### Automates de Mealy

Commençons par rappeler la définition d'un automate. Un *automate (fini, déterministe et complet)* est un triplet  $(Q, \Sigma, \delta = (\delta_x : Q \rightarrow Q)_{x \in \Sigma})$ , où l'ensemble  $Q$  des états et l'alphabet  $\Sigma$  sont des ensembles non-vides finis, et  $\delta$  est une famille paramétrée de fonctions.

Un *automate de Mealy* est un quadruplet  $(Q, \Sigma, \delta, \rho)$  tel que  $(Q, \Sigma, \delta)$  et  $(\Sigma, Q, \rho)$  sont deux automates. Autrement dit, un automate de Mealy est un transducteur lettre-à-lettre complet et déterministe avec un même alphabet d'entrée et de sortie.

La représentation graphique d'un automate de Mealy est standard, voir la figure 1.1.

Un automate de Mealy  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  est *inversible* si chaque fonction  $\rho_q$  est une permutation de  $\Sigma$  et *réversible* si chaque fonction  $\delta_x$  est une permutation de  $Q$ . Quand  $\mathcal{A}$  est inversible, on peut explicitement exprimer les actions des fonctions inverses en considérant l'*automate inverse*  $\mathcal{A}^{-1}$  ayant  $Q^{-1} = \{q^{-1}, q \in Q\}$  comme ensemble d'états, et une transition  $p^{-1} \xrightarrow{y|x} q^{-1}$  pour chaque transition  $p \xrightarrow{x|y} q$  dans  $\mathcal{A}$  (voir la figure 1.1). On utilise aussi la notation  $i\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}$ .

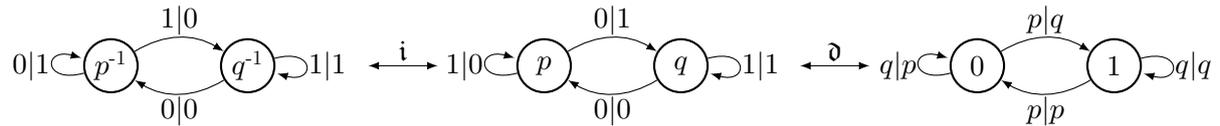


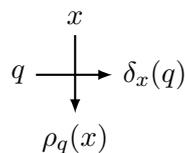
FIGURE 1.1 – L'automate inversible  $\mathcal{L}$  (engendrant le groupe de l'allumeur de réverbère  $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ ), son automate inverse  $\mathcal{L}^{-1}$  (qui se trouve être *reset*, voir section 1.2) et son automate dual  $\mathfrak{d}\mathcal{L}$ .

Dans tout automate de Mealy  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$ , les ensembles  $Q$  et  $\Sigma$  jouent des rôles symétriques. On peut ainsi toujours considérer l'*automate (de Mealy) dual* défini comme  $\mathfrak{d}\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rho, \delta)$ , dans lequel il y a une transition  $x \xrightarrow{p|q} y$  pour chaque transition  $p \xrightarrow{x|y} q$  dans  $\mathcal{A}$  (voir la figure 1.1). En particulier, un automate de Mealy est réversible si et seulement si son dual est inversible.

Un automate de Mealy inversible est *biréversible* s'il est réversible (*i.e.* les lettres en entrée des transitions agissent comme des permutations de l'ensemble des états) et si son inverse est également réversible (*i.e.* les lettres en sortie des transitions agissent comme des permutations de l'ensemble des états).

### (Semi)groupes d'automate

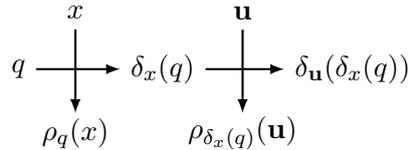
Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  un automate de Mealy. Il peut être vu comme agissant sur l'ensemble  $\Sigma^*$  des mots finis, ou de façon équivalente, sur un arbre régulier enraciné d'arité  $\|\Sigma\|$ , ou encore sur l'ensemble  $\Sigma^\omega$  des mots infinis, ou de façon équivalente, sur le bord d'un tel arbre. Nous optons pour une visualisation graphique de l'action. Pour chaque transition  $q \xrightarrow{x|\rho_q(x)} \delta_x(q)$ , nous associons une *transition en croix* décrite ci-dessous :



Chaque état  $q \in Q$  définit récursivement une application de  $\Sigma^*$  dans lui-même :

$$\forall x \in \Sigma, \forall \mathbf{u} \in \Sigma^*, \quad \rho_q(x\mathbf{u}) = \rho_q(x)\rho_{\delta_x(q)}(\mathbf{u}).$$

Ceci peut être décrit par le *diagramme en croix* obtenu en juxtaposant des transitions en croix (voir [77, 12]) représentant l'action d'un état sur un mot de lettres (et vice-versa) :



De façon duale en effet, chaque lettre  $x \in \Sigma$  définit une action sur  $Q^*$ . Les deux actions s'étendent naturellement aux mots, respectivement de  $Q^*$  et  $\Sigma^*$  avec la convention suivante. Nous définissons l'action  $\rho_{\mathbf{q}}$  sur  $\Sigma^*$  induite par le mot  $\mathbf{q} = q_1 \cdots q_n \in Q^n$  comme la composition  $\rho_{\mathbf{q}} = \rho_{q_n} \circ \cdots \circ \rho_{q_1}$ . Nous notons de façon duale  $\delta_{\mathbf{u}} : Q^* \rightarrow Q^*$  la fonction induite par tout mot  $\mathbf{u}$  en les états de  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$ .

Le semigroupe des applications de  $\Sigma^*$  dans  $\Sigma^*$  engendré par  $\{\rho_q, q \in Q\}$  est appelé *semigroupe engendré par  $\mathcal{A}$*  et est désigné par  $\langle \mathcal{A} \rangle_+$ . Quand  $\mathcal{A}$  est inversible, les fonctions induites par ses états sont des permutations des mots de même longueur et on peut ainsi considérer le groupe engendré par  $\{\rho_q, q \in Q\}$ , qui est appelé *groupe engendré par  $\mathcal{A}$*  et désigné par  $\langle \mathcal{A} \rangle$ . On parle aussi dans ce cas de (semi)groupes *autosimilaires* [108].

Nous obtenons un premier résultat fondamental.

THÉORÈME 1.1 ([108, 116, 12])

Un automate de Mealy engendre un (semi)groupe fini si et seulement si son dual aussi.

Cependant, en examinant simplement les automates à 2 lettres et 2 états, il apparaît qu'aucune des trois classes de croissance—polynomiale, intermédiaire et exponentielle—n'est stable par dualisation. Dans le cas fini, les (semi)groupes engendrés par un automate de Mealy et son dual peuvent être radicalement différents (voir l'exemple de la figure 1.3) et nous énonçons la conjecture informelle suivante [13] illustrée par les données de la figure 1.2.

Si un automate de Mealy engendre un (semi)groupe fini de grande taille vis-à-vis de ses nombres d'états et de lettres, son automate dual en engendre un de petite taille.

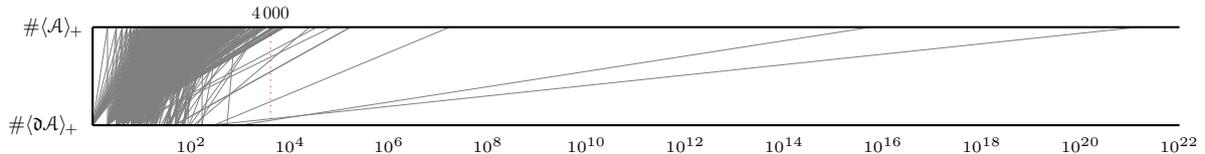


FIGURE 1.2 – Pour  $\mathcal{A}$  parcourant l'ensemble des automates inversibles à 3 lettres et 3 états, les extrémités d'un segment représentent les ordres (détectés finis) de  $\langle \mathcal{A} \rangle_+$  et  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle_+$ .

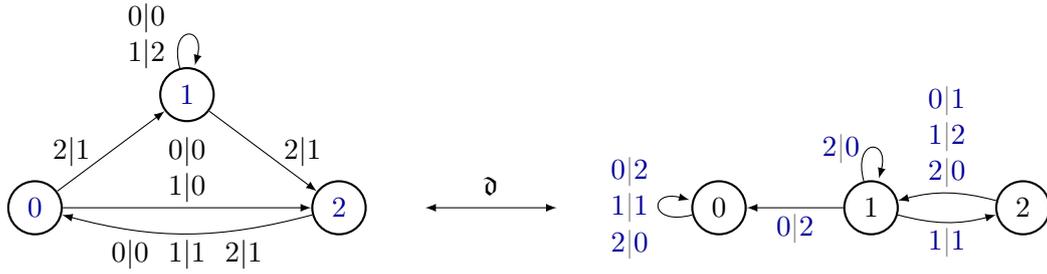


FIGURE 1.3 – Deux automates de Mealy duaux : l'un engendre un semigroupe d'ordre 238, l'autre engendre un groupe d'ordre  $1\,494\,186\,269\,970\,473\,680\,896 = 2^{64} \cdot 3^4 \approx 1.5 \times 10^{21}$ .

### Minimisation et classes de Nerode

Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  un automate de Mealy. L'équivalence de Nerode  $\equiv$  sur  $Q$  est la limite de la suite d'équivalences  $(\equiv_k)$  de plus en plus fines définies récursivement par :

$$\begin{aligned} \forall p, q \in Q, \quad p \equiv_0 q &\iff \rho_p = \rho_q, \\ \forall k \geq 0, p \equiv_{k+1} q &\iff (p \equiv_k q \quad \wedge \quad \forall x \in \Sigma, \delta_x(p) \equiv_k \delta_x(q)). \end{aligned}$$

Puisque l'ensemble  $Q$  est fini, la suite est ultimement constante. Pour tout élément  $q$  de  $Q$ ,  $[q]$  désigne la *classe de Nerode* de  $q$ . Deux états d'un automate de Mealy appartiennent à la même classe de Nerode si et seulement s'ils représentent le même élément du (semi)groupe engendré, *i.e.* si et seulement s'ils induisent la même action sur  $\Sigma^*$ .

La *minimisation* de  $\mathcal{A}$  produit l'automate de Mealy  $\mathbf{m}\mathcal{A} = (Q/\equiv, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{\rho})$ , où pour chaque paire  $(q, x)$  dans  $Q \times \Sigma$ , on a  $\tilde{\delta}_x([q]) = [\delta_x(q)]$  et  $\tilde{\rho}_{[q]} = \rho_q$ . La définition est consistante avec la minimisation des automates finis classiques pour laquelle, au lieu de considérer les applications  $(\rho_q : \Sigma \rightarrow \Sigma)_q$ , le calcul est initialisé par la séparation entre états terminaux et non-terminaux.

Une paire d'automates de Mealy duaux est *m $\mathfrak{d}$ -réduite* si les deux automates sont minimisés. La *m $\mathfrak{d}$ -réduction* d'un automate de Mealy consiste à minimiser l'automate ou son dual jusqu'à ce que la paire résultante d'automates duaux soit *m $\mathfrak{d}$ -réduite*. Un exemple de *m $\mathfrak{d}$ -réduction* est donné figure 1.4. Si un automate de Mealy et son dual ne sont pas minimisés, la procédure de *m $\mathfrak{d}$ -réduction* pourrait dépendre de l'automate choisi pour la première minimisation. Le résultat suivant établit que cette réduction est bien définie car confluente.

#### PROPOSITION 1.2 ([12])

Si  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est une paire d'automates de Mealy duaux, la paire *m $\mathfrak{d}$ -réduite* obtenue en minimisant d'abord  $\mathcal{A}$  est la même que celle obtenue en minimisant d'abord  $\mathcal{B}$ .

Du théorème 1.1 découle le critère de finitude suivant.

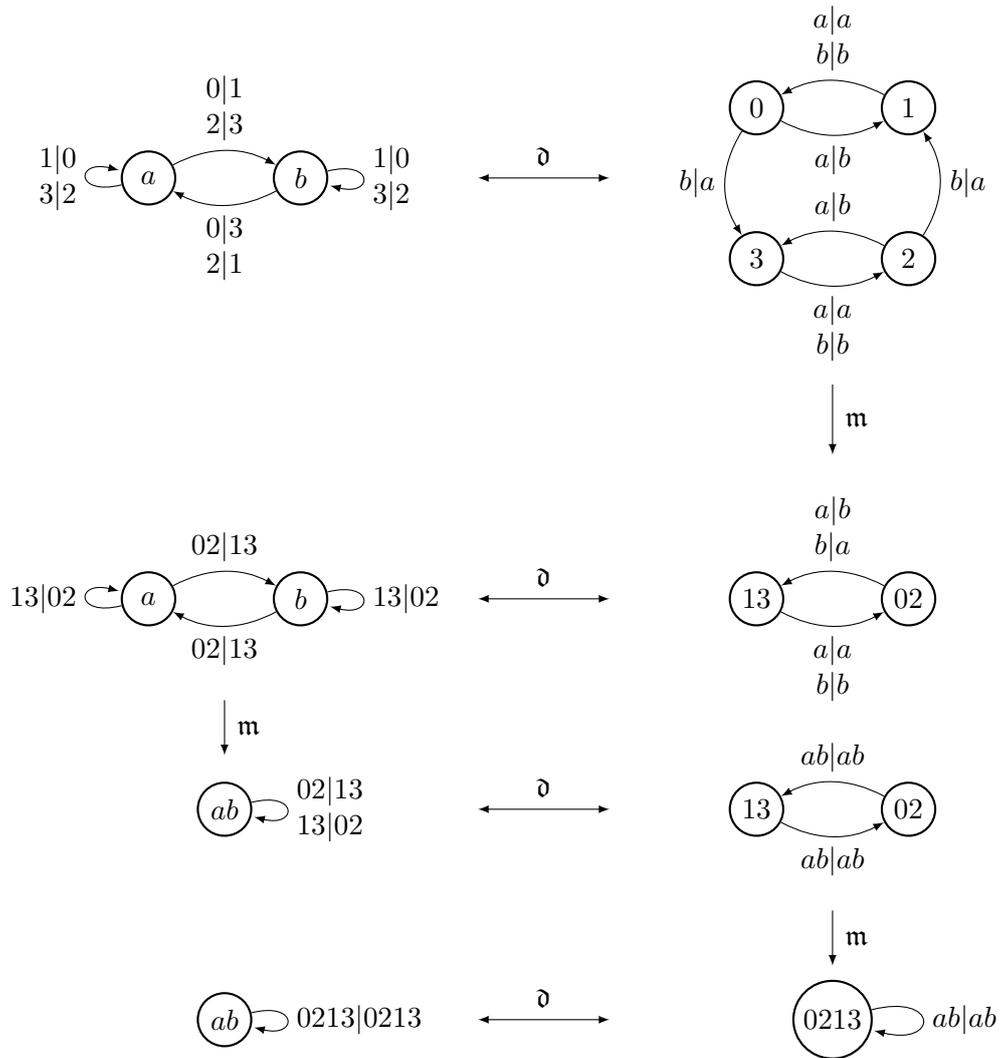


FIGURE 1.4 – Un exemple de  $m\delta$ -réduction (conduisant ici à une paire  $m\delta$ -triviale). L'automate de départ engendre en effet un groupe fini, à savoir le groupe  $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$ .

**COROLLAIRE 1.3 ([12])**

Un automate de Mealy engendre un (semi)groupe fini si et seulement si sa paire  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduite aussi.

L'automate de Mealy trivial engendre le (semi)groupe trivial. Si la  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduction d'un automate de Mealy mène à une paire triviale, cet automate est dit  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -trivial (c'est le cas par exemple de l'automate de la figure 1.4). Tout automate de Mealy  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -trivial engendre un semigroupe fini, mais l'inverse est faux en général [12].

**EXEMPLE 1.4**

La figure 1.5 montre des exemples d'automates non- $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -triviaux. Celui de gauche et son dual engendent des semigroupes d'ordre 6 et 4. Ceux au centre et à droite (inversibles) engendent des groupes finis, à savoir les groupes symétrique  $\mathfrak{S}_3$  et diédral  $D_{12}$ , quand leurs duals engendent des semigroupes d'ordre 17 et 10 respectivement.

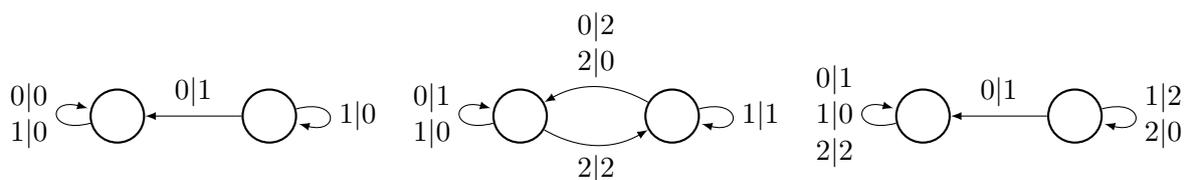


FIGURE 1.5 – Trois automates non- $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -triviaux qui engendent des (semi)groupes finis.

Les automates de Mealy (bi)réversibles semblent particulièrement sensibles à la  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduction.

**EXEMPLE 1.5**

Nous donnons dans [12] un exemple d'automate biréversible non- $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -trivial engendrant un groupe fini. Celui-ci est minimal pour la conjonction de cette propriété et de celles d'être son propre dual et d'avoir son alphabet en bijection avec le groupe lui-même. On peut montrer en effet que dans ce cas, le groupe engendré (qui agit donc sur lui-même) ne peut être d'ordre  $p$ ,  $p q$  ou  $p^2$  avec  $p, q$  premiers. Le groupe diédral  $D_8$  se trouve être ainsi le plus petit groupe candidat, voir la figure 1.6.

**EXEMPLE 1.6**

Les quatre exemples minimaux d'automates biréversibles non- $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -triviaux engendrant des groupes finis sont représentés sur la figure 1.7. Nous reviendrons sur ces quatre specimens biréversibles dans l'exemple 1.30.

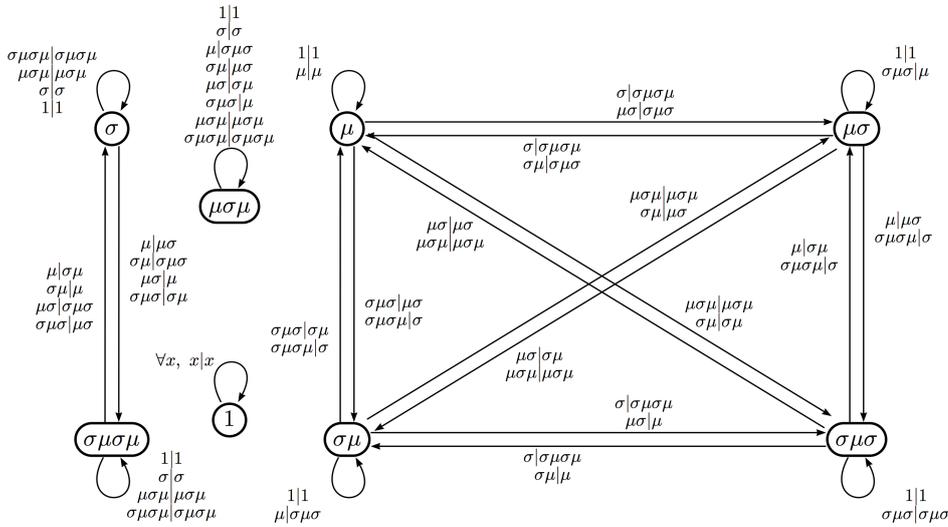


FIGURE 1.6 – Automate de Mealy biréversible autodual  $\mathbf{m}\mathcal{D}$ -réduit engendrant un groupe fini : le groupe diédral  $D_8$ , vu ici comme engendré par une réflexion  $\sigma$  et par son produit  $\mu = \rho\sigma$  avec une rotation. Ce groupe  $D_8 = \langle \sigma, \mu : \sigma^2 = \mu^2 = (\sigma\mu)^4 = 1 \rangle$  est en un sens minimal, voir l'exemple 1.5.

Fondé sur une conjecture de [13], le résultat suivant dû à I. KLIMANN peut désormais être déduit de résultats plus généraux qui seront énoncés dans le chapitre 2.

THÉORÈME 1.7 ([92])

Tout automate de Mealy biréversible à 2 lettres et/ou 2 états engendre un groupe fini si et seulement s'il est  $\mathbf{m}\mathcal{D}$ -trivial.

Nous verrons dès la section 1.3, et plus tard dans la section 2.3, comment et pourquoi nous envisageons de généraliser ce théorème essentiel.

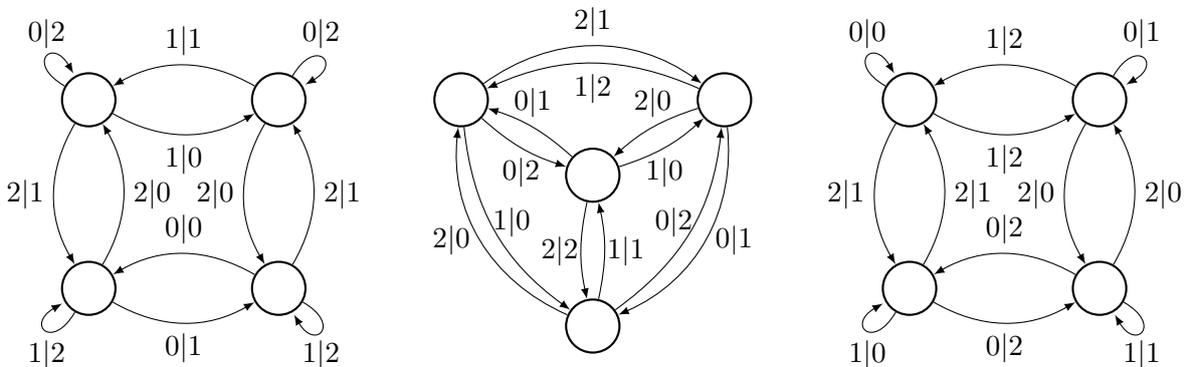


FIGURE 1.7 – Trois automates biréversibles non- $\mathbf{m}\mathcal{D}$ -triviaux qui engendrent des groupes finis. L'inverse de celui de gauche fournit le quatrième spécimen (voir l'exemple 1.6).

## 1.2 Pavages et automates reset

Les pavages apparaissent comme un outil majeur pour étudier et comprendre le comportement des (semi)groupes d'automate.

### Pavages de Wang et problèmes de décision

Du nom du logicien H. WANG [129], une *tuile de Wang* est une tuile carrée avec une couleur sur chaque côté. Un pavage de Wang d'une partie de  $\mathbb{Z}^2$  est *valide* si deux tuiles adjacentes ont toujours leur côté commun de la même couleur.

Selon la correspondance de la figure 1.8, des automates de Mealy ont été associés aux ensembles de tuiles de Wang par K. CULIK [56], par J. KARI [90] et finalement par E. JEANDEL et M. RAO [88] dans leur poursuite acharnée et fructueuse d'un ensemble minimal de tuiles de Wang aperiodique. De tels automates de Mealy ne sont en général ni complets ni déterministes. Un ensemble de tuiles  $\mathcal{T}$  est appelé *cd-déterministe* avec  $(c, d) \in \mathcal{I} = \{(n, w), (s, w), (n, e), (s, e)\}$  (où  $n, w, s, e$  désignent les quatre points cardinaux) si chaque tuile  $t \in \mathcal{T}$  est uniquement déterminée par la paire  $(t_c, t_d)$  de couleurs. Quand  $\mathcal{T}$  est *cd-déterministe* pour chaque  $(c, d) \in \mathcal{I}$ , il est dit *complètement déterministe* [96].



FIGURE 1.8 – Association selon Culik-Kari entre un ensemble de tuiles de Wang  $\mathcal{T}$  et un automate de Mealy  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ .

#### LEMME 1.8 ([19])

Soit  $\mathcal{T}$  un ensemble de tuiles de Wang et  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  son automate de Mealy associé selon Culik-Kari. Une condition nécessaire pour que  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  soit complet et déterministe est que  $\mathcal{T}$  soit *nw-déterministe*. Auquel cas, nous avons les équivalences suivantes :

- $\mathcal{T}$  est *ne-déterministe* si et seulement si  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  est réversible ;
- $\mathcal{T}$  est *sw-déterministe* si et seulement si  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  est inversible ;
- $\mathcal{T}$  est complètement déterministe si et seulement si  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  est biréversible.

Naturellement, il s'agit d'une association équivalente à celle des diagrammes en croix introduite en page 7. Nous explorons ces liens dans [19] et montrons en particulier qu'inversement tout ensemble de tuiles de Wang  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$  associé à un automate de Mealy  $\mathcal{A}$  (complet déterministe) peut paver périodiquement le plan discret  $\mathbb{Z}^2$ . Cela contraste grandement avec le problème général de pavage et les résultats d'indécidabilité de R. BERGER et de J. KARI :

**THÉORÈME 1.9 ([32])**

Le problème de pavage du plan discret  $\mathbb{Z}^2$  pour les ensembles de tuiles de Wang est indécidable.

**THÉORÈME 1.10 ([89])**

Le problème de pavage du plan discret  $\mathbb{Z}^2$  pour les ensembles de tuiles de Wang *nw*-déterministes est indécidable.

P. GILLIBERT a démontré l'indécidabilité du problème de finitude pour les semigroupes d'automate [76]. La preuve repose sur une seconde association (figure 1.9) d'automate de Mealy à un ensemble de tuiles de Wang (*nw*-déterministe) et s'inspire de la preuve de J. KARI pour l'indécidabilité du problème de nilpotence pour les automates cellulaires [89]. Si  $\mathcal{T}$  est un ensemble de tuiles de Wang *nw*-déterministe, l'automate de Mealy  $\mathcal{W}_{\mathcal{T}} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  est défini avec  $Q = \Sigma = \mathcal{T} \sqcup \{\blacksquare\}$ ,  $\delta_b(a) = b$  pour  $(a, b) \in Q^2$ , et

$$\rho_a(b) = \begin{cases} c & \text{pour } a, b, c \in \mathcal{T} \text{ avec } a_e = c_w \text{ et } c_n = b_s, \\ \blacksquare & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un tel automate  $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}$  peut se comprendre comme suit. Tout mot d'états est vu comme un mot de tuiles le long d'une diagonale. L'automate transforme un tel mot en le mot de tuiles le long de la diagonale juste dessous. S'il n'est pas possible de poser une tuile, la tuile joker  $\blacksquare$  est utilisée.

**THÉORÈME 1.11 ([76])**

Le semigroupe  $\langle \mathcal{W}_{\mathcal{T}} \rangle_+$  est infini si et seulement si  $\mathcal{T}$  peut paver le plan discret  $\mathbb{Z}^2$ .

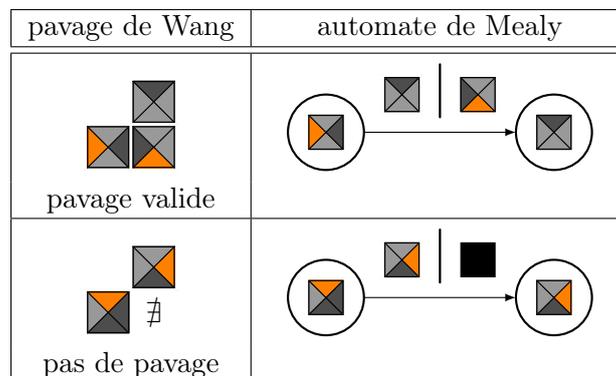


FIGURE 1.9 – L'automate de Mealy  $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}$  associé à un ensemble de tuiles de Wang *nw*-déterministe  $\mathcal{T}$  selon Gillibert-Kari.

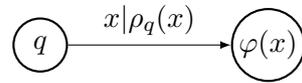
Des théorèmes 1.10 et 1.11 découle alors le résultat d'indécidabilité :

**COROLLAIRE 1.12 ([76])**

Le problème de finitude pour les semigroupes d'automate est indécidable.

**Automates de Mealy reset vs automates cellulaires unidirectionnels**

Remarquons que tout automate  $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}$  est reset. Un automate de Mealy  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  est dit *reset* si, pour tout état  $q \in Q$ , l'état  $\delta_x(q)$  est indépendant de  $q$ , au sens où il existe une application  $\varphi : \Sigma \rightarrow Q$  telle que toute transition de  $\mathcal{A}$  est de la forme



La définition même de  $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}$  implique que son ensemble d'états et son alphabet coïncident. Cependant, ce point n'est pas spécifique puisque, plus généralement, tout automate reset  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  est équivalent à son automate reset *déployé*  $(\Sigma, \Sigma, \text{id}, \rho)$ , c'est-à-dire avec  $Q = \Sigma$  et  $\varphi = \text{id}$ .

Le corollaire 1.12 laisse ainsi ouvert le problème de finitude pour les groupes d'automate (reset). Il apparaît en effet que, par construction, et avec l'exigence de l'adjonction de la tuile  $\blacksquare$ , de tels automates reset  $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}$  sont hautement non-inversibles, ce qui semble empêcher une adaptation de l'approche au cas des groupes d'automate.

P. V. SILVA et B. STEINBERG ont présenté une étude des groupes engendrés par des automates reset inversibles [119], leur motivation initiale étant la possibilité d'engendrer des groupes de type *allumeur de réverbère*. Ils ont montré en particulier qu'un tel groupe est infini si et seulement si un des générateurs est d'ordre infini : plus précisément, un tel groupe est ou bien fini ou bien le produit d'un localement fini par un infini cyclique (en particulier moyennable). Toujours est-il que le problème suivant reste ouvert.

**PROBLÈME 1.13**

Le problème de finitude pour les groupes d'automate reset est-il décidable ?

Nous souhaitons décrire une correspondance entre la finitude des groupes d'automate reset et la périodicité des automates cellulaires unidirectionnels. Un *automate cellulaire unidirectionnel* est un triplet  $(Q, r, f)$  où  $Q$  est l'ensemble fini d'états,  $r \in \mathbb{N}$  est le rayon, et  $f : Q^{r+1} \rightarrow Q$  est la règle de transition locale. Une *configuration* d'un tel automate cellulaire est un élément de  $Q^{\mathbb{N}}$ . Toute sa dynamique est décrite par la *fonction de transition globale*  $F$  définie par

$$F(c)(k) = f(c(k), c(k+1), \dots, c(k+r))$$

pour chaque configuration  $c \in Q^{\mathbb{N}}$  et chaque  $k \in \mathbb{N}$ . Un tel automate cellulaire est dit *périodique* si  $F^p$  est la fonction identité pour un certain entier  $p > 0$ .

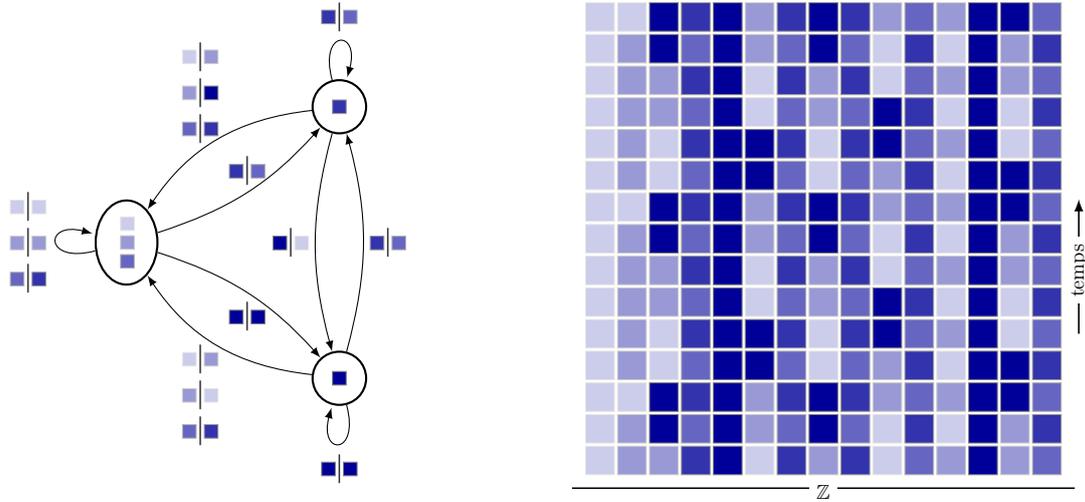


FIGURE 1.10 – Tout automate de Mealy reset  $(\Sigma, \Sigma, \text{id}, \rho)$  (ou sa minimisation, comme ici à gauche, avec  $\Sigma = \{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright, \blacktriangleleft\}$ ) correspond à un automate cellulaire unidirectionnel  $(\Sigma, (a, b) \mapsto \rho_b(a))$  (avec un fragment de diagramme espace-temps comme ici à droite), selon la proposition 1.15.

#### PROBLÈME 1.14

Le problème de périodicité des automates cellulaires unidirectionnels est-il décidable ?

Rappelons ici que J. KARI et N. OLLINGER ont démontré que le problème de périodicité pour les automates cellulaires en général—et pour ceux qui sont réversibles en particulier—est indécidable [91].

On peut restreindre l'étude de la périodicité des automates cellulaires unidirectionnels à ceux de rayon 1 sans perte de généralité. Soit  $(Q, f)$  un automate cellulaire unidirectionnel  $(Q, 1, f)$  avec  $f : Q^2 \rightarrow Q$ . Tout automate cellulaire périodique  $(Q, f)$  doit préserver la valeur de la cellule  $c(0)$ , ce que signifie que, pour tout état  $b \in Q$ , l'application  $\rho_b : a \mapsto f(a, b)$  doit être une permutation. Un tel automate cellulaire est alors appelé *permutif*. Cette dernière propriété étant de nature purement syntaxique, le problème 1.14 est équivalent à celui où l'on se restreint aux automates cellulaires unidirectionnels permutifs.

Comme l'illustre la figure 1.10 et l'établit la proposition 1.15, les problèmes 1.13 et 1.14 correspondent en fait à un seul et même problème ouvert.

#### PROPOSITION 1.15 ([65, 21])

Pour toute famille  $\rho = (\rho_b)_{b \in \Sigma}$  de permutations de l'alphabet  $\Sigma$ , le groupe engendré par l'automate de Mealy reset inversible  $(\Sigma, \Sigma, \text{id}, \rho)$  est fini si et seulement si l'automate cellulaire unidirectionnel permutif  $(\Sigma, (a, b) \mapsto \rho_b(a))$  est périodique.

COROLLAIRE 1.16 ([65, 21])

Le problème de finitude pour les groupes d'automate de Mealy reset est décidable si et seulement si le problème de périodicité pour les automates cellulaires unidirectionnels est décidable.

Ce corollaire nous offre alors un fabuleux bras de fer. Les automates cellulaires constituent en effet le cadre approprié si l'on veut démontrer l'indécidabilité, quand les automates de Mealy le sont si l'on pense démontrer la décidabilité. Provenant de travaux en coopération, ces deux points de vue donnent à cette question cruciale un statut toujours indécis et tout à fait passionnant.

M. DELACOURT et N. OLLINGER ont dernièrement réussi à injecter du calcul dans des automates unidirectionnels réversibles en utilisant les permutifs [65], plaidant ainsi pour l'indécidabilité des problèmes 1.13 et 1.14. Ils démontrent en particulier que le problème d'accessibilité pour les automates cellulaires unidirectionnel réversibles est indécidable : les automates cellulaires unidirectionnel réversibles sont permutifs, et le problème d'accessibilité consiste à décider si un élément donné peut apparaître dans l'octant nord-nord-ouest d'un diagramme espace-temps issu d'un élément de départ fixé.

La fin de cette section est dédiée à plusieurs arguments plaidant davantage pour la décidabilité. Nous pensons en effet que si un automate reset inversible  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  engendre un groupe fini, alors son dual  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$  engendre lui un semigroupe ridiculement petit. En particulier, nous estimons que la seule valeur du coefficient  $\gamma_{\|Q\|}$  de la fonction de croissance  $\sum_{k \geq 0} \gamma_k z^k$  de  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$  permettrait de décider si le semigroupe  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle_+$  est soit fini ( $\gamma_{\|Q\|} = 0$ ), soit libre ( $\gamma_{\|Q\|} = \|\Sigma\|^{\|Q\|}$ ), ou non ( $0 < \gamma_{\|Q\|} < \|\Sigma\|^{\|Q\|}$ ).

CONJECTURE 1.17

Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  un automate de Mealy reset inversible. Il y a équivalence entre :

- (i) le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est fini ;
- (ii) le semigroupe  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle_+$  est un quotient de

$$\langle x_1, \dots, x_{\|\Sigma\|} : x_{i_1} \cdots x_{i_{\|Q\|}} = x_{i_2} \cdots x_{i_{\|Q\|}} \text{ pour } (i_1, \dots, i_{\|Q\|}) \in \{1, \dots, \|\Sigma\|^{\|Q\|}\}_+ \rangle.$$

Nous pouvons restreindre le problème de la finitude des groupes engendrés par les automates reset à une sous-classe stricte. Une *partition* de l'ensemble  $\Sigma$  est une famille de sous-ensembles disjoints dont l'union est  $\Sigma$ . On peut supposer  $Q = \{q_1, \dots, q_{\|Q\|}\}$  et  $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{\|Q\|}$  avec  $\delta_i(q_j) = q_k$  pour tout  $q_j \in Q$  et tout  $i \in \Sigma_k$ . Munie d'un ordre total sur ses parts, une partition devient une structure appelée *partition ordonnée* selon R. P. STANLEY [122]. Toute permutation  $\rho_q$  de  $\Sigma$  se décomposant en produit de cycles, on lui associe la *permutation échangeante*  $\rho'_q$  définie comme le produit de ses cycles qui ne préservent pas la partition ordonnée  $\Sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{\|Q\|}$ . On note la restriction  $\mathfrak{s}\mathcal{A} = (Q, \Sigma', \delta', \rho')$  l'automate (reset inversible) obtenu à partir de  $\mathcal{A}$  en remplaçant chaque permutation  $\rho_q$  par sa permutation échangeante  $\rho'_q$  pour  $q \in Q$  et en restreignant l'alphabet à  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  défini comme l'union des supports des permutations échangeantes.

**PROPOSITION 1.18 ([21])**

Un automate de Mealy reset inversible  $\mathcal{A}$  engendre un groupe fini si et seulement si sa restriction  $\mathfrak{s}\mathcal{A}$  aussi.

Si nous nous concentrons un instant sur le cas à deux états, la conjecture 1.17 ne semble pas directement admettre un énoncé plus simple, mais sa réduction via la proposition 1.18 donne :

**CONJECTURE 1.19**

Soit  $\mathcal{A} = (Q = \{q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, \rho)$  un automate reset inversible. On peut supposer  $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$  avec  $\delta_x(q_1) = \delta_x(q_2) = q_k$  pour  $x \in \Sigma_k$  et  $k \in \{1, 2\}$ . Il y a équivalence entre :

- (i) le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est fini ;
- (ii) le semigroupe  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle_+$  est un quotient de  $\langle \Sigma : xy = y \text{ pour } (x, y) \in \Sigma^2 \rangle_+$  ;
- (iii) si  $\mathfrak{s}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ , on a soit  $\rho_{q_1} = \rho_{q_2}$ , soit  $\rho_{q_i}(\Sigma_j) = \Sigma_{2-j}$  pour  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  ;
- (iv) si  $\mathfrak{s}\mathcal{A} = \mathcal{A} = \mathfrak{m}\mathcal{A}$ , on a  $\rho_{q_i}(\Sigma_j) = \Sigma_{2-j}$  pour  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ .

Nous proposons à présent une piste qui nous paraît prometteuse. À tout automate de Mealy reset inversible  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$ , nous associons son *graphe paginé*  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  d'ensemble de sommets  $\Sigma$  et dont les arcs sont construits comme suit (voir la figure 1.11). On dispose les sommets associés aux lettres de  $\Sigma$  le long de la reliure d'un livre ouvert ayant exactement une page  $\pi_q$  pour chaque état  $q \in Q$ , sur laquelle on construit le diagramme en arcs de la permutation inverse  $\rho_q^{-1} \in \mathfrak{S}_{\Sigma}$ . Un arc de la page  $\pi_q$  avec  $q \in Q$  appartient au graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  si et seulement s'il est issu d'une lettre de  $\Sigma_q$ . Par construction, un  $\|Q\|$ -ième des arcs appartient au graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} : \|\Sigma_q\|$  pour la page  $\pi_q$ . Chaque sommet admet en effet exactement un arc de  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  sortant. En suivant les arcs de  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ , on débouche sur des cycles-puits.

Nous obtenons alors le critère trichotomique suivant.

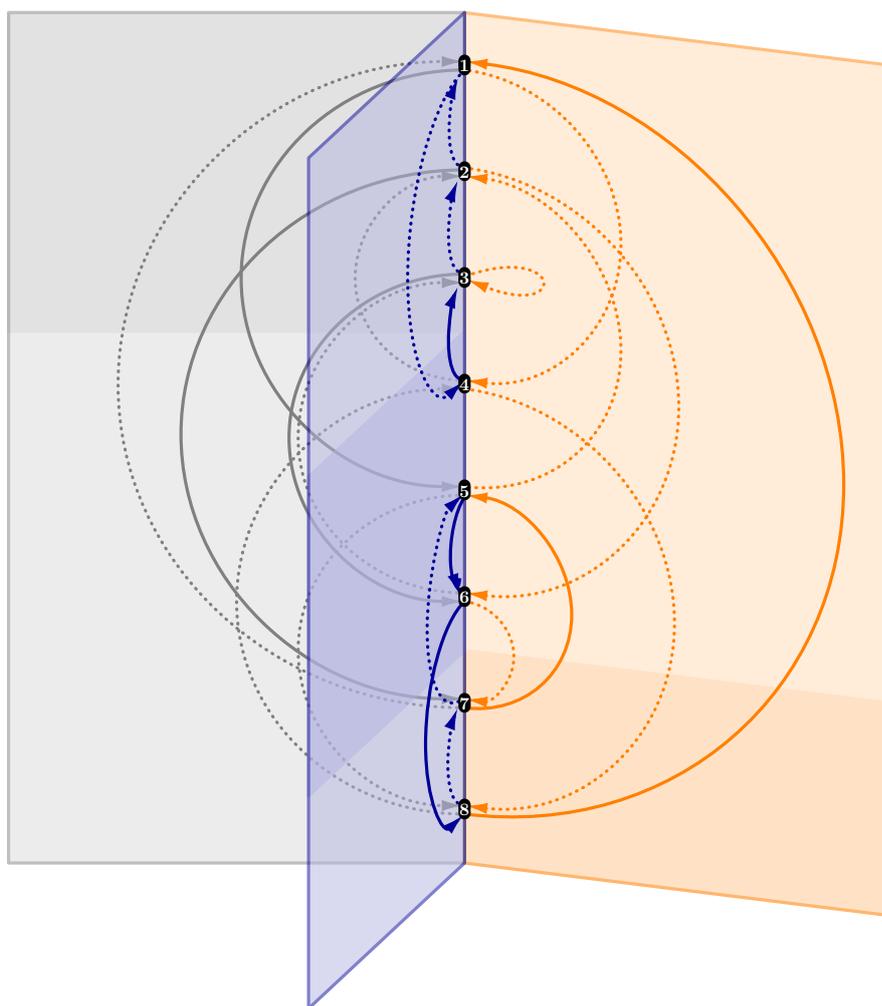
**THÉORÈME 1.20 ([21])**

Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  un automate de Mealy reset inversible. (On peut supposer  $\mathcal{A}$  non- $\mathfrak{m}\mathfrak{d}$ -trivial, dans le cas contraire, le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  serait fini.) Si son graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  est une union de cycles disjoints, alors sa puissance  $(\mathfrak{d}(\mathfrak{d}\mathcal{A}))^{\|Q\|-1}$  est elle-même reset. Sinon le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est infini.

L'exposant  $\|Q\| - 1$  se trouve correspondre au rayon critique du semigroupe  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle_+$  dans notre conjecture 1.17. Si le graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  n'est pas une union de cycles, il admet un sommet  $x_0 \in \Sigma$  hors d'un cycle, ayant son arc sortant vers un sommet  $x_1 \in \Sigma$  appartenant lui à un cycle  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_1$ . Pour tout état  $q$  et tout exposant  $k \geq 0$ , nous obtenons le témoignage

$$\rho_{q^k}(x_0(x_1x_2 \cdots x_n)^\omega) = u_{q,k}x_0(x_1x_2 \cdots x_n)^\omega$$

(où le mot  $u_{q,k} \in \Sigma^k$  ne dépend que de  $q^k$ ) du fait que l'état  $q$  induit une action d'ordre infini.


 FIGURE 1.11 – Le graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{R}}$  de l'automate inversible reset  $\mathcal{R}$  de l'exemple 1.21.

## EXEMPLE 1.21

On considère l'automate reset  $\mathcal{R}$  (aléatoire) à trois états  $\{q_1, q_2, q_3\}$  sur l'alphabet  $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3 = \{1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\} \sqcup \{7, 8\}$  avec les transitions  $\delta_x(q_i) = q_k$  pour  $x \in \Sigma_k$  avec  $1 \leq i, k \leq 3$  et les permutations  $\rho_{q_1} = (1, 5, 8, 4, 2, 7)(3, 6)$ ,  $\rho_{q_2} = (1, 4, 3, 2)(5, 6, 8, 7)$ ,  $\rho_{q_3} = (1, 4, 8)(2, 6, 7, 5)$ . La figure 1.11 montre la construction de son graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{R}}$ . Les sommets associés aux lettres de l'alphabet sont organisés le long de la reliure (ici du haut vers le bas). Pour chaque état  $q_i$ , la page  $\pi_{q_i}$  montre une zone en surimpression figurant la part  $\Sigma_{q_i}$  associée : seuls les arcs (en trait plein ici) issus de ces zones appartiennent au graphe paginé  $\mathcal{K}_{\mathcal{R}}$ .

Même si le théorème 1.20 constitue une avancée substantielle, il semble exister des automates reset engendrant un groupe infini mais dont toutes les puissances reset ont un graphe paginé union de cycles disjoints. Dans ce cas, non-rédhibitoire au moins en pratique, nous pouvons considérer les sous-graphes paginés associés aux parties reset de puissances non-reset.

### 1.3 Graphe en hélice et rigidité

Nous introduisons la notion de graphe en hélice [12] comme un autre outil dynamique qui peut être envisagé comme un pavage unidimensionnel particulier.

Le *graphe en hélice*  $\mathcal{H}_{n,k}$  d'un automate de Mealy  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  est le graphe orienté d'ensemble de sommets  $Q^n \times \Sigma^k$  et d'arêtes

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \longrightarrow \delta_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}), \rho_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$$

pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in Q^n \times \Sigma^k$  (voir la figure 1.12).

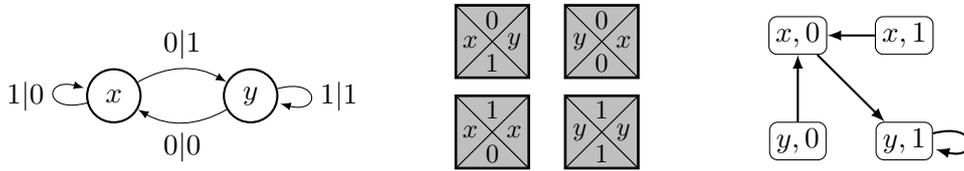


FIGURE 1.12 – L'automate de Mealy  $\mathcal{L}$  engendrant le groupe de l'allumeur de réverbère, son ensemble de tuiles de Wang  $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$  associé, et son graphe en hélice  $\mathcal{H}_{1,1}(\mathcal{L})$ .

Sorte de fusion entre un automate de Mealy  $\mathcal{A}$  et son dual  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$  (ou leurs puissances), les graphes en hélice permettent de capturer la dynamique globale en remplaçant au même niveau les rôles symétriques de l'ensemble des états et de l'alphabet. Les deux faces d'une même médaille peuvent ainsi être observées simultanément.

Mentionnons que l'idée de graphe en hélice pourrait être définie pour tout transducteur lettre-à-lettre avec même alphabet d'entrée et de sortie. Dans ce cas, un tel transducteur est un automate de Mealy si et seulement si, dans son graphe en hélice, de tout sommet part une unique arête.

**PROPOSITION 1.22 ([12])**

Si un automate de Mealy inversible et réversible engendre un groupe fini, alors son graphe en hélice est une union de cycles disjoints.

La condition de la proposition 1.22 n'est pas suffisante : il existe des automates de Mealy inversibles réversibles dont le graphe en hélice est une union de cycles disjoints et qui engendrent un groupe infini, comme par exemple l'automate proposé par S. V. ALĚŠIN représenté sur la figure 1.13, voir [24, 124, 127, 128].

La proposition 1.23 caractérise la classe des automates inversibles réversibles dont le graphe en hélice est une union de cycles disjoints.

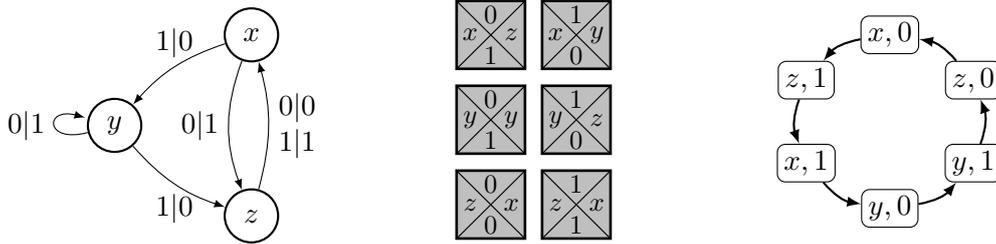


FIGURE 1.13 – L’automate d’Alëšin engendre un groupe infini, en l’occurrence le groupe libre de rang 3. Son graphe en hélice  $\mathcal{H}_{1,1}$  est composé d’un unique cycle.

PROPOSITION 1.23 ([12])

Soit  $\mathcal{A}$  un automate de Mealy inversible réversible. Il y a équivalence entre :

1.  $\mathcal{A}$  est biréversible ;
2.  $\mathfrak{d}\mathfrak{d}\mathfrak{i}(\mathcal{A})$  est un automate de Mealy ;
3. le graphe en hélice de  $\mathcal{A}$  est une union de cycles disjoints.

Nous en déduisons un critère d’infinitude particulièrement simple.

COROLLAIRE 1.24 ([12])

Tout automate de Mealy inversible réversible qui n’est pas biréversible engendre un groupe infini.

Nous savons plus précisément que tout automate de Mealy inversible réversible sans composante biréversible engendre un semigroupe sans torsion [16]. Nous traiterons du problème de torsion dans le chapitre 2 et en particulier le théorème 2.7.

Dès que  $\mathcal{A}$  est un automate de Mealy inversible-réversible, nous considérons les lettres et leurs inverses. En posant  $\mathcal{A}' = \mathfrak{d}(\mathfrak{d}\mathcal{A} \sqcup (\mathfrak{d}\mathcal{A})^{-1})$ , l’automate de Mealy (inversible-réversible)  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}' \sqcup (\mathcal{A}')^{-1}$  est l’extension de  $\mathcal{A}$  avec ensemble d’états  $Q \sqcup Q^{-1}$  et alphabet  $\Sigma \sqcup \Sigma^{-1}$ .

PROPOSITION 1.25 ([12])

Un automate de Mealy  $\mathcal{A}$  inversible réversible et son extension  $\tilde{\mathcal{A}}$  engendrent des groupes isomorphes.

Nous pouvons alors établir la caractérisation suivante.

THÉORÈME 1.26 ([12])

Soit  $\mathcal{A}$  un automate de Mealy biréversible. Le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est fini si et seulement s'il existe un entier  $C$  tel que, pour tous  $k, \ell$ , les graphes en hélice  $\tilde{\mathcal{H}}_{k,\ell}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$  sont des unions de cycles disjoints de longueurs majorées par  $C$ .

Notons qu'une telle caractérisation n'est pas effective et ne conduit pas directement à une procédure de décision de la finitude.

Nous proposons enfin une nouvelle direction de recherche basée sur les graphes en hélice cycliques et qui nous semble véritablement pertinente. L'observation originale est que le graphe en hélice cyclique d'Alëšin de la figure 1.13 présente une certaine *rigidité* : le groupe de symétrie de son graphe en hélice  $\mathcal{H}_{1,1}$  (vu comme graphe doublement étiqueté) se trouve être trivial. Nous pouvons illustrer simplement le phénomène sur la figure 1.14 en comparant ce dernier (au centre) avec les quatre autres graphes en hélice cycliques de même taille.

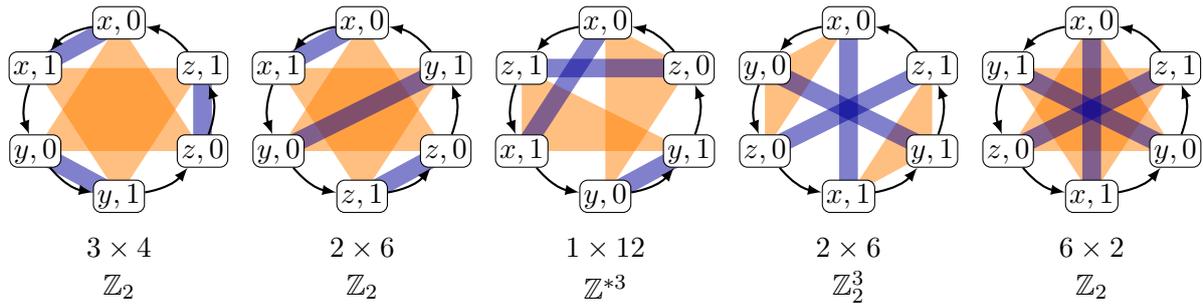


FIGURE 1.14 – Les cinq graphes en hélice constitués d'un unique cycle de taille  $2 \cdot 3 = 6$ . Nous avons ajouté des liens en couleur (orange pour les lettres, bleu pour les états) afin de mettre en évidence les symétries (ou l'absence de celles-ci). Nous indiquons sous chacun la taille  $s$  du groupe de symétries du graphe en hélice, la taille  $e$  de la classe d'équivalence de l'automate (avec  $s \times e = 2! \cdot 3!$ ) et le groupe précisément engendré (seul son caractère fini ou infini importe ici). Cette notion de rigidité de graphe en hélice se traduit immédiatement en terme de classe d'équivalence d'automate pour formuler le possible critère suivant.

CONJECTURE 1.27

Soit  $\mathcal{A}$  un automate de Mealy biréversible  $\mathfrak{md}$ -réduit et non-trivial. Si  $\mathcal{A}$  est rigide (sa classe d'équivalence est de taille maximale), alors le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est infini.

\*counterexample on request

Mentionnons que la conjecture 1.27 est vérifiée pour les automates biréversibles à 2 lettres et/ou 2 états d'après le théorème 1.7. Au delà, le critère associé pourrait s'appliquer sur toujours plus d'automates biréversibles comme le suggèrent les données de la table 1.28.

TABLE 1.28

# états	# lettres	# $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduits	# rigides	proportion
2	5	190	154	81%
3	3	148	140	95%
4	3	6293	6117	97%
4	4	...	...	...

En outre, il semblerait qu'un défaut de rigidité du graphe en hélice corresponde à l'existence d'un conjugué dont la  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduction est de taille strictement inférieure, et ainsi de suite. Si bien que nous conjecturons la généralisation suivante du corollaire 1.3 et du théorème 1.7.

CONJECTURE 1.29

Soit  $\mathcal{A}$  un automate de Mealy biréversible  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduit. Le groupe  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est fini si et seulement si  $\mathcal{A}$  admet un conjugué  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -trivial

\*counterexample on request

EXEMPLE 1.30

Reprenons les trois ou quatre spécimens de l'exemple 1.6. Nous y avons vu que chacun est non- $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -trivial mais engendre un groupe fini. Chacun admet une symétrie non-triviale, et ainsi aucun n'est rigide.

Par exemple, celui de gauche (sur la figure 1.7) admet la symétrie  $0 \leftrightarrow 1, a \leftrightarrow c, b \leftrightarrow d$ . Comme montré sur la figure 1.15, il admet une décomposition comme produit de deux composantes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Le conjugué  $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1$  se trouve être lui  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -trivial.

Nous obtiendrions ainsi la décidabilité du problème de finitude pour la classe des automates biréversibles. Un tel résultat validerait en particulier l'idée que la  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduction permet à elle seule de résoudre le problème de finitude pour les paires d'automates biréversibles premiers, c'est-à-dire, ces automates biréversibles qui n'admettent aucune décomposition non-triviale. Cette notion de primalité se retrouve dans d'autres contextes et semble spécialement pertinente pour le problème de Burnside dans le chapitre 2.

Il est possible que l'énoncé de la conjecture 1.29 soit trop fort, et qu'il faille envisager une version utilisant la notion de  $\mathbf{m}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ -réduction alternant  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduction et conjugaison.

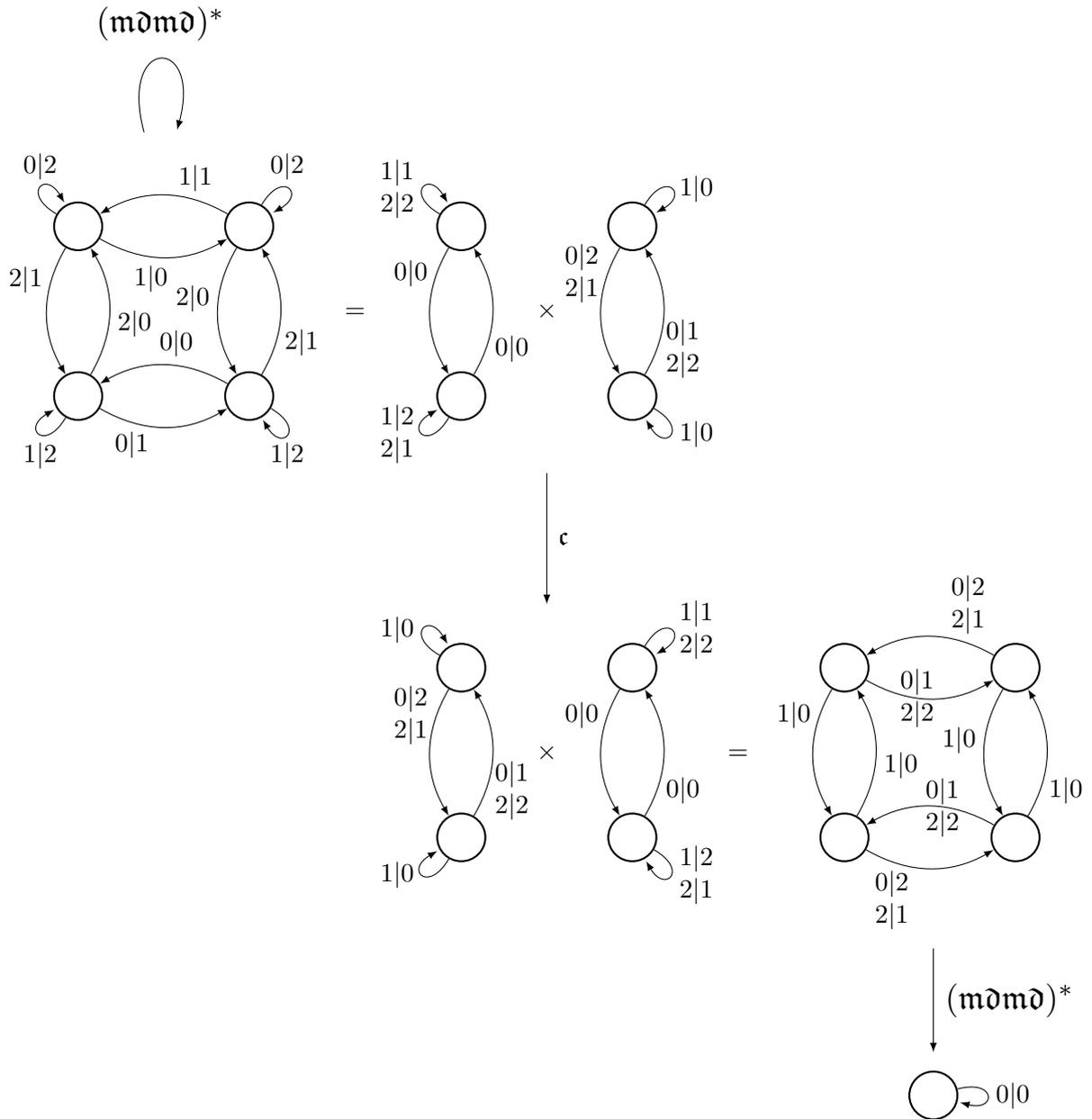


FIGURE 1.15 – Un automate biréversible  $m\partial$ -réduit, admettant un conjugué  $m\partial$ -trivial.



## Chapitre 2

# Burnside, réversibilité et arbres de Schreier

Dans ce chapitre, nous traitons du problème de torsion pour les groupes d'automate réversible. Le point de départ est l'observation selon laquelle tous les automates de Mealy connus pour engendrer des groupes de Burnside infinis se trouvent être non-réversibles, comme c'est le cas de l'automate d'Alěšin-Grigorchuk sur la figure 2.1.

Plus généralement, on remarque aussi que dans les deux packages (`automgrp` [106] et `FR` [28]) pour le système `GAP` [72] développés pour répondre à la nécessité d'expérimenter et de calculer dans les (semi)groupes d'automate, beaucoup des méthodes partielles mises en œuvre reposent très fortement sur la propriété de *contraction* (c'est-à-dire, la contraction de la longueur des mots tandis que l'on passe aux sections des sommets de l'arbre sur lequel le groupe agit). Cependant, tous les groupes d'automate ne possèdent pas cette propriété. En particulier, celle-ci n'est que très rarement présente dans les groupes engendrés par les automates réversibles, et les outils logiciels disponibles peinent souvent à produire des réponses appropriées.

La réversibilité ne doit pas être considérée comme une propriété anecdotique pour autant. De nombreux travaux [25, 77, 116, 124, 127, 128] sont consacrés à la réalisation de groupes libres et de produits libres de groupes comme groupes d'automate. Tous les automates des familles ainsi construites se trouvent être réversibles, comme c'est le cas de l'automate  $\mathcal{B}$ , appelé Bellaterra et représenté figure 2.1, et jusqu'à présent tous les groupes d'automate non-abéliens libres sont soit engendrés par des automates réversibles, soit construits à partir de tels automates [57]. Chacun de ces travaux utilise l'interaction entre l'automate et son dual pour obtenir la description du groupe.

Dans ces conditions, il devient particulièrement naturel de s'interroger sur la propriété de réversibilité en tant que telle et sur ses conséquences en terme de groupe engendré. Nous introduisons dans la section 2.1 la notion d'arbre de Schreier et décrivons les résultats obtenus successivement et dont l'objectif principal est de démontrer la conjecture selon laquelle un automate réversible ne peut engendrer un groupe de Burnside infini. La section 2.2 décrit la construction de ce que nous appelons des automates orbitaux définis à partir des premières orbites issues du tronc de l'arbre de Schreier et produisant un nouvel outil de recherche d'éléments d'ordre infini. Enfin

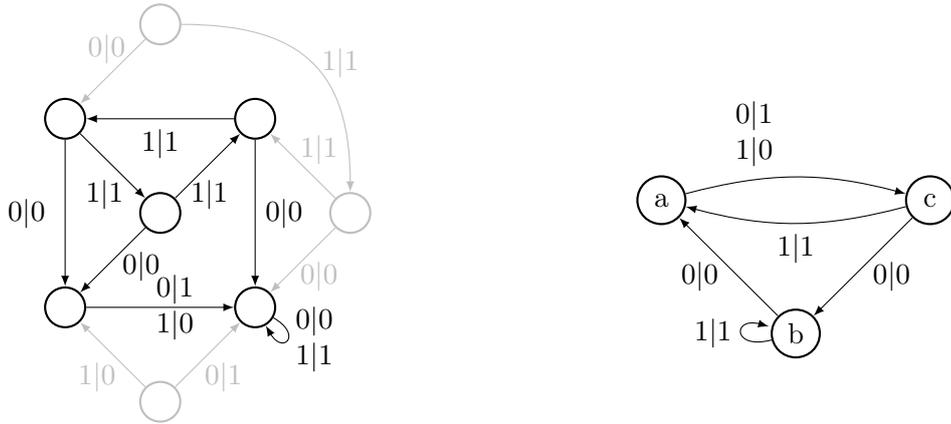


FIGURE 2.1 – Les automates non-réversibles d’Alěšin et d’Alěšin-Grigorčuk (sans la partie grisée) et l’automate réversible  $\mathcal{B}$  de Bellaterra.

nous proposons dans la section 2.3 une simple étude de la classe des biréversibles à 3 lettres et 3 états dans l’idée de présenter notre conjecture concernant le calcul du rayon de transitivité, c’est-à-dire la hauteur du tronc de l’arbre de Schreier.

## 2.1 Arbre de Schreier

Pour tout automate de Mealy  $\mathcal{A}$ , nous pouvons considérer ses puissances : pour  $n > 0$ , sa  $n$ -ième puissance est l’automate de Mealy

$$\mathcal{A}^n = ( Q^n, \Sigma, (\delta_i : Q^n \rightarrow Q^n)_{i \in \Sigma}, (\rho_{\mathbf{q}} : \Sigma \rightarrow \Sigma)_{\mathbf{q} \in Q^n} ) .$$

Par convention,  $\mathcal{A}^0$  est l’automate trivial sur l’alphabet  $\Sigma$ .

Une des principales caractéristiques d’un automate réversible  $\mathcal{A}$  est que ses composantes connexes sont fortement connexes. Puisque ses puissances itérées sont toutes réversibles également, on peut considérer l’arbre  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  de leurs composantes connexes, comme sur la figure 2.2. L’idée est alors d’étiqueter chaque arête par le ratio (nécessairement entier) des tailles de la composante-nœud enfant et de sa composante-nœud parent. Un tel arbre  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  est appelé *arbre de Schreier* de  $\mathcal{A}$ . En effet, les sommets de l’arbre de Schreier  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  sont les graphes de Schreier finis du groupe  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle$  engendré par l’automate dual de  $\mathcal{A}$ , révélant la dynamique de cet ensemble.

La question de la finitude s’interprète alors aisément via le schéma général suivant :

**PROPOSITION 2.1 ([21])**

Soit  $\mathcal{A}$  un automate de Mealy inversible réversible. Il y a équivalence entre :

- $\langle \mathcal{A} \rangle$  est fini ;
- $\langle \mathcal{A} \rangle_+$  est fini ;
- les composantes de  $\mathcal{A}^n$  sont bornées ;
- toute branche de  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  a son étiquette se terminant par  $1^\omega$ .

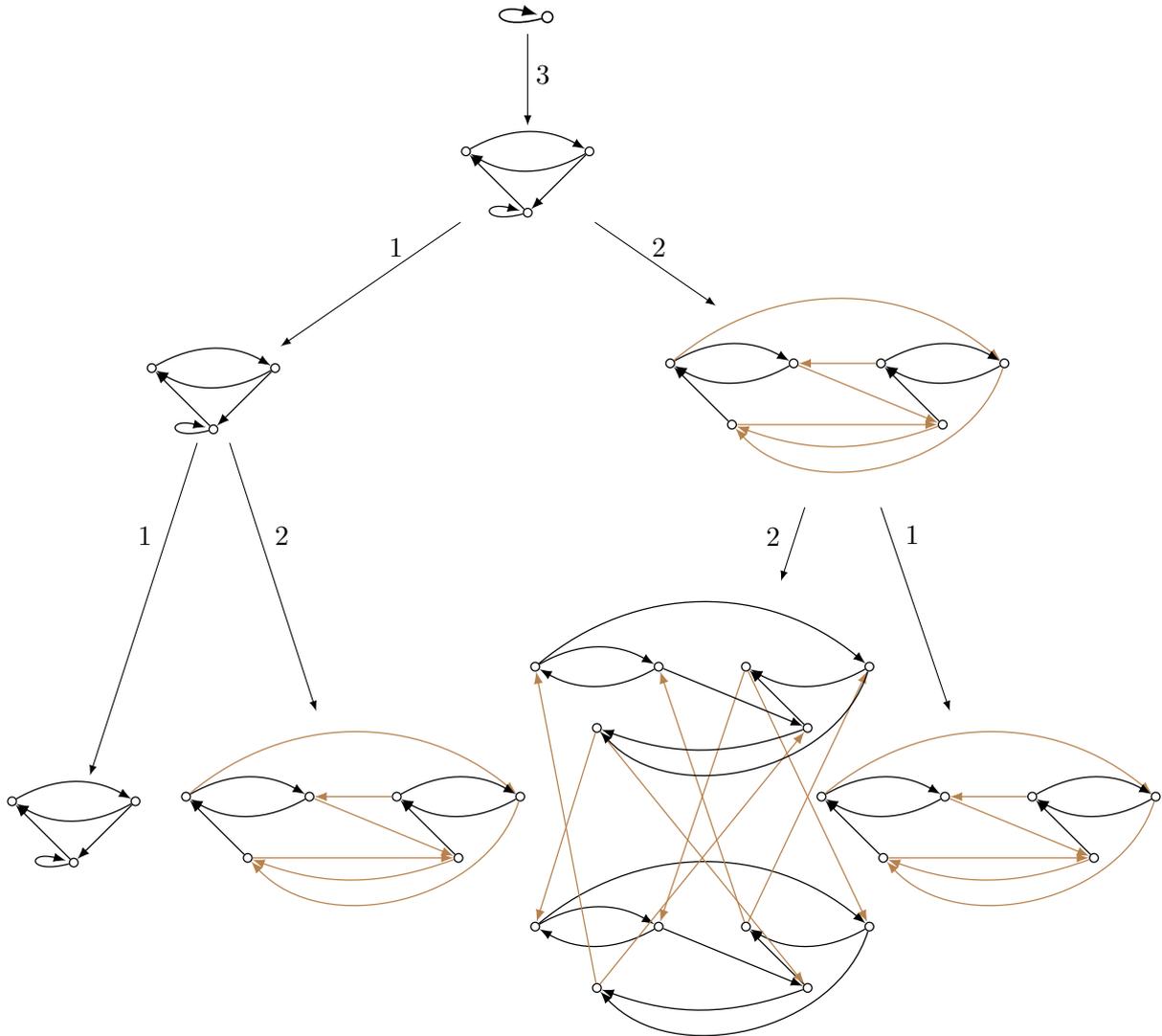


FIGURE 2.2 – Construction des premières composantes connexes pour l'arbre de Schreier  $t(\mathcal{B})$ .

Dans l'optique du problème de Burnside restreint aux groupes d'automate réversible, la question de la torsion s'interprète suivant un schéma similaire :

**PROPOSITION 2.2 ([21])**

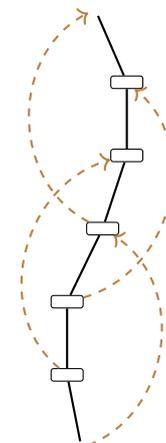
Soit  $\mathcal{A}$  un automate de Mealy inversible réversible et  $q$  un état. Il y a équivalence entre :

- $\langle \rho_q \rangle$  est fini ;
- $\langle \rho_q \rangle_+$  est fini ;
- les composantes de  $q^n$  sont bornées ;
- la branche des composantes des  $q^n$  a son étiquette se terminant par  $1^\omega$ .

Il est entendu que ces simples interprétations ne suffisent pas pour répondre aux problèmes de décision associés. Plusieurs résultats effectifs cependant s'appuient directement sur cette notion d'arbre de Schreier, mais requièrent une étude approfondie de sa structure.

La notion de chemin autorepliable (ou autorelevable) est alors cruciale (et peut utilement être étendue à tout sous-arbre). Par construction, l'arbre de Schreier  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  pour un automate de Mealy réversible  $\mathcal{A}$  est un arbre préfixe : tout mot d'états d'une composante-nœud est préfixe d'un mot (au moins) de chacune de ses composantes-nœuds enfants, petits-enfants, etc. Nous cherchons d'une certaine manière à compenser cette présentation déséquilibrée de l'information.

Dans un arbre  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$ , une arête  $e$  est *repliable* sur une autre arête  $f$  si tout mot de la composante-nœud cible  $\perp(e)$  admet un mot de la composante-nœud cible  $\perp(f)$  comme suffixe. Un chemin  $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in I}$  de  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  est alors *repliable sur* un chemin  $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$  si, pour tout  $i \in I$ , l'arête  $e_i$  est repliable sur l'arête  $f_i$ . Pour  $k > 0$ , un chemin  $\mathbf{e}$  est *k-autorepliable* dès que, pour tout  $i \geq 0$ , tout sous-chemin de  $\mathbf{e}$  partant du niveau  $i + k$  est repliable sur un sous-chemin de  $\mathbf{e}$  partant du niveau  $i$ . Pour  $k > 0$ , un chemin est *strictement k-autorepliable* s'il est *k-autorepliable* et non *h-autorepliable* pour  $h < k$ . Enfin, un chemin est *autorepliable* s'il est *k-autorepliable* pour un certain  $k \geq 0$ .



**EXEMPLE 2.3**

Considérons de nouveau l'automate  $\mathcal{B}$  de la figure 2.1 et l'arbre de Schreier  $\mathfrak{t}(\mathcal{B})$  dont la construction des premiers niveaux est représentée sur la figure 2.2. La figure 2.3 montre elle, sur les niveaux 0 à 4 de l'arbre  $\mathfrak{t}(\mathcal{B})$ , les ensembles de mots d'états de chaque composante-nœud, des exemples d'arêtes repliables, et des (segments initiaux des) chemins strictement 1-, 2- et 3-autorepliables.

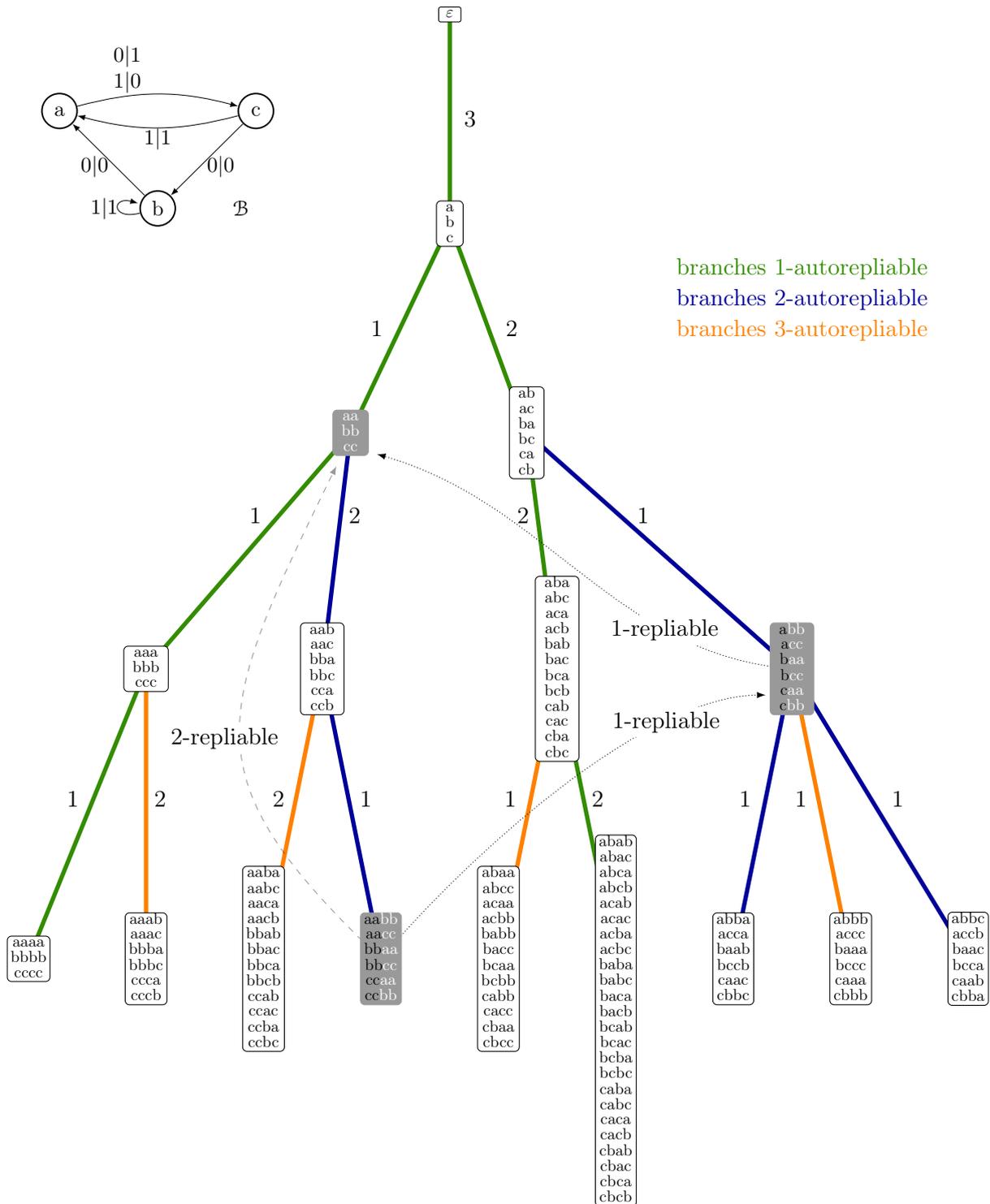
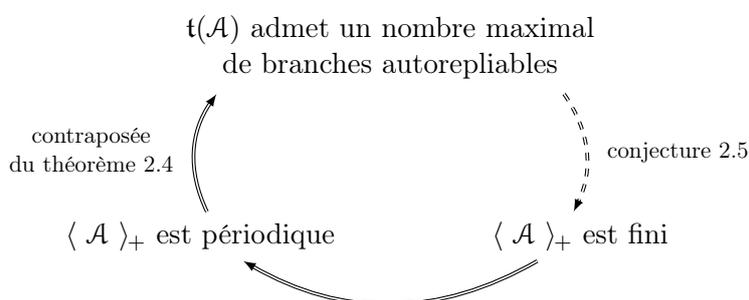


FIGURE 2.3 – Premières composantes-nœuds de l'arbre  $t(\mathcal{B})$  et exemples de chemins repliables.

Nous choisissons alors de présenter les différents résultats effectifs, obtenus en collaboration avec Th. GODIN, I. KLIMANN et D. SAVCHUK, comme des pièces d'un puzzle encore incomplet, en miroir du résultat général suivant.

THÉORÈME 2.4 ([78, 21])

Supposons que  $\mathcal{A}$  soit un automate de Mealy inversible réversible à  $q$  états. Soit  $\lambda_{\mathcal{A},k}$  le nombre de branches strictement  $k$ -autorepliables dans  $\mathfrak{t}(\mathcal{A})$  pour  $k \geq 1$ . Soit  $\pi_{q,k}$  le nombre de mots  $q$ -aires ayant une période primitive de longueur  $k$  [120, A143324]. Si on a  $(\lambda_{\mathcal{A},k})_{k \geq 1} <_{\text{lex}} (\pi_{q,k})_{k \geq 1}$ , alors  $\langle \mathcal{A} \rangle_+$  admet des éléments d'ordre infini.



CONJECTURE 2.5

Si on a  $(\lambda_{\mathcal{A},k})_{k \geq 1} = (\pi_{q,k})_{k \geq 1}$ , alors  $\langle \mathcal{A} \rangle_+$  est fini.

CONJECTURE 2.6

Aucun automate de Mealy inversible réversible ne peut engendrer un groupe de Burnside infini.

Énoncés de manière non-optimale, les résultats suivants sont énumérés chronologiquement :

THÉORÈME 2.7 ([50, 79, 92, 16–18])

Les conjectures 2.5 et 2.6 sont vraies pour les classes d'automates de Mealy inversibles réversibles suivantes :

- 2 états ou 2 lettres [92] ;
- connexe et 3 états [18] ;
- 4 états et 2 lettres [50, 17] ;
- sans composante biréversible [16] ;
- connexe et nombre premier d'états [79].



## 2.2 Automate orbital

L'automate orbital décrit l'action d'un groupe d'automate sur les sous-arbres correspondants à ses orbites sur les niveaux de l'arbre. La connection entre un groupe d'automate et les groupes engendrés par ses automates orbitaux procure alors un tout nouvel outil pour détecter des éléments d'ordre infini dans certains groupes d'automate pour lesquels aucune autre méthode ne fonctionnait.

On se place comme pour la section 2.1 dans la situation d'un automate de Mealy  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  réversible dont le dual  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$  agit sur  $Q^\lambda$  de façon transitive et sur  $Q^{\lambda+1}$  de façon non-transitive pour un certain rayon  $\lambda$ . Chaque orbite  $\mathcal{O}$  de l'action de  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$  sur  $Q^{\lambda+1}$  induit alors un sous-arbre  $T_{\mathcal{O}}$  de  $Q^*$  qui est  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle$ -invariant et consiste en les mots sur  $Q$  dont tous les facteurs sont dans  $\mathcal{O}$ . Ce sous-arbre, appelé *arbre orbital*, n'est plus régulier : il contient le  $\lambda$ -ième niveau  $Q^\lambda$  de  $Q^*$  et chaque sommet de  $Q^\lambda$  est la racine d'un sous-arbre de  $T_{\mathcal{O}}$  régulier d'arité  $\|\mathcal{O}\|/\|Q^\lambda\|$ . L'*automate orbital* associé à l'orbite  $\mathcal{O}$  est l'automate minimal décrivant l'action de  $\mathfrak{d}\mathcal{A}$  sur ces sous-arbres d'arité plus petite.

Nous montrons que tout automate réversible  $\mathcal{A}$  n'admet qu'un nombre fini d'automates orbitaux différents (même lorsqu'on considère les itérations d'une telle construction), et établissons des connections entre le groupe  $\langle \mathfrak{d}\mathcal{A} \rangle$  et les groupes engendrés par ces automates orbitaux [17].

Cela étant, nous n'avons pas de preuve de l'énoncé suivant.

### CONJECTURE 2.8 ([17])

Quand un automate de Mealy réversible engendre un groupe fini, chacun de ses automates orbitaux également.

Comme simplement mentionné dans le théorème 2.7, selon l'étude initiée dans [50] de la classe des automates inversibles à 2 lettres et 4 états, il est possible de montrer que chaque automate de cette classe qui engendre un groupe infini contient nécessairement un élément d'ordre infini, via les outils classiques disponibles via les packages FR ou `automgrp`; chaque automate sauf essentiellement deux automates biréversibles critiques que nous noterons dorénavant  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{K}$  (voir les figures 2.6, 2.7 et 2.8). Remarquons que l'on peut passer de  $\mathcal{J}$  à  $\mathcal{K}$  comme l'on passe de l'automate d'Alěšin (figure 1.13) à l'automate Bellaterra (figure 2.1), c'est-à-dire en échangeant permutation trivial et transposition  $(0, 1)$ .

La principale application consiste à montrer que, comme annoncé en fin de section 2.1, les deux groupes engendrés  $\langle \mathcal{J} \rangle$  et  $\langle \mathcal{K} \rangle$  contiennent des sous-semigroupes sans torsion sur au moins deux générateurs (propositions 2.10 et 2.11), ce qui au passage permet de compléter l'étude [50]. Celle-ci indique en particulier que le célèbre automate d'Alěšin-Grigorchuk à 2 lettres et 5 états est minimal pour le fait d'engendrer un groupe de Burnside infini [80]. Rappelons qu'une classification pour les automates inversibles à 2 lettres et au plus 3 états est disponible [39].

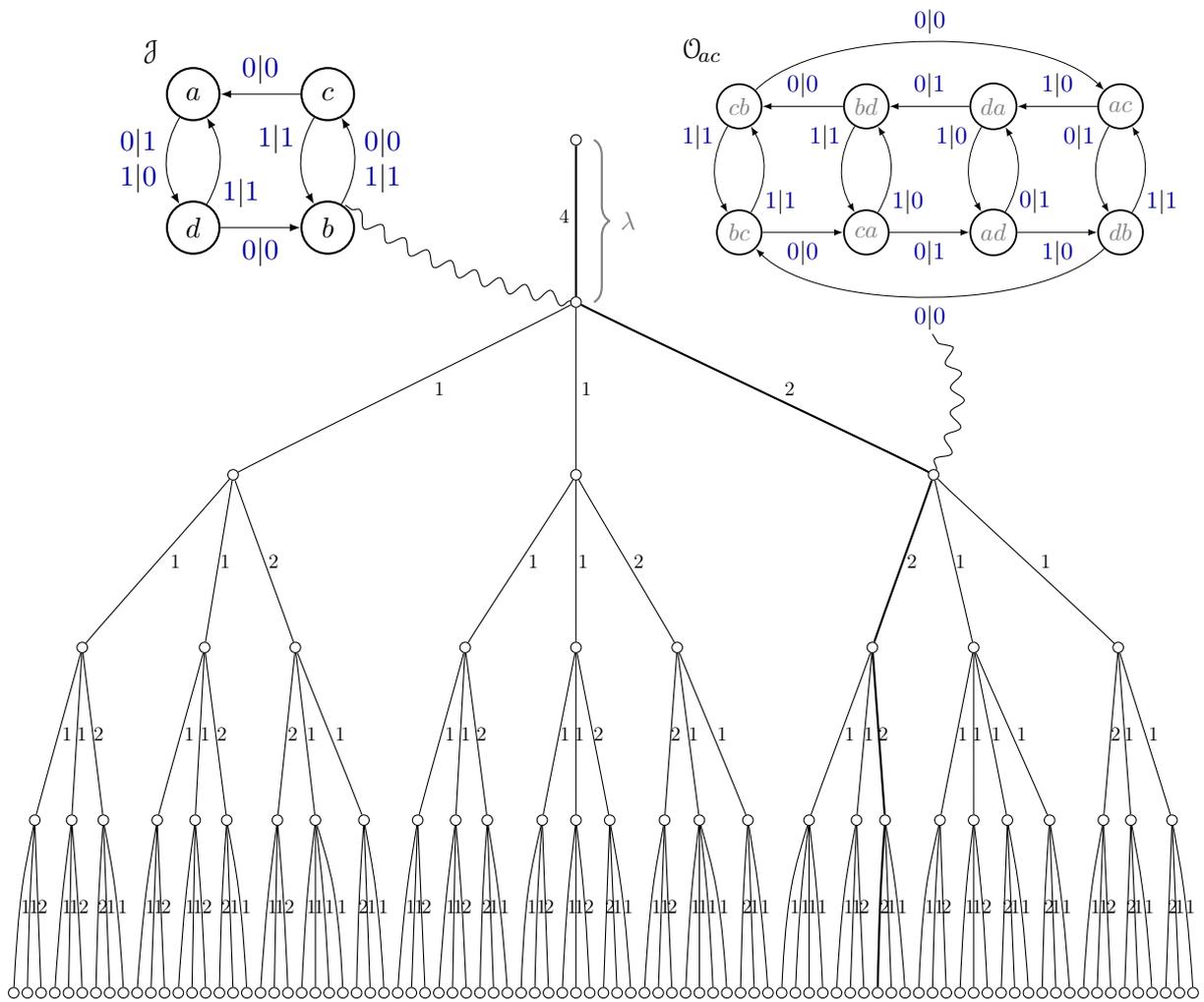


FIGURE 2.5 – Les six premiers niveaux de l'arbre de Schreier  $t(\mathcal{J})$ .

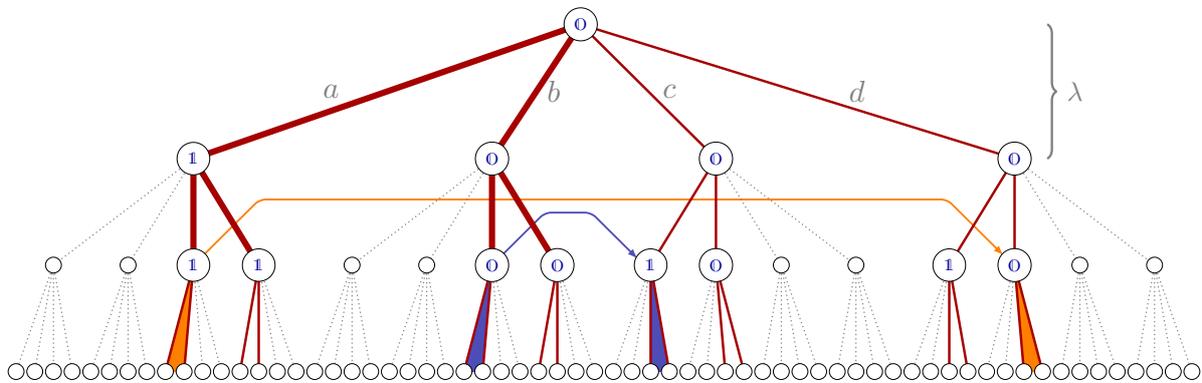


FIGURE 2.6 – L'arbre orbital  $T_{\mathcal{Q}_{ac}}$  associé à la composante-nœud  $\mathcal{Q}_{ac}$  de  $t(\mathcal{J})$ .

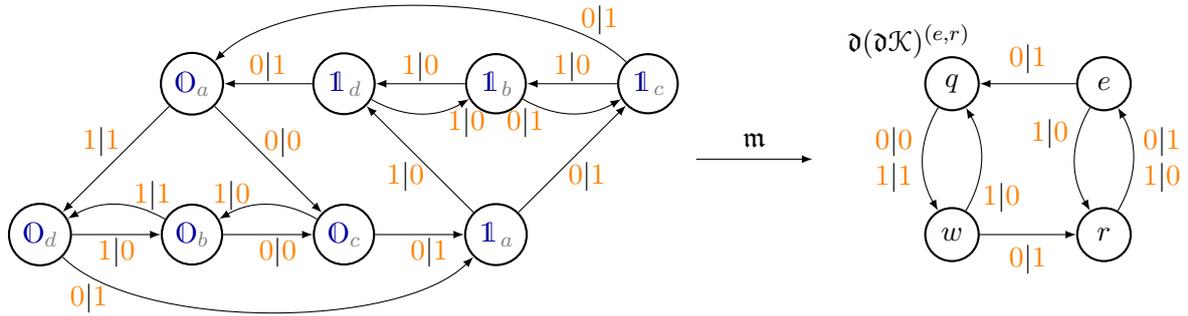


FIGURE 2.7 – Construction-minimisation pour l'automate orbital de  $\mathcal{J}$  associé à l'orbite  $\mathcal{O}_{ac}$ . L'automate  $\mathcal{K}$  original est obtenu en permutant deux de ses états (voir aussi la figure 2.8).

EXEMPLE 2.9

L'automate biréversible  $\mathcal{J}$  d'ensemble d'états  $Q = \{a, b, c, d\}$  et d'alphabet  $\Sigma = \{0, 1\} \sim \{0, 1\}$  apparaît sur la figure 2.5 avec (les six premiers niveaux de) l'arbre de Schreier  $t(\mathcal{J})$ , ainsi que l'automate  $\mathcal{O}_{ac}$  correspondant à la seule orbite de  $Q^{\lambda+1} = Q^2$  qui puisse mener à un automate orbital non-trivial. La figure 2.6 montre grâce à des arêtes pleines (les quatre premiers niveaux de) l'arbre orbital  $T_{\mathcal{O}_{ac}}$  vu comme sous-arbre de l'arbre  $Q^*$ . La figure 2.7 représente l'automate orbital associé à  $\mathcal{O}_{ac}$ , défini comme le minimisé de l'automate ayant  $\Sigma \times Q^\lambda = \{0, 1\} \times \{a, b, c, d\}$  pour ensemble d'états et dont les transductions peuvent être obtenues comme suit.

Toujours sur la figure 2.6, apparaît l'étiquetage des nœuds de  $T_{\mathcal{O}_{ac}}$ , obtenu en déroulant l'automate dual  $\mathfrak{d}\mathcal{J}$  à partir de son état  $0$  ici. L'état  $(x, \mathbf{u})$ —noté  $x_{\mathbf{u}}$ —de l'automate orbital pour  $\mathcal{J}$  correspond au nœud d'étiquette  $x \in \Sigma$  et d'adresse  $\mathbf{u} \in Q^\lambda$  dans l'arbre  $T_{\mathcal{O}_{ac}}$ . Nous obtenons par exemple (chemins épaissis de l'arbre figure 2.6) une transition entre l'état  $1_a$  (fils de la racine, d'étiquette  $1$  et d'adresse  $a$ ) et d'une part l'état  $1_c$  et d'autre part l'état  $1_d$  (ses fils dans  $T_{\mathcal{O}_{ac}}$ , chacun d'étiquette  $1$  et d'adresses relatives et respectives  $c$  et  $d$ ).

Pour connaître les sorties de telles transitions, il s'agit d'observer comment les sous-arbres (triangles oranges ou bleus disons sur la figure 2.6) sont déplacés sous l'action du dual  $\mathfrak{d}\mathcal{O}_{ac}$  :  $0$  transporte (flèche orange) le sous-arbre d'adresse absolue  $ac$ —sous-arbre gauche (d'indice  $0$  disons) de  $1_a$ —vers le sous-arbre d'adresse absolue  $db$ —sous-arbre droit (d'indice  $1$ ) de  $0_d$ . Autre exemple,  $0$  transporte (flèche bleue) le sous-arbre d'adresse absolue  $bc$ —sous-arbre gauche (d'indice  $0$ ) de  $0_b$ —vers le sous-arbre d'adresse absolue  $ca$ —sous-arbre gauche (d'indice  $0$ ) de  $0_c$ . On obtient ainsi les deux transductions suivantes et ainsi de suite.



Le point remarquable est que l'automate orbital (unique minimisé non-trivial) pour  $\mathcal{J}$  est son propre automate orbital, et se trouve être équivalent à  $\mathcal{K}$  (voir l'exemple 2.12).

L'intrication des actions entre  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{K}$  nous conduit aux deux résultats recherchés suivants.

PROPOSITION 2.10 ([17])

Tout mot fini sur  $\{a, b, c, d\}$  n'ayant aucun facteur dans  $\{a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ba, cd, dc\}$  induit un élément non-trivial de  $\langle \mathcal{J} \rangle$ . Ses sous-semigroupes  $\langle ac, ad, bc, bd \rangle_+$  et  $\langle ca, da, cb, db \rangle_+$  en particulier sont sans torsion.

PROPOSITION 2.11 ([17])

Tout mot fini sur  $\{q, w, e, r\}$  n'ayant aucun facteur dans  $\{q^2, w^2, e^2, r^2, qe, eq, wr, rw\}$  induit un élément non-trivial de  $\langle \mathcal{K} \rangle$ . Son sous-semigroupe  $\langle er, qr \rangle_+$  est sans torsion.

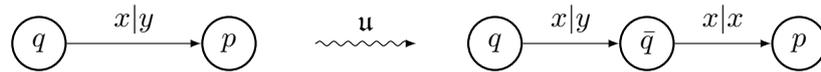
Signalons que la notion d'automate orbital est dépendante du choix d'un représentant de la classe d'équivalence de l'automate de départ.

EXEMPLE 2.12

Considérons les automates  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{K}$  : il y a 48 automates équivalents à  $\mathcal{J}$  et autant équivalents à  $\mathcal{K}$ . On peut appliquer à chacun la construction et obtenir un automate orbital (unique minimisé non-trivial). La moitié des 48 automates équivalents à  $\mathcal{J}$  disons produit des automates équivalents à  $\mathcal{K}$  et l'autre produit des automates équivalents à  $\mathcal{J}$ . La figure 2.8 montre le graphe décrivant précisément ces connexions.

Mentionnons que depuis ces travaux et la publication de [17], D. SAVCHUK a poursuivi l'étude de ces deux automates en collaboration avec S. SIDKI. Ils ont en particulier montré dans [115] que l'automate  $\mathcal{J}$  engendre un groupe isomorphe à  $(\mathbb{Z}_2^2 \wr \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ .

De notre côté, avec I. KLIMANN, nous avons remarqué que  $\mathcal{J}$  peut être justement obtenu à partir de l'automate  $\mathcal{L}$  de l'allumeur de réverbère  $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$  (sur la figure 1.1), disons  $\mathcal{J} = \mathbf{u}\mathcal{L}$ , avec  $\mathbf{u}$  un procédé simple et naturel consistant à dissocier sortie et transition de chaque transduction : tout automate  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  peut être transformé en l'automate  $\mathbf{u}\mathcal{A} = (Q \sqcup \bar{Q}, \Sigma, \bar{\delta}, \bar{\rho})$  avec  $\bar{Q} = \{\bar{q} : q \in Q\}$  et avec  $\bar{\delta}_x(q) = \bar{q}$ ,  $\bar{\delta}_x(\bar{q}) = \delta_x(q)$ ,  $\bar{\rho}_q(x) = \rho_q(x)$  et  $\bar{\rho}_{\bar{q}}(x) = x$  pour  $(q, x) \in Q \times \Sigma$ .



QUESTION 2.13

Quel lien existe entre les (semi)groupes  $\langle \mathcal{A} \rangle_+$  et  $\langle \mathbf{u}\mathcal{A} \rangle_+$  en général? Et quand l'automate  $\mathcal{A}$  est juste inversible?

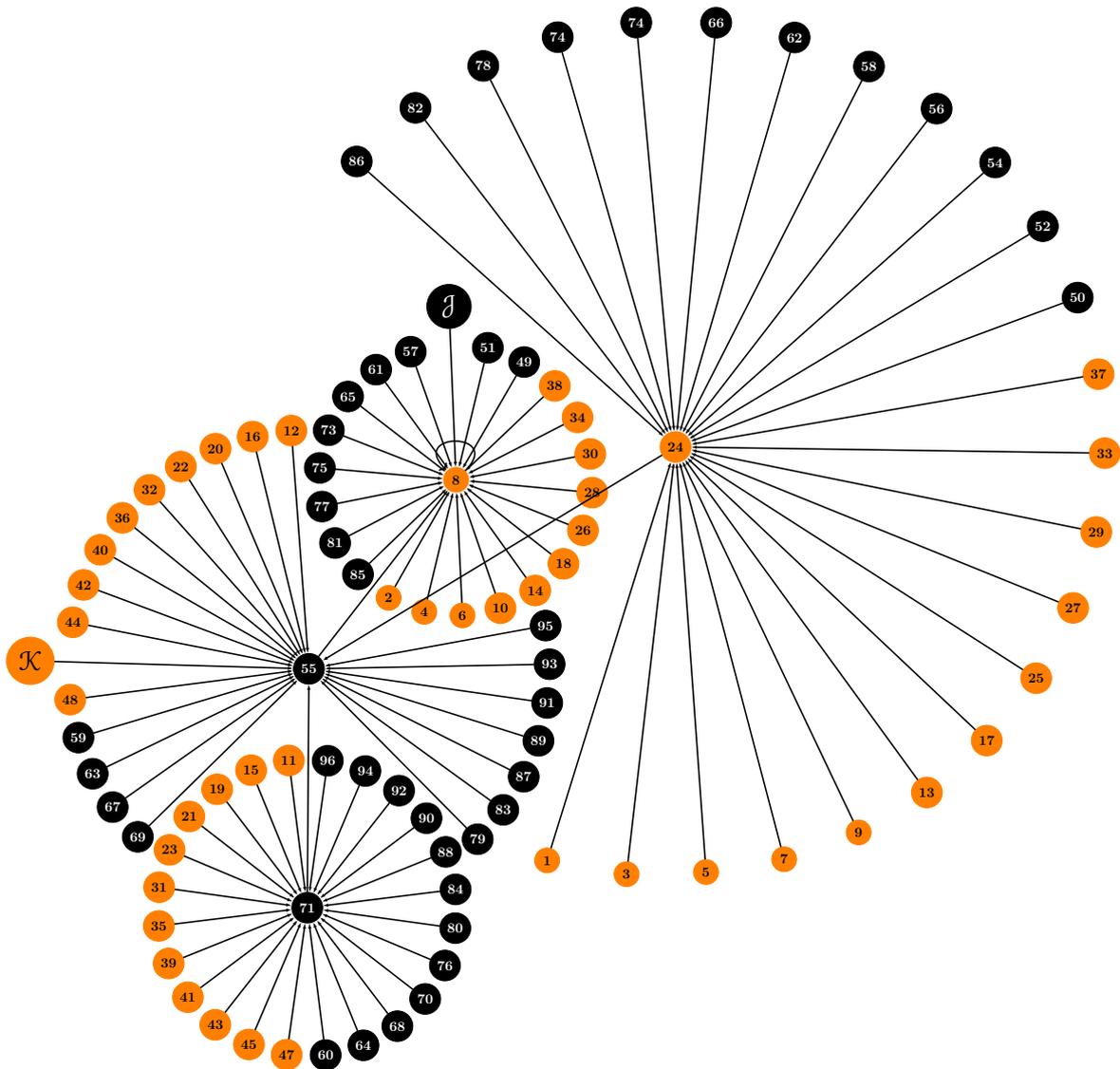


FIGURE 2.8 – Relations pour la construction d’un automate orbital (unique minimisé non-trivial) pour les automates équivalents à  $\mathcal{J}$  ou  $\mathcal{K}$  dans l’exemple 2.12. Les sommets oranges correspondent aux automates équivalents à  $\mathcal{K}$  et les noirs à ceux équivalents à  $\mathcal{J}$ . Une flèche indique que l’automate cible est automate orbital de l’automate source. Chaque sommet porte accessoirement le numéro (dans l’ordre lexicographique) de l’automate dans sa classe d’équivalence.

## 2.3 Rayon de transitivité

Pour illustrer notre conjecture 2.14 ci-dessous qui permettrait de décider la transitivité sphérique (ou transitivité par niveau) des automates biréversibles, nous proposons un rapide examen de la petite classe des automates biréversibles à 3 lettres et 3 états vis-à-vis de la  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduction, outil élémentaire mais central exposé dans la section 1.1. Ceci nous permet au passage de mettre en œuvre encore une fois cet outil remarquable qu'est l'automate orbital défini précédemment (section 2.2) et de mettre de nouveau en perspective la question de la primalité, que nous avons abordée une première fois dans la section 1.3.

À isomorphisme près, il existe 335 automates de Mealy biréversibles à 3 lettres et 3 états. Parmi eux, 187 sont  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -triviaux. Nous souhaitons montrer que chacun des **148 automates restant** engendre un groupe infini.

**Les non-connexes** : il y a 16 automates non-connexes (une composante à 1 état et une composante à 2 états). Pour ces automates, soit la composante à 2 états est  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduite (pour 12 d'entre eux), soit le produit des deux composantes est un automate  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduit (pour les 4 restants, et pour 8 des douze précédents) : le groupe engendré inclut par conséquent un sous-groupe infini d'après le théorème 1.7.

Il y a aussi 16 automates connexes avec un dual non-connexe, pour lesquels l'argument est similaire via le théorème 1.1.

**Les connexes** : il nous reste ainsi 116 automates connexes avec dual également connexe. Nous estimons que 110 d'entre eux ou bien sont sphériquement transitifs ou bien ont leur dual sphériquement transitif lui-même (74 sont dans l'intersection).

L'action d'un groupe d'automate  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est dite *sphériquement transitive* (ou *transitive par niveau* selon les auteurs) si elle est transitive sur chaque niveau  $\Sigma^n$  de l'arbre  $\Sigma^*$ . À ce stade, signalons qu'il n'existe pas d'algorithme (efficace) pour décider la transitivité sphérique du groupe engendré par un automate donné, tout spécialement dans le cas biréversible (voir [28, 106, 123, 12] par exemple). Le *rayon de transitivité* d'un automate de Mealy  $\mathcal{A}$  peut alors être défini comme le rayon maximal  $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  pour lequel l'action de  $\mathcal{A}$  sur  $\Sigma^\lambda$  est transitive, ou de façon équivalente, l'exposant maximal  $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  pour lequel l'automate  $\mathfrak{d}(\mathcal{A})^\lambda$  est connexe.

Nous formulons la simple conjecture suivante.

### CONJECTURE 2.14

Tout automate de Mealy à  $q$  états biréversible et  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduit voit son rayon de transitivité  $\lambda$  satisfaire

$$\lambda < \infty \implies \lambda < q.$$

Dès lors que l'on requiert seulement que le dual soit minimal, on peut déjà collecter des données quantitatives qui supportent notre conjecture 2.14. Quand la condition de  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réductibilité est requise, on obtient la table 2.15, dans laquelle chaque cellule donne la suite des nombres d'automates biréversibles  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduits avec un rayon de transitivité 0, 1, 2, 3, etc. Chaque suite se termine par un terme ( $n$ ) en position  $k + 1$ , ce qui signifie qu'il y a exactement  $n$  automates biréversibles  $\mathbf{m}\mathfrak{d}$ -réduits avec un rayon de transitivité au moins  $k$ .

TABLE 2.15

$ Q ^{ \Sigma }$	2	3	4	5
2	0	0, 1, 0, 0, 0, 0, (1)	4, 11, 0, 0, 0, 0, (7)	40, 69, 0, 0, 0, 0, (81)
3	0, 0, 0, 0, 0, 0, (2)	16, 30, 2, 0, 0, 0, (100)	945, 1156, 19, 0, 0, 0, (4173)	
4	0, 0, 0, 0, 0, 0, (22)	648, 575, 39, 2, 0, 0, (5029)		
5	0, 0, 0, 0, 0, 0, (190)			

Le cas  $\mathbf{m\delta}$ -réduit à 2 lettres (première colonne de la table 2.15) est maintenant clairement établi : tout automate biréversible  $\mathbf{m\delta}$ -réduit à 2 lettres est sphériquement transitif [92, 13].

Le cas  $\mathbf{m\delta}$ -réduit à 3 lettres (deuxième colonne) pourrait être traité en établissant que le rayon de transitivité maximal est alors atteint exactement pour les automates  $\mathcal{T}_{\|Q\|,3}$  et  $\mathcal{T}'_{\|Q\|,3}$ , membres des familles générales que nous définissons figure 2.9.

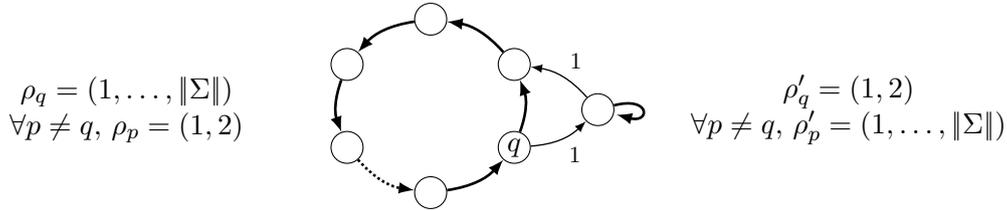


FIGURE 2.9 – Les automates  $\mathcal{T}_{\|Q\|,|\Sigma|} = (Q, \Sigma, \delta, \rho)$  et  $\mathcal{T}'_{\|Q\|,|\Sigma|} = (Q, \Sigma, \delta, \rho')$  de la proposition 2.16.

**PROPOSITION 2.16**

Les familles  $(\mathcal{T}_{k,\ell})$  et  $(\mathcal{T}'_{k,\ell})$  d'automates de Mealy biréversibles  $\mathbf{m\delta}$ -réduits garantissent l'optimalité de la borne de la conjecture 2.14.

Puisque la transitivité sphérique est un des principaux outils pour détecter la présence d'éléments d'ordre infini, la conjecture 2.14 fournirait au passage un intéressant critère d'infinitude via le corollaire 1.3.

Revenons enfin aux biréversibles à 3 lettres et 3 états. Il reste ainsi **six automates** (dont deux sont autoduaux) dont on souhaite montrer qu'ils engendrent des groupes infinis.

Il se trouve que chacun de ces automates se trouve admettre un automate orbital (voir la section 2.2), dont la  $\mathbf{m\delta}$ -réduction fournit un automate à 2 lettres (et sept ou neuf états), ce qui, après invocation du théorème 1.7, permet finalement de valider l'énoncé annoncé :

**PROPOSITION 2.17**

Si les conjectures 2.8 et 2.14 sont vérifiées, la  $\mathbf{m\delta}$ -réduction répond au problème de finitude pour la classe des automates de Mealy biréversibles à 3 lettres et 3 états.

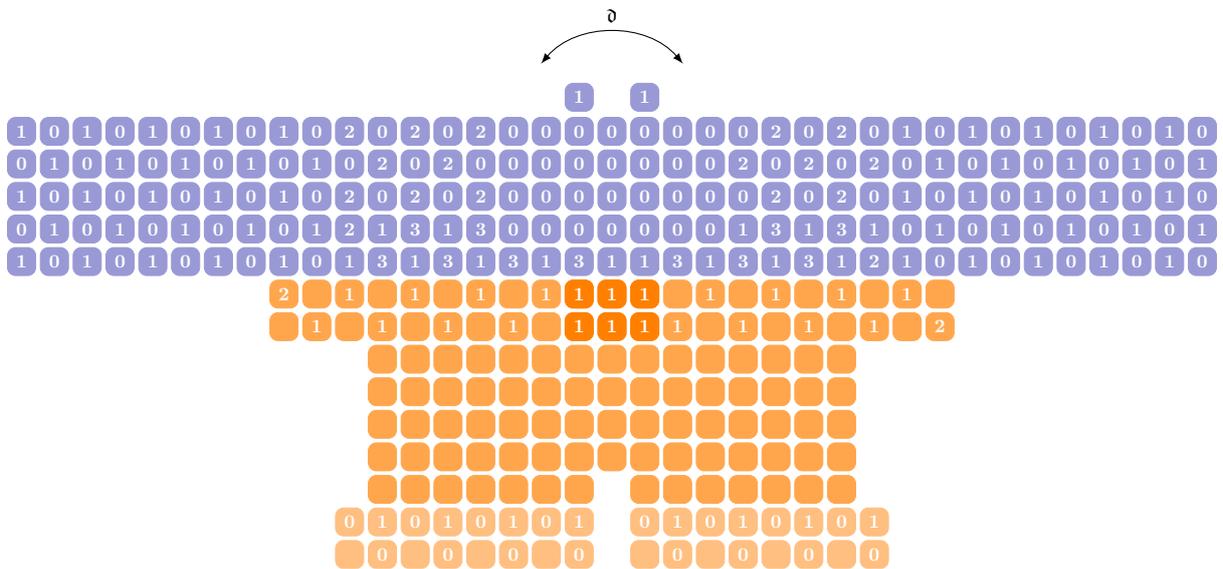


FIGURE 2.10 – Une représentation-friandise de la classe des 335 automates de Mealy biréversibles à 3 lettres et 3 états : les 187  $m\mathfrak{d}$ -triviaux sont en bleu, les 148  $m\mathfrak{d}$ -réduits en orange. Onze sont auto-duaux (colonne centrale). Le numéro 0, 1, 2 ou 3 indique le rayon de transitivité. Au centre en orange plus foncé, les six (dont deux auto-duaux) pour lesquels seule la construction de l'automate orbital semble permettre de prouver algorithmiquement l'infinitude des groupes engendrés.



Deuxième partie

Monoïdes de tresses  
et théorie de Garside



## Chapitre 3

# Groupes de tresses, structures de Garside multiples et dualité

Nous développons et progressons dans l'étude par des méthodes algébriques et combinatoires d'une classe de groupes, appelés groupes de Garside, qui contient en particulier les groupes de tresses classiques et ceux associés aux groupes de réflexion complexes bien engendrés.

Nommés en l'honneur de F. A. GARSIDE pour le caractère précurseur de sa contribution [73], les monoïdes de Garside sont une généralisation algébrique et combinatoire naturelle des monoïdes de tresses, reposant sur la propriété de treillis de la divisibilité [58, 63]. En effet, les groupes de tresses sont bien connus depuis le théorème de E. BRIESKORN et leur étude structurelle ultérieure par P. DELIGNE, E. BRIESKORN et K. SAITO [40, 66] : leurs principaux résultats combinatoires expriment le fait que tout groupe de tresses est le groupe de fractions d'un monoïde dans lequel la divisibilité a de bonnes propriétés et admet en outre un élément distingué dont les diviseurs encodent toute la structure : dans la terminologie moderne, il s'agit d'un monoïde de Garside. Le groupe de fractions d'un monoïde est alors appelé groupe de Garside. Ainsi les groupes de Garside jouissent de multiples propriétés combinatoires remarquables. Cependant, comme la classe des groupes automatiques qui les englobe, les groupes de Garside forment une classe dont les frontières restent largement méconnues [64].

La section 3.1 donne les principales définitions et trois exemples dont deux non-standards. Nous présentons alors une procédure permettant de construire des monoïdes de tresses et/ou des monoïdes de Garside comme monoïdes-germes de groupes de réflexion complexes. Nous rappelons dans la section 3.2 le résultat de J. BIRMAN, K. H. KO et S. J. LEE [38] à partir duquel D. BESSIS a proposé une définition de monoïde de tresses dual [34]. Nous produisons des présentations explicites des monoïdes de tresses duaux pour les types de Coxeter B et D [4]. Nous proposons un monoïde postclassique pour le type complexe bien engendré  $(e, e, r)$  et présentons son étude combinatoire, résultats obtenus en collaboration avec R. CORRAN dans [8]. La section 3.3 se concentre sur le type B, aussi appelé hyperoctaédral, pour lequel nous dévoilons une triple structure classique-duale et montrons en outre que son groupe de tresses admet une troisième structure de Garside qui ne correspond pas en général à un monoïde-germe, mais semble disposer d'une combinatoire riche et encore mystérieuse.

### 3.1 Monoïde de Garside et monoïde-germe

#### Monoïde et groupe de Garside

Généralisation naturelle des monoïdes de tresses, les monoïdes de Garside sont définis par l'existence de notions convenables de plus petit commun multiple (ppcm) et de plus grand commun diviseur (pgcd), et la satisfaction de conditions de noethérianité et de génération finie.

Nous listons ici les propriétés de base des monoïdes et des groupes de Garside, pour lesquelles la référence est [64], et donnons trois premiers exemples dont deux non-standards (voir aussi [58–60, 63, 1]).

Soit  $M$  un monoïde. Pour  $a, b, c$  dans  $M$ ,  $a$  est un *diviseur à gauche* de  $b$  ou, de manière équivalente,  $b$  est un *multiple à droite* de  $a$  si l'on a  $b = ab'$  pour un certain  $b'$  de  $M$ ; de plus,  $b$  est un multiple à droite commun minimal, ou *mcm à droite*, de  $a$  et  $c$  si  $b$  est un multiple à droite de  $a$  et  $c$ , et si aucun diviseur propre à gauche de  $b$  n'est multiple à droite de  $a$  et  $c$ . Si tout multiple à droite de  $a$  et  $c$  est en fait un multiple à droite de  $b$ , on parle de *ppcm à droite*. Un diviseur à gauche commun à  $a$  et  $c$  qui est un multiple à droite de tout diviseur à gauche commun à  $a$  et  $c$  est appelé *pgcd à gauche* de  $a$  et  $c$ .

Par ailleurs,  $M$  est dit *simplifiable à gauche* si, pour tous  $a, b, c$  de  $M$ ,  $ba = bc$  implique  $a = c$ , et  $M$  est dit *conique* si son unité  $1$  est son seul élément inversible :  $ab = 1$  implique  $a = b = 1$ . Ces deux propriétés impliquent alors l'unicité du ppcm à droite  $a \vee c$  et du pgcd à gauche  $a \wedge c$  de  $a$  et  $c$  (quand ils existent). Quand  $a \vee c$  existe et  $M$  est simplifiable à gauche, l'unique élément  $b$  satisfaisant  $a \vee c = ab$  est noté  $a \setminus c$ . Nous obtenons

$$a \vee b = a(a \setminus b) = b(b \setminus a).$$

Les termes *diviseur à droite*, *mcm à gauche*, *ppcm à gauche*, *pgcd à droite* et *simplifiable à droite* sont définis symétriquement. Conicité et simplifiabilité font de la divisibilité à gauche et à droite des relations d'ordre.

Un monoïde  $M$  est un *monoïde de Garside* si  $M$  est conique et simplifiable, si toute paire d'éléments de  $M$  admet un ppcm à gauche et à droite, et si  $M$  admet un *élément de Garside*, défini comme un élément dont les diviseurs à droite et à gauche coïncident, sont en nombre fini et engendrent  $M$ .

Le *groupe enveloppant* d'un monoïde  $M$  est défini comme le groupe admettant la même présentation que  $M$ . Si  $M$  est un monoïde de Garside, alors  $M$  satisfait les conditions de Ore [55], et se plonge dans son groupe de fractions à droite, et, symétriquement, dans son groupe de fractions à gauche. Dans ce cas, par construction, toute fraction à droite  $ab^{-1}$  avec  $a, b$  dans  $M$  peut s'exprimer comme une fraction à gauche  $c^{-1}d$  avec  $c, d$  dans  $M$ , et réciproquement. Par conséquent, les deux groupes coïncident, et il n'y a aucune ambiguïté à parler *du* groupe de fractions d'un monoïde de Garside. Un groupe  $G$  est un *groupe de Garside* s'il existe un monoïde de Garside duquel  $G$  est le groupe enveloppant, et donc le groupe de fractions.

Signalons que les structures appelées désormais Garside ont été appelées *petits gaussiens* ou *gaussiens minces* dans les travaux originaux jusqu'en 2000 [63, 1–3].

## EXEMPLE 3.1

Le monoïde classique

$$\mathbf{B}^+(A_2) = \langle \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle_+^1$$

est un monoïde de Garside. Son groupe de fractions est le groupe  $\mathbf{B}(A_2)$  des tresses à 3 brins (associé au groupe de Coxeter de type  $A_2$ , *i.e.* au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ , comme nous le verrons dans la section 3.2). Son élément de Garside (minimal) est la *tresse demi-tour*  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ . Nous reviendrons sur cet exemple paradigmatique dans la section 5 (et en particulier dans l'exemple 5.18).

## EXEMPLE 3.2

Le monoïde

$$M_X = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} : \mathbf{a}^2 = \mathbf{bc}, \mathbf{b}^3 = \mathbf{ca} \rangle_+^1$$

est un monoïde de Garside. Il se distingue par le fait qu'il ne soit pas antiautomorphe, contrairement à tous les monoïdes de tresses par exemple. Son groupe de fractions se trouve être le groupe du nœud  $(3, 4)$ -torique, également groupe de fractions du monoïde de Garside  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{a}^3 = \mathbf{b}^4 \rangle_+^1$ , antiautomorphe lui. Nous renvoyons à [1, 5] pour davantage de structures de Garside pour les groupes d'entrelacs toriques.

## LEMME 3.3 ([64])

Soit  $M$  un monoïde de Garside. Alors tout triplet  $(a, b, c)$  d'éléments de  $M$  vérifie les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (ab) \vee (ac) &= a(b \vee c), \\ c \setminus (ab) &= (c \setminus a)((a \setminus c) \setminus b), & (ab) \setminus c &= b \setminus (a \setminus c), \\ (a \vee b) \setminus c &= (a \setminus b) \setminus (a \setminus c) = (b \setminus a) \setminus (b \setminus c), & c \setminus (a \vee b) &= (c \setminus a) \vee (c \setminus b). \end{aligned}$$

## LEMME 3.4 ([64])

Tout monoïde de Garside  $M$  satisfait les deux propriétés équivalentes suivantes :

1. il existe une application  $\nu$  de  $M$  dans les entiers vérifiant  $\nu(a) > 0$  pour  $a \neq 1$  dans  $M$ , et  $\nu(ab) \geq \nu(a) + \nu(b)$  pour  $a, b$  dans  $M$  ;
2. pour tout ensemble  $X$  engendrant  $M$  et tout élément  $a$  de  $M$ , les longueurs des décompositions de  $a$  comme produit d'éléments de  $X$  ont une borne supérieure finie.

Un monoïde est dit *atomique* s'il satisfait les conditions équivalentes du lemme 3.4. Un *atome* est un élément non-trivial  $a$  tel que  $a = bc$  implique soit  $b = 1$  soit  $c = 1$ . La fonction *norme*  $\|\cdot\|$  d'un monoïde atomique  $M$  est définie de sorte que, pour tout élément  $a$  de  $M$ ,  $\|a\|$  est la borne supérieure des longueurs des décompositions de  $a$  comme produit d'atomes.

EXEMPLE 3.5

Le monoïde

$$M_{\kappa} = \langle x, y : xyxyx = yy \rangle_+^1$$

est un exemple de monoïde de Garside qui n'admet aucune norme additive, *i.e.*, aucune norme  $\nu$  vérifiant  $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$  pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments de  $M_{\kappa}$ . Son groupe de fractions est également celui du monoïde de Garside  $\langle y, z : y^3 = z^3 \rangle_+^1$ , qui lui admet une norme additive.

Par le lemme 3.4, tout élément d'un monoïde de Garside admet un nombre fini de diviseurs, mais alors, pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments, les diviseurs à gauche communs de  $a$  et  $b$  admettent un ppcm à droite, qui par conséquent est l'unique pgcd à gauche  $a \wedge b$  de  $a$  et  $b$ .

LEMME 3.6 ([64])

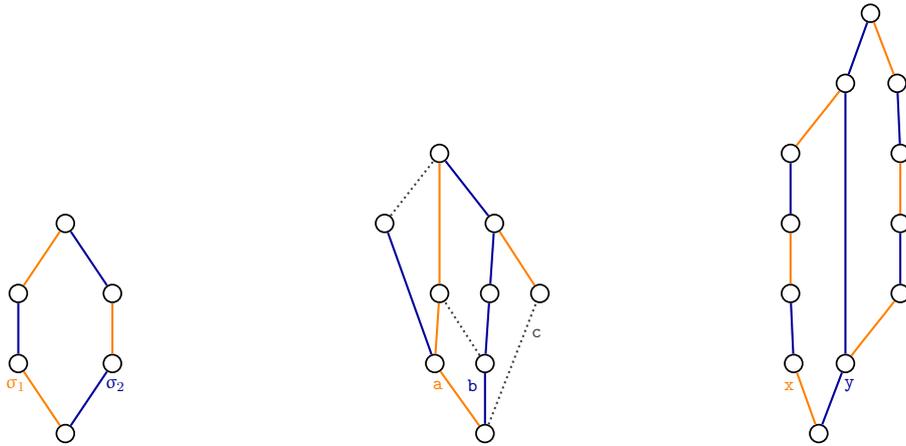
Tout monoïde de Garside admet un ensemble générateur fini clos par les opérations  $\setminus$ ,  $\vee$  et  $\wedge$  (et par les opérations symétriques  $/$ ,  $\tilde{\wedge}$  et  $\tilde{\vee}$ ).

Si  $M$  est un monoïde de Garside, la clôture  $S$  de l'ensemble de ses atomes par  $\setminus$  et  $\vee$  est finie—ses éléments sont appelés *éléments simples*, et leur ppcm à droite est l'élément de Garside (minimal) noté  $\Delta$ . Le treillis fini  $(S, \wedge, \vee, 1, \Delta)$  synthétise véritablement la structure de  $M$  toute entière. L'ensemble des éléments de Garside de  $M$  est  $\Delta^+ = \{\Delta^p : p > 0\}$  (voir [3]) et nous notons  $\Delta^{\frac{p}{q}}$  l'ensemble des racines  $q$ -ièmes de l'élément  $\Delta^p$ . Pour toute racine  $h$  d'un élément de Garside,  $(\delta(h), \epsilon(h))$  désigne la paire  $(p, q)$  lexicographiquement minimale vérifiant  $h \in \Delta^{\frac{ep}{q}}$ , où  $\epsilon(h)$  est appelé l'*exposant* de  $h$  et où  $e$  est le plus petit entier pour lequel  $\Delta^e$  est central, soit  $e = \epsilon(\Delta)$ .

EXEMPLE 3.7

Les (diagrammes de Hasse des) treillis des éléments simples pour  $\mathbf{B}^+(A_2)$  de l'exemple 3.1, pour  $M_{\chi}$  de l'exemple 3.2 et pour  $M_{\kappa}$  de l'exemple 3.5 sont représentés sur les figures 3.1(a), 3.1(b) et 3.1(c). D'autres sont représentés sur les figures 4.2, 4.3 et 4.6. Les exemples 4.3 et 4.10 explicitent par ailleurs de petits ensembles  $\Delta^{\frac{p}{q}}$  pour  $M_{\chi}$  et pour  $M_{\kappa}$ .

Nous verrons dans le chapitre 5 que le treillis des simples de tout monoïde de Garside lui fournit à la fois une structure automatique (qui s'étend à son groupe de fractions [71]) et une structure autosimilaire, autrement dit, en fait un monoïde automatique *et* un monoïde d'automate.



(a) Le treillis des 6 simples de  $\mathbf{B}^+(A_2)$ . (b) Le treillis des 9 simples de  $M_X$ . (c) Le treillis des 12 simples de  $M_{\kappa}$ .

FIGURE 3.1 – Trois exemples de treillis des simples (des monoïdes des exemples 3.1, 3.2 et 3.5).

### Longueur, ordre associé et monoïde-germe

Nous présentons une procédure permettant de construire des monoïdes de tresses et/ou des monoïdes de Garside comme monoïdes-germes de groupes de réflexion complexes bien engendrés.

Commençons par adopter une approche générale et considérons un groupe fini  $G$  engendré comme un monoïde par un ensemble  $X$ . On note alors  $\ell_X(g)$  la longueur d'un élément  $g$  de  $G$  relativement à l'alphabet  $X$  :

$$\ell_X(g) = \min\{p \in \mathbb{N} : \exists(x_1, \dots, x_p) \in X^p, g = x_1 \cdots x_p\}.$$

Pour  $g = x_1 \cdots x_p$  avec  $p = \ell_X(g)$ , on dit que  $(x_1, \dots, x_p)$  est une *décomposition  $X$ -réduite* de  $g$ . On définit ensuite un ordre partiel  $\preceq_X$  sur  $G$ , en disant que  $g$   $X$ -*divise*  $h$  si et seulement si  $g$  peut apparaître comme préfixe d'une décomposition  $X$ -réduite de  $h$  :

$$g \preceq_X h \text{ si et seulement si } \ell_X(g) + \ell_X(g^{-1}h) = \ell_X(h).$$

Nous suggérons la procédure générale suivante :

#### PROCÉDURE 3.8

- Partir d'un groupe fini  $G$ .
- Choisir  $X$  engendrant  $G$  comme un monoïde.
- Construire le poset  $(G, \preceq_X)$  associé.
- Prendre un élément maximal  $d$  dominant  $X$ .
- Extraire la présentation (de monoïde)  $(X : R_d)$ .
- Vérifier si :

[germ]  $\langle X : R_d \cup x^{\text{ord}(x)} \rangle$  est isomorphe à  $G$  ;

[Garside]  $\langle X : R_d \rangle_+^1$  est un monoïde de Garside ;

[braid]  $\langle X : R_d \rangle$  est isomorphe à  $\mathbf{B}(G)$  (si défini).

Considérée en toute généralité, cette procédure 3.8 n'aurait vraisemblablement qu'assez peu d'intérêt. Lorsqu'on se restreint aux groupes de Coxeter finis ou même à certains groupes de réflexion complexes de type  $W$ , choisir  $X$  comme l'ensemble des réflexions simples nous permet de reconstruire les monoïdes de tresses classiques  $\mathbf{B}^+(W)$ , alors que choisir  $X$  comme l'ensemble de toutes les réflexions permet de reconstruire les monoïdes de tresses duaux  $\mathbf{B}^\times(W)$ .

La terminologie *duale* dans le contexte des monoïdes de Garside pour les groupes de tresses associés aux groupes de réflexion réels trouve une justification dans les données numériques rassemblées dans la table 3.9. Nous pouvons simplement préciser que chacune des présentations construites dans [33] correspond à un degré régulier  $d$ , et que le produit des générateurs élevé à la puissance  $d$ —qui est l'ordre de l'image de ce produit dans le groupe de réflexion—est toujours central (voir aussi [34, 35, 37]).

TABLE 3.9

	$\mathbf{B}^+(W)$	$\mathbf{B}^\times(W)$
Produit des atomes	$\mathbf{c}$	$\mathbf{w}_0$
$\Delta$	$\mathbf{w}_0$	$\mathbf{c}$
Nombre d'atomes	$n$	$N$
Longueur de $\Delta$	$N$	$n$
Ordre de $a \mapsto a^\Delta$	2	$h$
Degré régulier	$h$	2

### Polynômes de Poincaré vs polynômes Zeta

Étant donné un monoïde de Garside  $M$ , nous notons  $P_M$  son *polynôme de Poincaré* défini par  $P_M(q) = \sum a_n q^n$  avec  $a_n$  le nombre d'éléments à hauteur  $n$  dans le treillis des simples de  $M$ . Le nombre total de simples de  $M$  est ainsi donné par  $P_M(1)$ .

Pour un monoïde de tresses classique associé à un groupe de Coxeter fini  $\mathbf{G}(T)$  (par exemple  $\mathbf{B}^+(A_n)$ ,  $\mathbf{B}^+(B_n)$ ,  $\mathbf{B}^+(D_n)$ , etc), ce polynôme coïncide avec le polynôme de Poincaré de  $\mathbf{G}(T)$ , où  $a_n$  est le nombre d'éléments de longueur  $n$  respectivement à l'ensemble des réflexions simples. Dans ce cas, on a le résultat de *belle factorisation* dû à L. SOLOMON (voir [86] par exemple) :

$$P_{\mathbf{B}^+(T)}(q) = \prod_{k=1}^r (1 + q + \cdots + q^{d_k-1}), \quad (3.1)$$

où  $d_1 \leq \cdots \leq d_r$  sont les degrés invariants de  $\mathbf{G}(T)$ .

Étant donné un monoïde de Garside  $M$ , nous notons  $Z_M$  son *polynôme Zeta* défini en requérant que  $Z_M(q)$  soit le nombre de multichaînes  $a_1 \preceq \cdots \preceq a_{q-1}$  (de longueur  $q-1$  donc) dans le treillis des simples de  $M$  (voir [121, Section 3] pour le cadre général d'un ensemble partiellement ordonné). Le nombre total de simples de  $M$  est ainsi donné par  $Z_M(2)$ .

Dés que le groupe de réflexion complexe  $\mathbf{G}(T)$  est *bien engendré* (ce qui est le cas pour  $\mathbf{G}(e, e, r)$ ), le polynôme Zeta de son monoïde de tresses dual admet une *belle factorisation* :

$$Z_{\mathbf{B}^\times(T)}(q) = \prod_{k=1}^r \frac{d_k + d_r(q-1)}{d_k},$$

où  $d_1 \leq \cdots \leq d_r$  sont les degrés invariants de  $\mathbf{G}(T)$  (voir [27, 35, 36, 52, 113]).

### 3.2 Monoïdes dual et (post)classique

Pour une présentation (de monoïde) et des mots  $w_1, \dots, w_p$  en les générateurs, sur le modèle de la notation *commutateur*  $[w_1, w_2]$ , l'écriture concise  $[w_1, \dots, w_p]$  désigne la famille des relations de quasi-commutation  $w_1 w_2 = w_2 w_3 = \dots = w_{p-1} w_p = w_p w_1$ .

#### THÉORÈME 3.10 ([38])

Le sous-monoïde de  $\mathbf{B}(A_{n-1})$  engendré par  $a_{ts} = (\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1}) \sigma_s (\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})^{-1}$  pour  $n \geq t > s \geq 1$  (où les  $\sigma_i$  sont les générateurs du monoïde de tresses classique  $\mathbf{B}^+(A_{n-1})$ ) admet la présentation

$$\langle a_{ts} : [a_{ts}, a_{sr}, a_{tr}] \text{ pour } t > s > r, \quad (3.2) \\ [a_{ts}, a_{rq}] \text{ pour } (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0 \rangle_+^1.$$

C'est un monoïde de Garside, désigné comme le *monoïde de tresses dual*  $\mathbf{B}^\times(A_{n-1})$ , dont le nombre de simples est le  $n$ -ième nombre de Catalan (voir la table 3.14).

#### THÉORÈME 3.11 ([63, 1])

Le sous-monoïde de  $\mathbf{B}(I_2(m))$  engendré par  $\sigma_1$  et  $\sigma_i = \overbrace{(\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \cdots)}^{(i-1) \text{ termes}} \overbrace{(\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \cdots)}^{(i-2) \text{ termes}}^{-1}$  pour  $2 \leq i \leq m$  (avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les générateurs du monoïde de tresses classique  $\mathbf{B}^+(I_2(m))$ ) admet la présentation  $\langle \sigma_i : [\sigma_m, \dots, \sigma_1] \rangle_+^1$ . C'est un monoïde de Garside, désigné comme le *monoïde de tresses dual*  $\mathbf{B}^\times(I_2(m))$ .

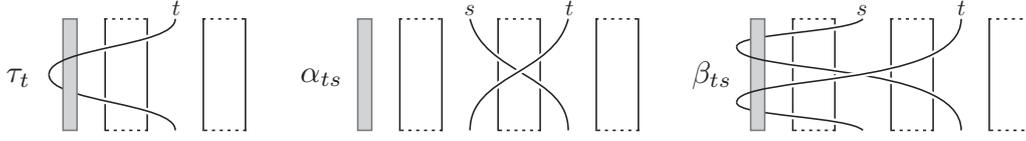
Nous établissons des analogues des théorèmes 3.10 et 3.11 pour le type  $B$ , puis pour le type  $D$ . Le monoïde classique  $\mathbf{B}^+(B_n)$  pour le groupe de tresses  $\mathbf{B}(B_n)$  admet la présentation

$$\langle \tau_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, 1 < i+1 < j < n, \tau_1 \sigma_j = \sigma_j \tau_1, 1 < j < n \rangle_+^1. \quad (3.3)$$

Nous utilisons le fait que  $\mathbf{B}(B_n)$  peut être envisagé comme le sous-groupe de  $\mathbf{B}(A_n)$  de ces tresses dont le premier brin n'est pas tressé. Introduisons alors les  $n^2$  nouveaux générateurs duaux :

$$\alpha_{ts} = (\sigma_{t-1} \sigma_{t-2} \cdots \sigma_{s+1}) \sigma_s (\sigma_{t-1} \sigma_{t-2} \cdots \sigma_{s+1})^{-1} \text{ pour } n \geq t > s \geq 1, \\ \tau_1 \text{ et } \tau_t = \alpha_{t1} \tau_1 \alpha_{t1}^{-1} \text{ pour } n \geq t > 1, \quad (3.4) \\ \beta_{ts} = \tau_s^{-1} \alpha_{ts} \tau_s \text{ pour } n \geq t > s \geq 1.$$

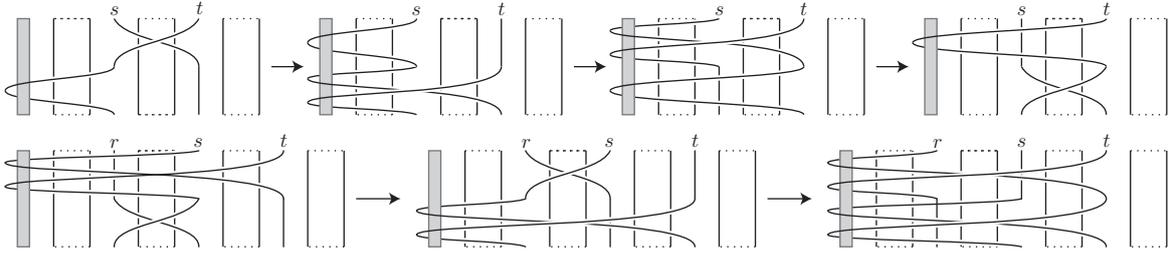
Des diagrammes de tresses pour les générateurs duaux sont représentés sur la figure 3.2. Sur ce dessin comme sur les suivants, le tube grisé peut désigner le *brin non-tressé* et, par ailleurs, un ruban indique un certain nombre de brins évoluant en parallèle, ce qui rend les diagrammes plus faciles à lire.


 FIGURE 3.2 – Diagrammes de tresse pour les nouveaux générateurs de type  $B$ .

**THÉORÈME 3.12 ([4])**

Le monoïde de tresses dual  $\mathbf{B}^\times(B_n)$  admet la présentation

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_{ts}, \beta_{ts}, \tau_t : & [\alpha_{ts}, \tau_s, \beta_{ts}, \tau_t] \text{ pour } t > s, \\
 & [\alpha_{ts}, \alpha_{sr}, \alpha_{tr}], [\beta_{ts}, \alpha_{sr}, \beta_{tr}], [\alpha_{ts}, \beta_{sr}, \beta_{tr}] \text{ pour } t > s > r, \\
 & [\alpha_{ts}, \tau_r], [\tau_t, \alpha_{sr}], [\beta_{tr}, \tau_s] \text{ pour } t > s > r, \\
 & [\alpha_{ts}, \alpha_{rq}], [\alpha_{ts}, \beta_{rq}], [\beta_{ts}, \alpha_{rq}], \\
 & [\alpha_{tq}, \alpha_{sr}], [\beta_{tq}, \alpha_{sr}], [\beta_{tq}, \beta_{sr}] \text{ pour } t > s > r > q \rangle_+^1.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$


 FIGURE 3.3 – Exemples d'isotopies pour les tresses de type  $B$ , qui correspondent respectivement aux relations  $[\alpha_{ts}, \tau_s, \beta_{ts}, \tau_t]$  et  $[\beta_{ts}, \alpha_{sr}, \beta_{tr}]$  du théorème 3.12.

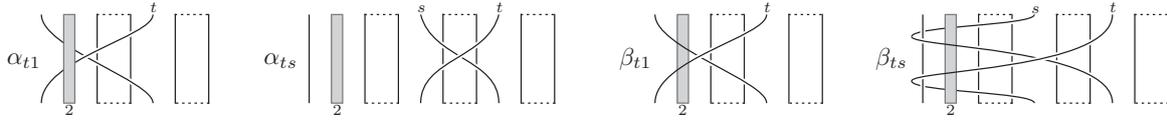
Le monoïde classique  $\mathbf{B}^+(D_n)$  pour le groupe de tresses  $\mathbf{B}(D_n)$  admet la présentation

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : & \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1, \sigma_2 \tau_1 \sigma_2 = \tau_1 \sigma_2 \tau_1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2 \\
 & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, 1 < i+1 < j < n, \tau_1 \sigma_j = \sigma_j \tau_1, 2 < j < n \rangle_+^1.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous introduisons alors les  $n(n-1)$  nouveaux générateurs duaux :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ts} &= (\sigma_{t-1} \sigma_{t-2} \cdots \sigma_{s+1}) \sigma_s (\sigma_{t-1} \sigma_{t-2} \cdots \sigma_{s+1})^{-1} \text{ pour } n \geq t > s \geq 1, \\
 \beta_{t1} &= (\sigma_{t-1} \sigma_{t-2} \cdots \sigma_2) \tau_1 (\sigma_{t-1} \sigma_{t-2} \cdots \sigma_2)^{-1} \text{ pour } n \geq t > 1, \\
 \beta_{ts} &= \alpha_{s1}^{-1} \beta_{t1} \alpha_{s1} \text{ pour } n \geq t > s > 1.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

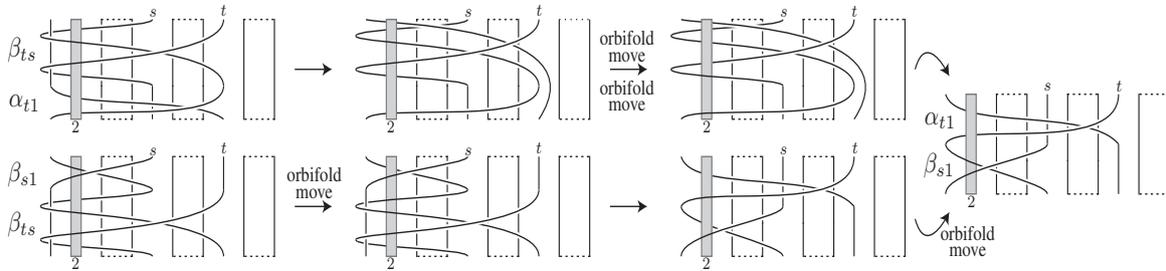
Dans les diagrammes de tresses de type  $D$  des figures 3.4 et 3.5, nous utilisons le principe introduit par D. ALLCOCK dans [26], où le tube devient d'ordre 2 : le mouvement *orbifold* consiste à inverser le sens dans lequel un brin enroule le tube.


 FIGURE 3.4 – Diagrammes de tresse pour les nouveaux générateurs de type  $D$ .

**THÉORÈME 3.13 ([4])**

Le monoïde de tresses dual  $\mathbf{B}^\times(D_n)$  admet la présentation

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_{ts}, \beta_{ts} : & [\alpha_{ts}, \alpha_{sr}, \alpha_{tr}], [\alpha_{ts}, \beta_{sr}, \beta_{tr}] \text{ pour } t > s > r, \\
 & [\beta_{ts}, \alpha_{sr}, \beta_{tr}], [\beta_{tr}, \alpha_{s1}], [\beta_{tr}, \beta_{s1}] \text{ pour } t > s > r > 1, \\
 & [\beta_{ts}, \beta_{t1}, \alpha_{s1}], [\beta_{ts}, \alpha_{t1}, \beta_{s1}] \text{ pour } t > s > 1, \\
 & [\alpha_{ts}, \alpha_{rq}], [\alpha_{ts}, \beta_{rq}], [\alpha_{tq}, \alpha_{sr}], [\beta_{tq}, \alpha_{sr}] \text{ pour } t > s > r > q, \\
 & [\beta_{ts}, \alpha_{rq}], [\beta_{tq}, \beta_{sr}] \text{ pour } t > s > r > q > 1, \\
 & [\alpha_{t1}, \beta_{t1}] \text{ pour } t > 1 \rangle_+^1.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$


 FIGURE 3.5 – Exemples d'isotopies pour les tresses de type  $D$ , qui correspondent ici aux relations  $[\beta_{ts}, \alpha_{t1}, \beta_{s1}]$  pour  $t > s > 1$ .

J. BIRMAN, K. H. KO et S. J. LEE ont montré dans [38] que les éléments simples du monoïde de tresses dual  $\mathbf{B}^\times(A_{n-1})$  sont en correspondance bijective avec les partitions non-croisées de l'entier  $n$  (voir aussi [37]). Une approche analogue permet de montrer que les éléments simples des monoïdes  $\mathbf{B}^\times(B_n)$  et de  $\mathbf{B}^\times(D_n)$  sont en correspondance bijective avec les partitions non-croisées définies par V. REINER dans [113]. La table 3.14 donne le nombre d'éléments simples pour les monoïdes de tresses classiques et duaux, rassemblant les résultats théoriques pour les types  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $I_2$  et les résultats de calculs au cas par cas avec le package CHEVIE [75] pour les types finis exceptionnels (le calcul pour  $E_8$  apparaissait déjà dans [34]).

TABLE 3.14 ([34, 4])

type	$A_n$	$B_n$	$D_n$	$H_3$	$F_4$	$H_4$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$I_2(m)$
classique	$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1} n!$	120	1152	14400	51840	2903040	696729600	$2m$
dual	$\frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$	$\binom{2n}{n}$	$\binom{2n}{n} - \binom{2n-2}{n-1}$	32	105	280	833	4160	25080	$m+2$

### Le type imprimitif $(e, e, r)$

Fruit d'une collaboration avec R. CORRAN, nous décrivons une présentation et proposons un diagramme pour les groupes de réflexion complexes de type imprimitif  $(e, e, r)$  et leurs groupes de tresses. Nous révélons ainsi une nouvelle structure de Garside et étudions sa combinatoire fine, qui nous conduit à la désigner comme *postclassique* [8]. Elle présente en effet une certaine dualité avec le monoïde dual proposé plus tôt par D. BESSIS et R. CORRAN [36]. Cette structure postclassique a depuis été utilisée à plusieurs reprises : pour comprendre les éléments périodiques [97], présenter le sous-groupe commutateur [110], déterminer le centre du groupe de tresses pures [68] ou calculer l'homologie [49].

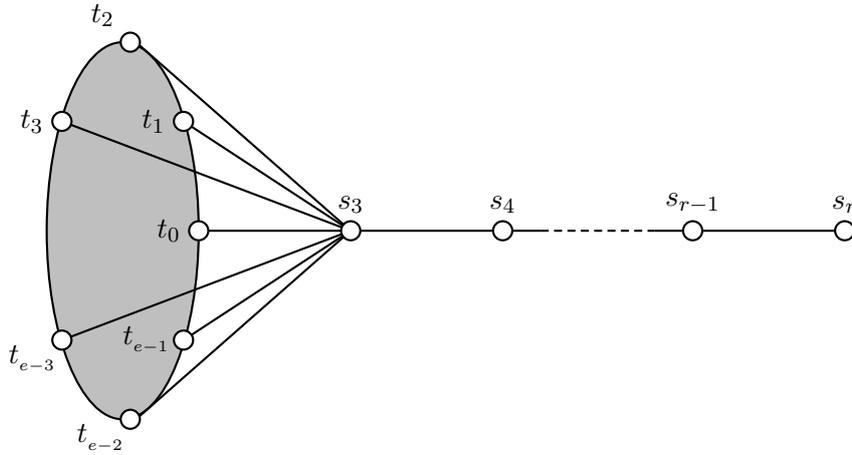
THÉORÈME 3.15 ([8])

Le sous-monoïde de  $\mathbf{B}(e, e, r)$  engendré par  $t_0, t_1, \dots, t_{e-1}, s_3, \dots, s_r$  avec  $t_i = t_{i-1}t_{i-2}t_{i-1}^{-1}$  pour  $2 \leq i \leq e-1$  (avec  $\{t_1, t_2, s_3, \dots, s_r\}$  l'ensemble générateur classique [41]) admet la présentation (correspondant au diagramme de la figure 3.6)

$$\begin{aligned}
 \langle t_i, s_j : & s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \text{ pour } |i-j| = 1, \\
 & s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } |i-j| > 1, \\
 & s_3 t_i s_3 = t_i s_3 t_i \text{ pour } 0 \leq i < e, \\
 & s_j t_i = t_i s_j \text{ pour } 0 \leq i < e \text{ et } 4 \leq j \leq r, \\
 & t_i t_{i-1} = t_j t_{j-1} \text{ pour } 0 < i, j < e \rangle_+^1.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

C'est un monoïde de Garside, désigné comme le *monoïde de tresses postclassique*  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$ . En outre, ajouter une relation  $a^2 = 1$  pour chaque générateur  $a$  fournit une présentation du groupe de réflexions complexe  $\mathbf{G}(e, e, r)$ . En particulier, les générateurs de cette présentation sont tous des réflexions.

Dans le diagramme de la figure 3.6, comme dans les diagrammes de Dynkin classiques, une arête simple (*resp.* une absence d'arête) entre deux sommets  $x$  et  $y$  correspond toujours à la relation de tresses  $xyx = yxy$  (*resp.* à la commutation  $xy = yx$ ). Le cercle passant par les sommets  $t_i$  correspond à la famille de relations  $[t_e, t_{e-1}, \dots, t_1, t_0, t_e]$ , où la notation commutateur est celle utilisée précédemment pour décrire les monoïdes de tresses duaux.


 FIGURE 3.6 – Le diagramme correspondant au monoïde postclassique  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$ .

**THÉORÈME 3.16 ([8])**

L'élément de Garside minimal de  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$  est  $\Lambda = \Lambda_2 \Lambda_3 \cdots \Lambda_r$  avec  $\Lambda_k = s_k \cdots s_3 (t_1 t_0) s_3 \cdots s_k$  pour  $2 \leq k \leq r$ . Ses simples sont précisément les éléments de la forme  $p_2 \cdots p_r$  avec  $p_k$  diviseur de  $\Lambda_k$  pour  $2 \leq k \leq r$ . Son polynôme de Poincaré est

$$P_{\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)}(q) = \prod_{k=1}^r (1 + q + \cdots + q^{k-2} + eq^{k-1} + q^k + \cdots + q^{2k-2}).$$

**COROLLAIRE 3.17 ([8])**

Le nombre de simples de  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$  est  $P_{(e, e, r)}^\oplus(1) = \prod_{k=2}^r (2(k-1) + e) = \frac{(2(r-1)+e)!!}{e!!}$ , où la notation  $n!!$  représente le produit  $n(n-2) \cdots 4 \cdot 2$  pour  $n$  pair et le produit  $n(n-2) \cdots 5 \cdot 3$  pour  $n$  impair (voir [120, séquences A000165 et A001147]).

**EXEMPLE 3.18**

La figure 3.7 montre le treillis des  $7!!/3!! = 35$  simples de  $\mathbf{B}^\oplus(3, 3, 3)$ . Nous trouvons :

$$\begin{aligned} P_{(3,3,3)}^\oplus(q) &= 1 + 4q + 7q^2 + 11q^3 + 7q^4 + 4q^5 + q^6 \\ &= (1 + 3q + q^2)(1 + q + 3q^2 + q^3 + q^4). \end{aligned}$$

Le polynôme  $P_{\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)}(q)$  ne vérifie pas la formule générale (3.1) de Chevalley-Solomon, excepté pour les cas  $e = 2$  ou  $r = 2$ . Cependant, la similarité de la belle factorisation de son polynôme

de Poincaré avec celles données en (3.10), (3.11) et (3.12) suggère de décrire  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$  comme un monoïde de tresses *postclassique*.

$$P_{\mathbf{B}^+(A_n)}(q) = \prod_{k=1}^n (1 + q + \dots + q^k), \quad (3.10)$$

$$P_{\mathbf{B}^+(B_n)}(q) = \prod_{k=1}^n (1 + q + \dots + q^{2k-1}), \quad (3.11)$$

$$P_{\mathbf{B}^+(D_n)}(q) = (1 + q + \dots + q^{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + q + \dots + q^{2k-1}). \quad (3.12)$$

Comparable à celle entre les monoïdes classiques et duaux des groupes de tresses des groupes de réflexion réels, une certaine dualité peut être observée entre les monoïdes de tresses  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$  et  $\mathbf{B}^\times(e, e, r)$ . Ainsi, dans l'esprit de la table 3.9, nous proposons la table 3.19 dont les données témoignent de cette dualité certaine.

TABLE 3.19 ([8])

	$\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$	$\mathbf{B}^\times(e, e, r)$
Nombre d'atomes	$e + r - 2$	$(e + r - 2)(r - 1)$
Longueur de $\Delta$	$r(r - 1)$	$r$
Ordre de $a \mapsto a^\Delta$	$\frac{e}{e \wedge r}$	$\frac{e(r - 1)}{e \wedge r}$

Le monoïde  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$  peut donc être considéré comme une sorte de *dual* au monoïde de tresses dual  $\mathbf{B}^\times(e, e, r)$ . Ce dernier s'inscrit dans le cadre général des monoïdes de tresses duaux proposé dans [34], même s'il ne satisfait que quelques-unes des propriétés numériques de la table 3.9. Très récemment, G. NEAIME a démontré que  $\mathbf{B}^\oplus(e, e, r)$  est bien un monoïde-germe [107].

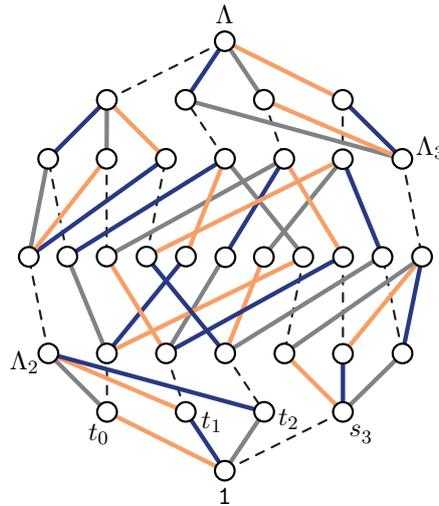


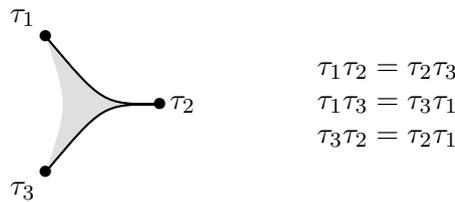
FIGURE 3.7 – Le treillis des simples de  $\mathbf{B}^\oplus(3, 3, 3)$ , voir l'exemple 3.18.

### 3.3 Triple dualité pour le groupe hyperoctaédral

Nous décrivons quatre nouveaux monoïdes-germes de Garside pour chaque groupe hyperoctaédral  $\mathbf{G}(B_n)$ , qui révèlent une certaine malléabilité [11]. Ceci contraste fortement avec les autres séries infinies  $\mathbf{G}(A_n)$ ,  $\mathbf{G}(D_n)$  ou  $\mathbf{G}(e, e, r)$ , pour lesquelles aucun phénomène de cette nature n'apparaît. Notons seulement que certains groupes de réflexion complexes  $\mathbf{G}(de, e, 2)$  avec  $d > 1$  et  $e > 1$  admettent des structures multiples comparables [11].

Une recherche systématique selon la procédure 3.8 permet de détecter exactement six monoïdes-germes de Garside pour chaque groupe  $\mathbf{G}(B_n)$ , parmi lesquels on retrouve les monoïdes de tresses classiques et duaux. Pour  $n = 2$ , les quatre nouveaux n'en sont en réalité qu'un seul.

Nous proposons un diagramme pour chaque nouveau monoïde. Mais on observe que chacun montre au moins une occurrence de ce que nous appelons une *fausse relation de tresses*,



ce qui constitue une obstruction au fait que ces nouveaux monoïdes (à la fois monoïdes-germes et monoïdes de Garside) soient des monoïdes de tresses pour  $\mathbf{B}(B_n)$  : le sous-monoïde de

$$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_2 : \tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_3, \tau_1 \tau_3 = \tau_3 \tau_1, \tau_3 \tau_2 = \tau_2 \tau_1 \rangle_+^1$$

engendré par  $\{\tau_1, \tau_2\}$  est le monoïde infiniment présenté  $\langle \tau_1, \tau_2 : \tau_1 \tau_2 \tau_1^k \tau_2 = \tau_2 \tau_1^k \tau_2 \tau_1, k \in \mathbb{Z} \rangle_+^1$  (voir [3] par exemple). Nous soulignons le fait que les diagrammes fournissent néanmoins de nouveaux diagrammes pour le groupe hyperoctaédral  $\mathbf{G}(B_n)$  lui-même.

La table 3.20 permet pour les premières valeurs du rang  $n$  de situer les nouveaux monoïdes comme des avatars intermédiaires entre les monoïdes de tresses classique et dual associés au groupe hyperoctaédral  $\mathbf{G}(B_n)$  (signalés en gras). Les nombres possibles d'atomes apparaissent sur fond coloré, en-dessous de chacun figure le nombre de simples de l'unique monoïde-germe de Garside correspondant.

TABLE 3.20

<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>							
8	8	6							
<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>				
48	48	48	40	28	20				
<b>4</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>16</b>				
384	384	384	224	100	70				
<b>5</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>15</b>	<b>21</b>	<b>25</b>				
3840	3840	3840	1344	364	252				

### Le monoïde de tresses classique $B^+(B_r)$

- nombre d'atomes :  $r$
- nombre de simples :  $2^r r!$
- longueur du delta :  $r^2$
- polynôme de Poincaré :

$$\prod_{k=1}^r (1 + q + \dots + q^{2k-1})$$

- diagramme :

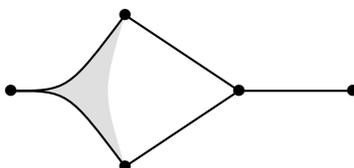


### Le monoïde

- nombre d'atomes :  $r + 1$
- nombre de simples :  $2^r r!$
- longueur du delta :  $r^2 - r + 1$
- polynôme de Poincaré :

$$(1 + q)(1 + q + \dots + q^{r-1}) \prod_{k=1}^{r-1} (1 + q + \dots + q^{2k-1})$$

- diagramme :

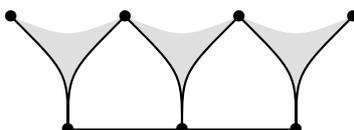


### Le monoïde

- nombre d'atomes :  $2r - 1$
- nombre de simples :  $2^r r!$
- longueur du delta :  $\frac{r(r+1)}{2}$
- polynôme de Poincaré :

$$(1 + q^2)(1 + q)^{r+2} \prod_{k=2}^{r-2} (1 + q + \dots + q^{2k-2})$$

- diagramme :

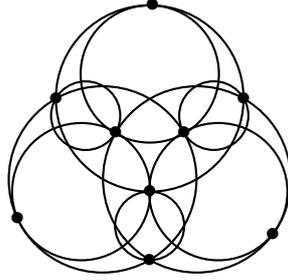


**Le monoïde de tresses dual  $B^\times(B_r)$**

- nombre d'atomes :  $r^2$
- nombre de simples :  $\binom{2r}{r}$
- longueur du delta :  $r$
- polynôme Zeta :

$$\prod_{k=1}^r \frac{k + r(q-1)}{k} = \binom{qr}{r}$$

- diagramme :

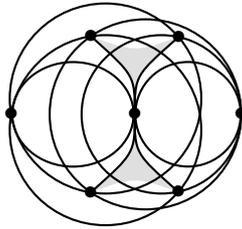


**Le monoïde**

- nombre d'atomes :  $r^2 - r + 1$
- nombre de simples :  $\frac{3r-2}{2r-1} \binom{2r}{r}$
- longueur du delta :  $r + 1$
- polynôme Zeta :

$$\frac{(q-1)((2q-1)r - (2q-2))}{qr - (q-1)} \binom{qr}{r} \prod_{k=1}^{q-2} \frac{k - r(q-1)}{k - qr}$$

- diagramme :

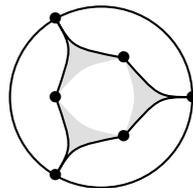


**Le monoïde**

- nombre d'atomes :  $\frac{r(r+1)}{2}$
- nombre de simples :  $\frac{2^r}{r+1} \binom{2r}{r}$
- longueur du delta :  $2r - 1$
- polynôme Zeta :

$$q^r \prod_{k=2}^r \frac{k + r(q-1)}{k} = \frac{q^r}{r(q-1) + 1} \binom{qr}{r}$$

- diagramme :



Il est intéressant de comparer les caractéristiques de ces six monoïdes. Nous observons que les trois monoïdes de la page 56 partagent le même nombre de simples et ont des polynômes de Poincaré admettant de belles factorisations : nous proposons de les associer sous la bannière *classique*. Les trois monoïdes de la page 57 ont eux des polynômes Zeta admettant de belles factorisations (même si leurs formes intriguent) : nous proposons de les associer sous la bannière *duale*. De plus, nous remarquons que les correspondances entre certaines données combinatoires (nombre d'atomes *vs* longueur de l'élément de Garside, etc) qui pouvaient témoigner d'une dualité entre  $\mathbf{B}^+(B_n)$  et  $\mathbf{B}^\times(B_n)$ , se reproduisent pour les deux autres couples de monoïdes. Ceci nous amène à parler de *triple dualité* pour le groupe hyperoctaédral  $\mathbf{G}(B_n)$  [11].

Parallèlement à cette triple dualité révélée grâce à la notion de germe, nous montrons également que  $\mathbf{B}(B_n)$  se distingue encore davantage par le fait qu'il admet (au moins) un monoïde de tresses  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  pour  $n > 1$ , qui est bien un monoïde de Garside mais n'est pas un monoïde-germe. Rétrospectivement, on remarque que le système générateur avait été considéré auparavant par W.-L. CHOW dans [54].

THÉORÈME 3.21 ([10])

Pour  $n > 1$ , le groupe de tresses hyperoctaédral  $\mathbf{B}(B_n)$  est le groupe de fractions de son sous-monoïde  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  engendré par  $\tau_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  et  $\tau_t = \sigma_{t-1} \cdots \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{t-1}^{-1}$  pour  $1 < t \leq n$ . Il s'agit d'un monoïde de Garside admettant la présentation :

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_n : \begin{aligned} &\sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j \quad \text{pour } k > j + 1, \\ &\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}, \\ &\sigma_j \tau_j \tau_{j+1} = \tau_j \tau_{j+1} \sigma_j, \\ &\sigma_j \tau_j = \tau_{j+1} \sigma_j, \\ &\sigma_j \tau_k = \tau_k \sigma_j \quad \text{pour } k \neq j, j + 1 \end{aligned} \rangle_+^1.$$

La combinatoire de ce nouveau monoïde de Garside  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  se révèle être riche, son étude faisant par exemple intervenir des congruences de descentes de Solomon généralisées.

PROPOSITION 3.22 ([10])

Un élément  $a$  de  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  est simple si et seulement s'il admet une décomposition  $a = r\bar{t}s$  avec  $r, s$  des éléments simples de  $\mathbf{B}^+(A_{n-1})$  et  $t$  un sous-mot de  $\tau_1 \cdots \tau_n$ .

COROLLAIRE 3.23 ([10])

Le nombre de simples dans  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  est majoré par  $n!^2 2^n$  (c'est-à-dire 2, 16, 288, 9 216, 460 800, 33 177 600, etc).

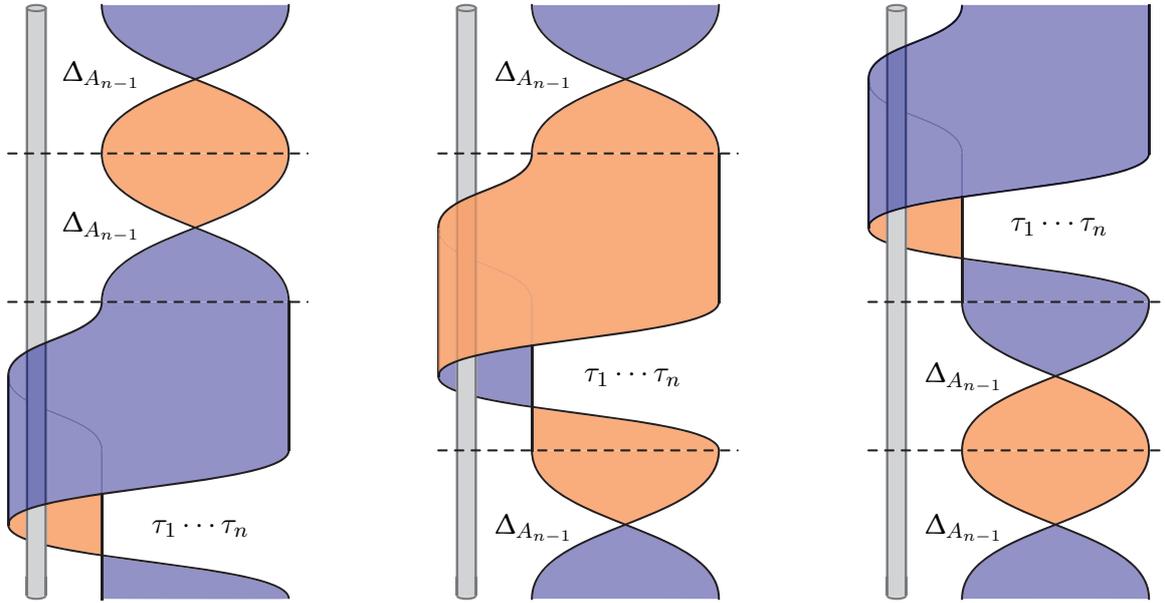


FIGURE 3.8 – Trois décompositions distinguées de l'élément de Garside de  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  en fonction de celui de  $\mathbf{B}^+(A_{n-1})$  et de l'élément  $\tau_1 \cdots \tau_n$ .

QUESTION 3.24

Le nombre de simples dans  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  est 2, 13, 184, 4 607, 180 106, 10 138 107 pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Quel est-il pour  $n$  quelconque ?

Alors que l'on comprend aisément pourquoi ce monoïde de tresses  $\mathbf{B}^\square(B_n)$  ne peut être un monoïde-germe pour  $\mathbf{G}(B_n)$ , nous faisons remarquer que cela n'exclut pas qu'il puisse l'être exceptionnellement pour un autre groupe plus gros. Ainsi, nous obtenons que  $\mathbf{B}^\square(B_3)$  est bien un monoïde-germe pour le groupe exceptionnel

$$\mathbf{G}_{26} = \langle \tau_1, \sigma_1, \sigma_2 : \tau_1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1 = \sigma_1 \tau_1 \sigma_1 \tau_1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \tau_1 \sigma_2 = \tau_1 \sigma_2, \tau_1^2 = \sigma_1^3 = \sigma_2^3 = 1 \rangle$$

d'ordre  $1296 > 48$ .

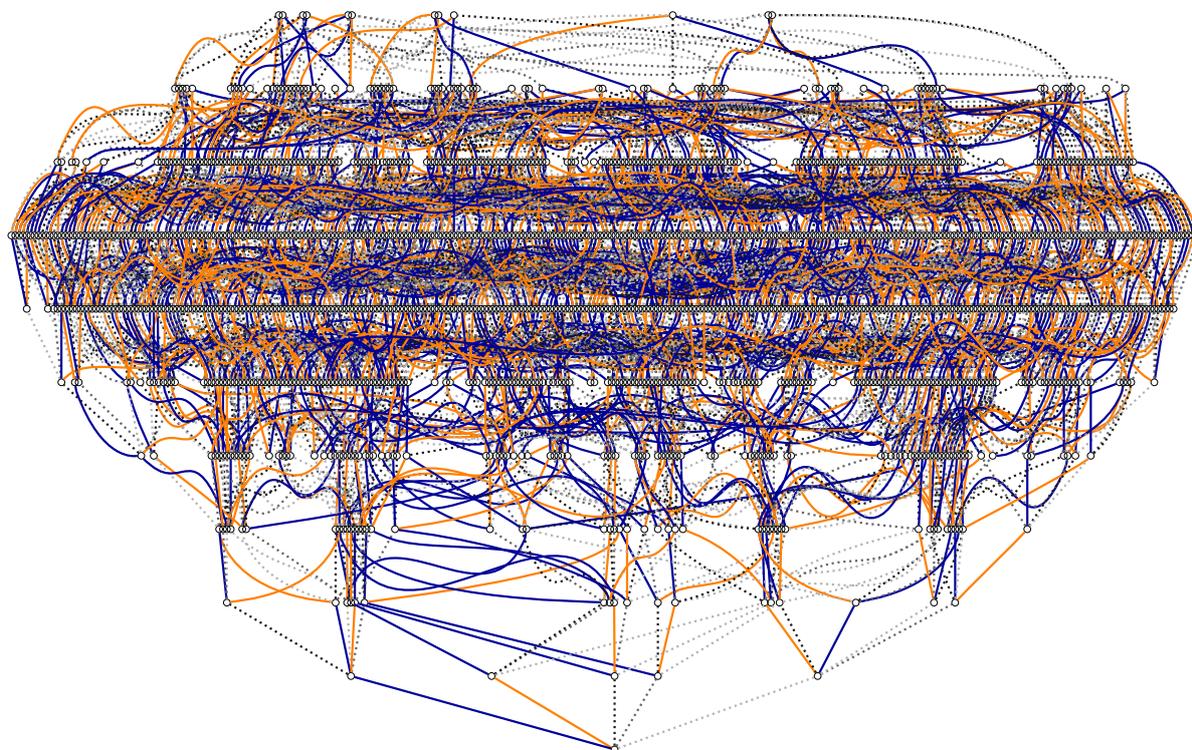


FIGURE 3.9 – L'ensemble partiellement ordonné  $(\mathbf{G}_{26}, \preceq_X)$  pour un ensemble  $X$  constitué de 5 réflexions bien choisies parmi ses 9 réflexions d'ordre 2 et 24 réflexions d'ordre 3.

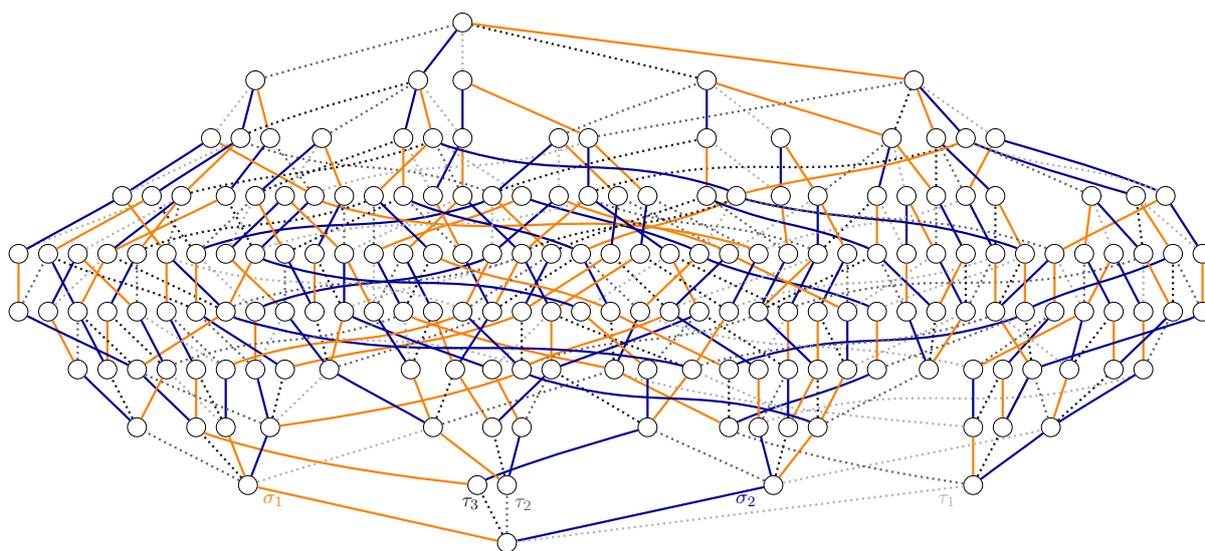


FIGURE 3.10 – Le treillis des 184 simples du monoïde de Garside  $\mathbf{B}^\square(B_3)$ , monoïde de tresses non-germe pour les groupes  $\mathbf{B}(B_3) \sim \mathbf{B}_{26}$ , et accessoirement monoïde-germe associé au groupe  $\mathbf{G}_{26}$ .

## Chapitre 4

# Amalgames, extensions HNN et groupes à unique relateur

Nous explorons davantage encore la classe des groupes de Garside, que nous savions close par produit direct et par produit Zappa-Szép [3]. Rappelons qu'un produit Zappa-Szép de groupes ou de monoïdes [126, 131] est une extension naturelle d'un produit semidirect dans lequel les deux groupes ou monoïdes agissent l'un sur l'autre, le produit semidirect correspondant au cas où une des actions est triviale, et le produit direct au cas où les deux actions sont triviales. Nous avons généralisé le théorème de décomposition en produit direct des groupes d'Artin-Tits sphériques [40, 66] : tout monoïde de Garside est un produit Zappa-Szép itéré de monoïdes à centre cyclique infini [1, 3]. Ces résultats ont depuis été exploités [74] ou étendus à d'autres contextes [114, 6]. Les auteurs de [64] font remarquer cependant que ce théorème de structure est un des rares résultats qui, jusqu'à présent, n'a pas pu être étendu des monoïdes (*resp.* groupes) de Garside aux catégories (*resp.* groupoïdes) de Garside (une construction puissante mais spécifique aux monoïdes de Garside—permettant de détecter le plus petit multiple quasicentral de chaque élément—se trouve ne plus être aussi pertinente dans le cas des catégories de Garside dans lesquelles le multiple d'un ensemble quelconque d'éléments n'est défini que si ces derniers partagent une même source).

Ce chapitre s'inscrit donc dans la poursuite à la fois de l'étude naturelle des propriétés de clôtures de la classe des monoïdes et des groupes de Garside, et à la fois de la recherche au long cours de spécimens distingués. Dans la section 4.1, nous commençons par étudier les produits libres avec amalgames cycliques. Nous en déduisons que tout produit en arbre de groupes cycliques infinis est un groupe de Garside. Dans la section 4.2, nous caractérisons les extensions HNN cycliques de groupes de Garside qui sont encore des groupes de Garside.

En utilisant alors la solution d'A. PIETROWSKI pour le problème d'isomorphisme des groupes à unique relateur [112], nous obtenons une très jolie conséquence des résultats précédents, et en réalité leur objectif initial : un groupe non-cyclique à unique relateur est Garside si et seulement si son centre est non-trivial [14]. Ce résultat est en soi important pour la théorie de Garside, mais il a aussi comme corollaire notable que tout groupe à unique relateur et centre non-trivial est (explicitement) biautomatique et permet ainsi de répondre en partie au problème de déterminer quels groupes à unique relateur sont (bi)automatiques [30, 104].

## 4.1 Produits libres amalgamés

Nous montrons que la classe des groupes de Garside est close par produit libre avec certains sous-groupes cycliques amalgamés. Le résultat est précisément celui dont nous avons besoin pour déduire que tout produit en arbre de groupes cycliques infinis est un groupe de Garside.

Soient  $M_1, M_2, H$  des monoïdes avec des morphismes injectifs  $\phi_1 : H \hookrightarrow M_1$  et  $\phi_2 : H \hookrightarrow M_2$ . Le *produit libre amalgamé* de  $M_1$  et  $M_2$  relativement à  $(H, \phi_1, \phi_2)$  est le monoïde

$$\langle M_1 \star M_2 : \phi_1(h) = \phi_2(h), h \in H \rangle_+^1.$$

Pour  $H = \langle h \rangle_+^1$  cyclique, nous définissons  $h_1 = \phi_1(h)$  et  $h_2 = \phi_2(h)$ , et notons le produit libre cyclique amalgamé  $M_1 \star_{h_1=h_2} M_2$ .

### THÉORÈME 4.1 ([14])

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux monoïdes de Garside. Pour toute racine  $h_1$  d'un élément de Garside dans  $M_1$  et toute racine  $h_2$  d'un élément de Garside dans  $M_2$ , le produit libre cyclique amalgamé  $M_1 \star_{h_1=h_2} M_2$  est un monoïde de Garside.

Une hypothèse nécessaire est effectivement que  $\phi_i(H)$  doit contenir un élément de Garside de  $M_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Lorsqu'on se restreint aux sous-monoïdes cycliques amalgamés, cette dernière s'exprime naturellement en termes de racines d'éléments de Garside.

Certains algorithmes pour l'extraction de racines dans les groupes de Garside ont été proposés dans [98, 118, 125] : le problème d'extraction d'une racine  $n$ -ième dans un groupe de Garside  $G$  se réduit à un problème de conjugaison dans le groupe  $\mathbb{Z} \times G^n$  et il est par conséquent décidable. En effet, nous avons montré que  $\mathbb{Z} \times G^n$  est lui-même un groupe de Garside [3] et que le problème de conjugaison est décidable pour la classe des groupes de Garside [2]. Mentionnons que le nombre d'entiers  $n$  pour lesquels un élément donné admet une racine  $n$ -ième est fini et que le nombre de classes de conjugaison des racines  $n$ -ième d'un élément donné est fini.

La figure 4.1 montre comment calculer le ppcm (à droite disons) de deux éléments  $b_1 \in M_1$  et  $b_2 \in M_2$  en définissant  $\mu_{b_i}$  comme le plus petit entier  $m$  pour lequel  $h_i^m$  est un multiple à droite de  $b_i$  avec  $i \in \{1, 2\}$ . Nous obtenons alors

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} h_2^{\mu_{b_1}} \vee b_2 & \text{pour } \mu_{b_1} < \mu_{b_2}, \\ h_1^{\mu_{b_1}} = h_2^{\mu_{b_2}} & \text{pour } \mu_{b_1} = \mu_{b_2}, \\ b_1 \vee h_1^{\mu_{b_2}} & \text{pour } \mu_{b_1} > \mu_{b_2}. \end{cases}$$

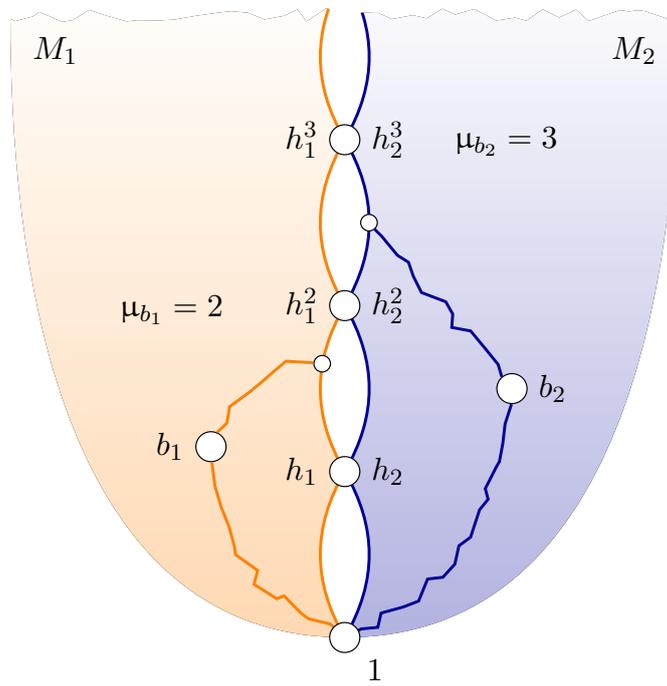


FIGURE 4.1 – La structure de treillis de la restriction à  $M_1 \vee M_2$  du produit libre amalgamé  $M_1 \star_{h_1=h_2} M_2$ . Si, pour  $b_i \in M_i$  avec  $i \in \{1, 2\}$ , l'entier  $\mu_{b_i}$  désigne le plus petit  $m$  pour lequel  $h_i^m$  est un multiple à droite de  $b_i$ , les éléments représentés  $b_1 \in M_1$  et  $b_2 \in M_2$  vérifient ici  $\mu_{b_1} = 2$  et  $\mu_{b_2} = 3$ . Nous obtenons ainsi  $b_1 \vee b_2 = h_2^{\mu_{b_1}} \vee b_2 = h_2^2 \vee b_2$  dans  $M_1 \star_{h_1=h_2} M_2$ .

EXEMPLE 4.2

Les exemples les plus simples sont les monoïdes  $K_{p,q}^+ = \langle \mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathbf{s}^p = \mathbf{t}^q \rangle_+^1$  obtenus pour  $M_1 = \langle \mathbf{s} \rangle_+^1$ ,  $M_2 = \langle \mathbf{t} \rangle_+^1$ , et  $H = \langle \mathbf{h} \rangle_+^1$  avec  $\phi_1 : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{s}^p$  et  $\phi_2 : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{t}^q$ . Ils sont des monoïdes de Garside bien connus comme étant associés aux groupes de nœuds toriques (pour  $p$  et  $q$  premiers entre eux), voir [63, 64, 1, 5].

EXEMPLE 4.3

Reprenons les monoïdes  $M_\chi = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} : \mathbf{a}^2 = \mathbf{bc}, \mathbf{b}^3 = \mathbf{ca} \rangle_+^1$  de l'exemple 3.2 et  $M_\kappa = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{xyxyx} = \mathbf{yy} \rangle_+^1$  de l'exemple 3.5. Considérons le sous-monoïde  $H = \langle \mathbf{h} \rangle_+^1$  avec l'amalgame  $\phi_1 : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{cb} \in \Delta_\kappa^{\frac{2}{3}}$  et  $\phi_2 : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{yxyx} \in \Delta_\kappa^{\frac{2}{3}}$  par exemple. Alors  $M_\chi \star_{\mathbf{cb}=\mathbf{yxyx}} M_\kappa$  est un monoïde de Garside avec  $\mathbf{b}^8 = (\mathbf{cb})^3 = (\mathbf{yxyx})^3$  comme élément de Garside minimal et un treillis des 161 simples représenté figure 4.2. La table 4.4 illustre la grande variété de monoïdes de Garside obtenus comme produit libre avec amalgame cyclique  $M_\chi \star_{h_\chi=h_\kappa} M_\kappa$ , même lorsque l'on impose aux racines  $h_\chi$  et  $h_\kappa$  d'appartenir aux ensembles  $\Delta_\chi^{\frac{p}{q}}$  avec  $\frac{p}{q} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$  et  $\Delta_\kappa^{\frac{p}{q}}$  avec  $\frac{p}{q} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$  disons. De telles structures de Garside peuvent vite devenir énormes : en prenant simplement  $h_\chi \in \Delta_\chi^{\frac{3}{4}}$  par exemple, on obtient quelques 74 millions de simples pour  $M_\chi \star_{\mathbf{ac}=\mathbf{xyxy}} M_\kappa$ , et environ sept fois plus pour  $M_\chi \star_{\mathbf{ca}=\mathbf{xyxy}} M_\kappa$ .

TABLE 4.4

	$h_\chi \quad h_\kappa$	$\Delta_\kappa^{\frac{1}{3}}$			$\Delta_\kappa^{\frac{2}{3}}$							$\Delta_\kappa^{\frac{1}{1}}$
		y	xy	yx	xyxy	yxyx	yy	xyxy	xyxy	yxyx	yxyx	yyy
$\Delta_\chi^{\frac{1}{4}}$	b	4242	4611	4611	580609	580609	572541	510474	510474	510474	510474	1161
$\Delta_\chi^{\frac{1}{3}}$	a	17	19	19	74	74	78	76	76	76	76	301
$\Delta_\chi^{\frac{1}{2}}$	bb	858	760	760	12622	12622	11010	7904	7904	7904	7904	89
$\Delta_\chi^{\frac{2}{3}}$	aa	71	70	70	249	249	253	206	206	206	206	831
	cb	57	57	57	161	161	157	140	140	140	140	501
$\Delta_\chi^{\frac{1}{1}}$	aaa	300	225	225	917	917	837	611	611	611	611	19

Exemple 4.3 : le nombre de simples du monoïde de Garside  $M_\chi \star_{h_\chi=h_\kappa} M_\kappa$  pour des racines  $h_\chi \in \Delta_\chi^{\frac{p}{q}}$  avec  $\frac{p}{q} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$  et  $h_\kappa \in \Delta_\kappa^{\frac{p}{q}}$  avec  $\frac{p}{q} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ . La figure 4.2 représente le treillis des 161 simples de  $M_\chi \star_{\mathbf{cb}=\mathbf{yxyx}} M_\kappa$ , à comparer avec les treillis des figures 3.1(b) et 3.1(c).

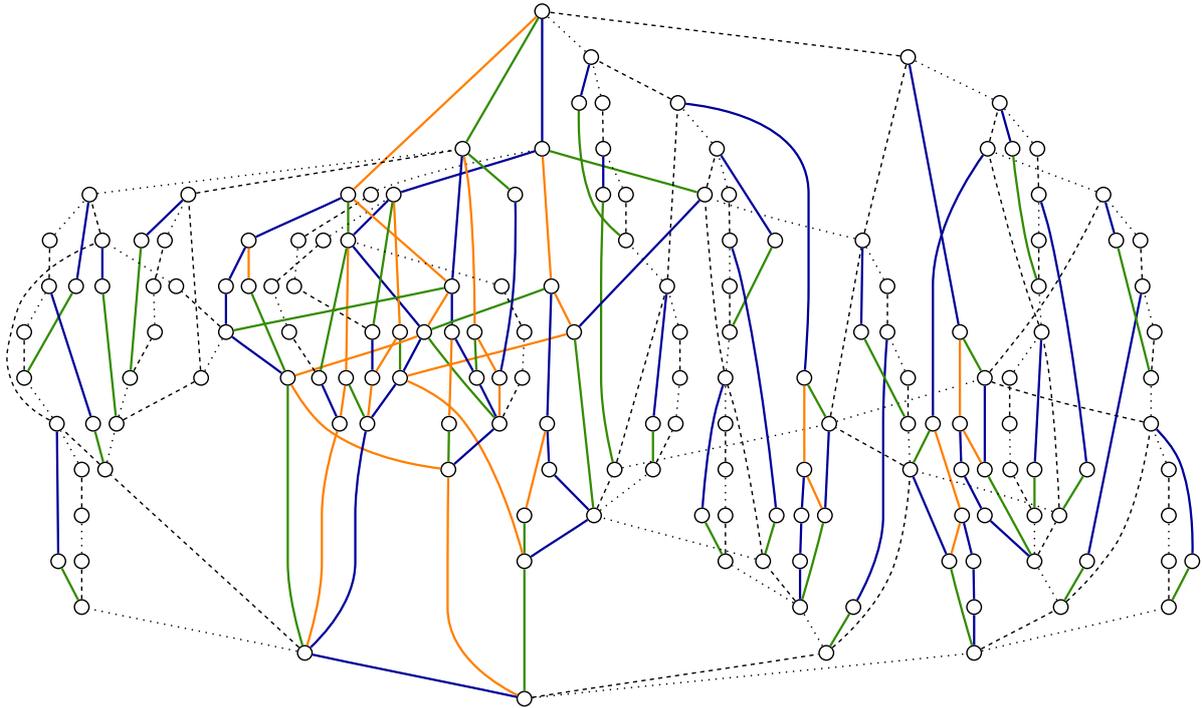


FIGURE 4.2 – Le treillis des 161 simples du monoïde  $M_\chi \star_{cb=yxyx} M_k$  de l'exemple 4.3.

Du théorème 4.1, nous pouvons déduire une complète caractérisation des produits libres cycliquement amalgamés de groupes Garside qui sont également groupes de Garside.

**COROLLAIRE 4.5 ([14])**

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux monoïdes de Garside. Le (groupe enveloppant du) produit libre cycliquement amalgamé  $M_1 \star_{h_1=h_2} M_2$  est Garside si et seulement si  $h_1$  est racine d'un élément de Garside de  $M_1$  et  $h_2$  racine d'un élément de Garside de  $M_2$ .

Nous devons noter à ce stade l'associativité du produit libre de monoïdes avec amalgames cycliques dans les conditions du théorème 4.1. Nous obtenons la conséquence immédiate suivante.

Considérons un arbre fini  $\mathcal{T}$  muni d'une fonction d'étiquetage  $\lambda$  qui, à toute arête  $\{a, b\}$  de  $E(\mathcal{T})$  reliant deux sommets  $a$  et  $b$  de  $V(\mathcal{T})$ , associe deux étiquettes  $\lambda_{a,b}$  et  $\lambda_{b,a}$  appartenant à  $\{2, 3, 4, \dots\}$ . Dans ce cas, le produit en arbre  $G(\mathcal{T})$  est le groupe présenté par

$$\langle a \in V(\mathcal{T}) : a^{\lambda_{a,b}} = b^{\lambda_{b,a}} \text{ pour } \{a, b\} \in E(\mathcal{T}) \rangle.$$

**COROLLAIRE 4.6 ([14])**

Tout produit en arbre de groupes cycliques infinis est un groupe de Garside.

EXEMPLE 4.7

Soit  $\mathcal{T}_0$  l'arbre étiqueté de la figure 4.5 (pour lequel on peut ignorer les étiquettes grises des sommets, qui seront expliquées plus tard via l'exemple 4.13). Selon le corollaire 4.6, le groupe  $G(\mathcal{T}_0)$  est un groupe de Garside.

## 4.2 Extensions HNN

Nous caractérisons et étudions les extensions HNN cycliques d'un monoïde de Garside dont les groupes enveloppants sont Garside (sous une condition raisonnable d'atomicité). De nouveau les racines des éléments de Garside jouent un rôle crucial.

Soient  $M$  et  $H$  deux monoïdes avec deux morphismes injectifs  $\phi_1 : H \hookrightarrow M$  et  $\phi_2 : H \hookrightarrow M$ . On appelle *extension HNN* de  $M$  relativement à  $(H, \phi_1, \phi_2)$ , le monoïde

$$\langle M, t : \phi_1(h)t = t\phi_2(h), h \in H \rangle_+^1.$$

THÉORÈME 4.8 ([14])

Soient  $M$  un monoïde de Garside et  $H$  le monoïde cyclique infini  $\langle h \rangle_+^1$  avec des morphismes  $\phi_i : H \hookrightarrow M$  pour  $i \in \{1, 2\}$  qui vérifient  $\|\phi_1(h)\| = \|\phi_2(h)\|$ . Alors le groupe enveloppant de l'extension  $\langle M, t : \phi_1(h)t = t\phi_2(h) \rangle_+^1$  est un groupe de Garside si et seulement si  $\phi_1(h)$  et  $\phi_2(h)$  sont deux racines  $n$ -ième d'un même élément de Garside de  $M$  pour un certain  $n > 0$ .

Ici encore, l'hypothèse nécessaire est précisément que  $\phi_1(H)$  et  $\phi_2(H)$  doivent contenir le même élément de Garside de  $M$ . Lorsqu'on se restreint aux sous-monoïdes cycliques amalgamés, cette dernière s'exprime naturellement en terme de racines d'éléments de Garside, et la remarque sur l'extraction de racine dans les groupes de Garside page 62 reste donc pertinente dans ce cas.

Remarquons que l'hypothèse additionnelle  $\|\phi_1(h)\| = \|\phi_2(h)\|$  peut naturellement s'exprimer plus généralement comme l'existence d'une norme  $\nu$  satisfaisant le lemme 3.4(i). L'exemple 4.10 illustre les différents comportements des extensions HNN cycliques du monoïde  $M_\kappa$ , dépendants possiblement de cette hypothèse additionnelle.

Comme pour celle du théorème 4.1, la preuve du théorème 4.8 nécessite une mise en œuvre prudente et méticuleuse autour d'une idée simple. Notons que le monoïde  $\langle M, t : \phi_1(h)t = t\phi_2(h) \rangle_+^1$  ne fournit pas lui-même une structure de Garside à son groupe enveloppant. L'idée est alors de considérer le monoïde noté  $\overline{M}_{\phi_1(h), \phi_2(h)}^t$  dont la présentation est obtenue en  $t$ -truffant chaque relation : tout mot  $\mathbf{u} = \prod_{i=1}^m a_i$  sur les atomes de  $M$  devient ainsi  $\overline{\mathbf{u}}^t = a_1 \prod_{i=2}^m (ta_i)$ . En particulier la relation  $\phi_1(h)t = t\phi_2(h)$  devient  $\overline{\phi_1(h)}^t t = t\overline{\phi_2(h)}^t$ .

## EXEMPLE 4.9

Les plus simples exemples sont les bien connus groupes de Baumslag-Solitar

$$\mathbf{BS}(m, m) = \langle \mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathbf{s}^m \mathbf{t} = \mathbf{t} \mathbf{s}^m \rangle,$$

qui sont des extensions HNN du groupe cyclique infini. Connus comme les *monoïdes de Baumslag-Solitar* [46, 87, 20], les monoïdes associés  $\mathbf{BS}^+(m, m) = \langle \mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathbf{s}^m \mathbf{t} = \mathbf{t} \mathbf{s}^m \rangle_+^1$  sont des monoïdes simplifiables atomiques admettant des ppcms conditionnels, mais ne peuvent être des monoïdes de Garside (excepté pour  $m = 1$ ). Maintenant, la version  $\mathbf{t}$ -truffée se trouve coïncider avec le monoïde d'Artin-Tits de type diédral

$$\mathbf{B}^+(\mathbf{I}_2(2m)) = \langle \mathbf{s}, \mathbf{t} : (\mathbf{st})^m = (\mathbf{ts})^m \rangle_+^1$$

qui lui est Garside et se plonge dans son groupe de fractions  $\mathbf{BS}(m, m)$  pour  $m > 0$ .

## EXEMPLE 4.10

Des exemples bien plus compliqués proviennent du monoïde de Garside presque pathologique  $M_\kappa = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{xyxyx} = \mathbf{yy} \rangle_+^1$  de l'exemple 3.5. Rappelons simplement ici que  $M_\kappa$  n'admet aucune norme additive, c'est-à-dire, aucune norme  $\nu$  satisfaisant  $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$  pour  $(a, b) \in M_\kappa$ . Son élément de Garside minimal  $\Delta = \mathbf{y}^3$  admet trois racines cubiques, tandis que  $\Delta^2$  en admet sept :

$$\Delta^{\frac{1}{3}} = \{\mathbf{y}, \mathbf{xy}, \mathbf{yx}\} \quad \text{et} \quad \Delta^{\frac{2}{3}} = \{\mathbf{xyxy}, \mathbf{yxyx}, \mathbf{yy}, \mathbf{xyxy}, \mathbf{yxyx}, \mathbf{yxyx}, \mathbf{yxyxx}\}.$$

Nous avons  $\|\mathbf{y}\| = 1$ ,  $\|\mathbf{xy}\| = \|\mathbf{yx}\| = 2$ ,  $\|\mathbf{xyxy}\| = \|\mathbf{yxyx}\| = 4$ ,  $\|\mathbf{yy}\| = \|\mathbf{xxyxy}\| = \|\mathbf{yxyxy}\| = \|\mathbf{yxyxx}\| = 5$ , et  $\|\mathbf{y}^3\| = 6$ .

La table 4.11 présente les extensions HNN possibles de  $M_\kappa$  quand on se restreint arbitrairement à choisir la paire  $(h_1, h_2)$  d'images de  $h$  dans l'ensemble  $\Delta^{\frac{p}{q}}$  avec  $\frac{p}{q} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ .

Les neuf cas correspondant à la restriction à  $\Delta^{\frac{1}{3}}$  semblent nous donner une excellente vue d'ensemble.

Pour  $(h_1, h_2) = (g, g)$  avec  $g \in \Delta^{\frac{1}{3}}$ , les extensions HNN cycliques admettent des présentations  $\mathbf{z}$ -truffées définissant des monoïdes de Garside  $\overline{M}_{\kappa, g, g}^{\mathbf{z}}$  (avec respectivement 88, 96 et 96 simples). Les deux derniers ne sont pas isomorphes, mais antiisomorphes. Le monoïde  $\overline{M}_{\kappa, \mathbf{yx}, \mathbf{xy}}^{\mathbf{z}}$  est Garside (avec 96 simples), n'est ni isomorphe ni antiisomorphe à aucun des précédents, mais il est antiisomorphe au monoïde  $\overline{M}_{\kappa, \mathbf{xy}, \mathbf{yx}}^{\mathbf{z}}$  (voir la figure 4.3). Le monoïde  $\overline{M}_{\kappa, \mathbf{xy}, \mathbf{y}}^{\mathbf{z}}$  est clairement non-atomique, mais son groupe enveloppant enveloppe également le monoïde de Garside  $\overline{M}_{\kappa, \mathbf{y}, \mathbf{xy}}^{\mathbf{z}}$ . La figure 4.4 montre son treillis à 126 simples, dont l'image antiisomorphe correspond au monoïde (de Garside)  $\overline{M}_{\kappa, \mathbf{yx}, \mathbf{y}}^{\mathbf{z}}$  (dont le groupe enveloppant enveloppe également le monoïde non-atomique  $\overline{M}_{\kappa, \mathbf{y}, \mathbf{yx}}^{\mathbf{z}}$ ).

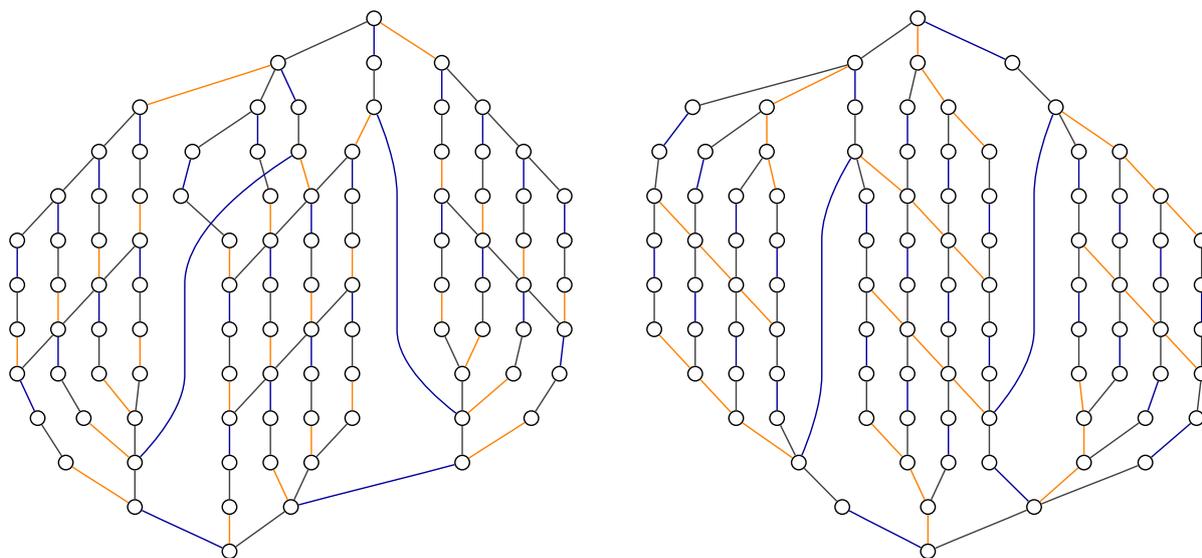


FIGURE 4.3 – Les treillis (ni isomorphe ni antiisomorphe) des 96 simples de  $\overline{M}_{\kappa,xy,xy}^z = \langle x, y, z : xzyzxyzyx = yzy, xzyz = zxzy \rangle_+^1$  (antiisomorphe à  $\overline{M}_{\kappa,yx,yx}^z$ ) et de  $\overline{M}_{\kappa,xy,yx}^z = \langle x, y, z : xzyzxyzyx = yzy, xzyz = zyzx \rangle_+^1$  (antiisomorphe à  $\overline{M}_{\kappa,yx,xy}^z$ ) de l'exemple 4.10.

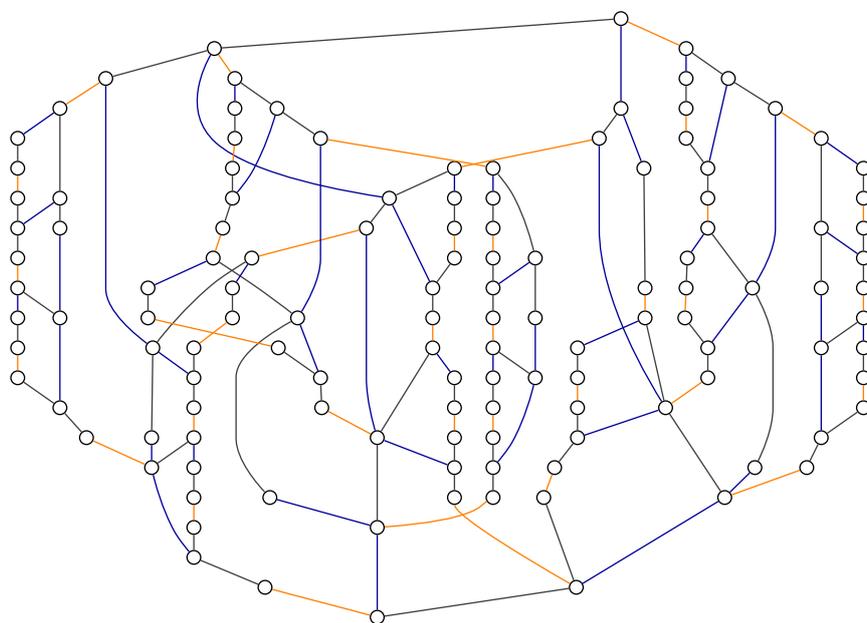


FIGURE 4.4 – Le treillis des 126 simples de  $\overline{M}_{\kappa,y,xy}^z = \langle x, y, z : xzyzxyzyx = yzy, yz = zxzy \rangle_+^1$  (antiisomorphe à  $\overline{M}_{\kappa,yx,y}^z$ ) de l'exemple 4.10.

TABLE 4.11

			$\Delta^{\frac{1}{3}}$			$\Delta^{\frac{2}{3}}$						$\Delta^{\frac{1}{1}}$	
	$h_1$	$h_2$ $\ h_i\ $	y	xy	yx	xyxy	yxyx	yy	xyxy	xyxy	yxyx	yxyx	yyy
$\Delta^{\frac{1}{3}}$	y	1	88	126	$\infty$								
	xy	2	$\infty$	96	96								
	yx	2	126	96	96								
$\Delta^{\frac{2}{3}}$	xyxy	4				2304	2304	$\infty$	1561	1687	1561	1687	
	yxyx	4				2304	2304	2552	1687	1561	1561	$\infty$	
	yy	5				2552	$\infty$	1808	1109	1109	1109	1109	
	xyxy	5				$\infty$	1687	1109	804	804	804	804	
	xyxy	5				1561	1561	1109	804	804	804	804	
	yxyx	5				1561	1687	1109	804	804	804	804	
	yxyx	5				1687	1561	1109	804	804	804	804	
$\Delta^{\frac{1}{1}}$	yyy	6											44

Exemple 4.10 : le nombre de simples du monoïde  $\overline{M}_{\kappa, h_1, h_2}^z$  pour les extensions HNN de  $M_\kappa$  avec  $h_i = \phi_i(h) \in \Delta^{\frac{1}{3}} \sqcup \Delta^{\frac{2}{3}} \sqcup \Delta^{\frac{1}{1}}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Les cellules grisées correspondent aux couples  $(h_1, h_2)$  avec  $\|h_1\| \neq \|h_2\|$ , alors que le symbole  $\infty$  indique quand  $\overline{M}_{\kappa, h_1, h_2}^z$  est effectivement non-atomique.

Le résultat précédent peut être appliqué pleinement à la classe des produits en arbre de groupes cycliques infinis. En réunissant le théorème 4.8 et le corollaire 4.6, nous obtenons :

## COROLLAIRE 4.12 ([14])

Soit  $\mathcal{T}$  un arbre étiqueté fini. Pour tous sommets  $v_0, v_1 \in V(\mathcal{T})$ , l'extension HNN cyclique  $\langle G(\mathcal{T}), t : tv_0 = v_1t \rangle$  est un groupe de Garside si et seulement si l'étiquette  $(p_1, q_1, \dots, p_m, q_m)$  du chemin entre  $v_0$  et  $v_1$  vérifie  $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$ .

Le point est que l'extension HNN  $\langle G(\mathcal{T}), t : tv_0 = v_1t \rangle$  est Garside si et seulement si les deux sommets  $v_0, v_1$  de  $V(\mathcal{T})$  satisfont  $\epsilon(v_0) = \epsilon(v_1)$ . Pour calculer l'exposant  $\epsilon(v)$  d'un sommet  $v$ , on peut considérer tous les chemins maximaux finissant en  $v$ . Pour un tel chemin maximal  $d_v$  étiqueté  $(p_1, q_1, \dots, p_m, q_m)$ , la contribution  $\epsilon(d_v)$  correspond au terme  $e_m$  de la suite  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$  définie par  $e_1 = q_1$  et  $e_i = \frac{e_{i-1} \vee p_i}{p_i} q_i$  pour  $1 < i \leq m$ . On obtient alors  $\epsilon(v) = \bigvee_{d_v} \epsilon(d_v)$ . En particulier, le centre de  $G(\mathcal{T})$  est alors engendré par l'élément  $v^{\epsilon(v)}$  avec  $\epsilon(v) = \bigvee_{d_v} \epsilon(d_v)$ .

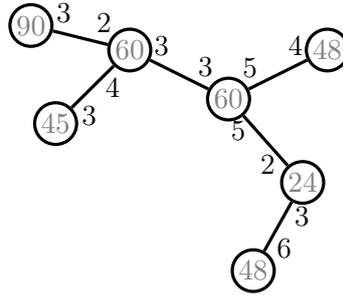


FIGURE 4.5 – L’arbre étiqueté  $\mathcal{T}_0$  pour l’exemple 4.7 avec l’indication de la valeur de l’exposant  $\epsilon(v)$  de chaque sommet  $v$  pour l’exemple 4.13.

EXEMPLE 4.13

Dans la figure 4.5, chaque sommet  $v \in V(\mathcal{T}_0)$  est étiqueté avec la valeur  $\epsilon(v)$  associée. Ainsi, en plus des sept extensions HNN directes correspondant aux boucles (c’est-à-dire, avec  $v_0 = v_1$ ), le corollaire 4.12 permet d’affirmer qu’exactly deux simples extensions HNN cycliques sont Garside, en l’occurrence  $\epsilon(v_0) = \epsilon(v_1) \in \{48, 60\}$ . Les extensions multiples (par exemple,  $\epsilon(v_0) = \epsilon(v_1) = 48$  plus  $\epsilon(v'_0) = \epsilon(v'_1) = 60$ ) produisent encore des groupes de Garside.

### 4.3 Groupes à unique relateur

En utilisant la solution d’A. PIETROWSKI pour le problème d’isomorphisme des groupes à unique relateur et centre non-trivial [112], nous établissons finalement qu’un groupe non-cyclique à unique relateur est Garside si et seulement si son centre est non-trivial (corollaire 4.16). Au-delà de son importance pour la théorie de Garside, ce résultat contribue aux problèmes ouverts de conjugaison ou d’automaticité des groupes à unique relateur [30, 104].

THÉORÈME 4.14 ([112])

Soit  $G$  un groupe non-cyclique à unique relateur et centre non-trivial. Alors, si  $G/[G, G]$  n’est pas abélien libre,  $G$  peut être uniquement (à symétrie miroir près) présenté par

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m : \mathbf{a}_1^{p_1} = \mathbf{a}_2^{q_1}, \dots, \mathbf{a}_{m-1}^{p_{m-1}} = \mathbf{a}_m^{q_{m-1}} \rangle$$

avec  $p_i, q_i \geq 2$  et  $p_i \wedge q_j = 1$  pour  $i > j$ , et, si  $G/[G, G]$  est abélien libre,  $G$  peut être uniquement (à échange et permutation cyclique près) présenté par

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m : \mathbf{a}\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_m\mathbf{a}, \mathbf{a}_1^{p_1} = \mathbf{a}_2^{q_1}, \dots, \mathbf{a}_{m-1}^{p_{m-1}} = \mathbf{a}_m^{q_{m-1}} \rangle$$

avec  $p_i, q_i \geq 2$ ,  $p_i \wedge q_j = 1$  pour  $i > j$  et  $p_1 p_2 \cdots p_{m-1} = q_1 q_2 \cdots q_{m-1}$ .

Un groupe est appelé *m-Pietrowski* (version succinte de *m-Baumslag-Collins-Karrass-McCool-Meskin-Metaftsis-Magnus-Murasugi-Pietrowski-Solitar-Steinberg-Taylor*) s'il admet une des présentations du théorème 4.14 pour un certain  $m > 1$ .

Relevons simplement trois propriétés (voir [105, 112] pour davantage) qui illustrent la distribution des groupes à unique relateur dans la classe des groupes de Pietrowski.

Tout groupe *m-Pietrowski* avec  $m \leq 3$  est un groupe à unique relateur : le groupe

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 : \mathbf{a}_1^{p_1} = \mathbf{a}_2^{q_1}, \mathbf{a}_2^{p_2} = \mathbf{a}_3^{q_2} \rangle$$

avec  $p_i, q_i \geq 2$  et  $q_1 \wedge p_2 = 1$  est isomorphe au groupe  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 : \pi_{q_2, q_1}(\mathbf{a}_1^{p_1}, \mathbf{a}_3^{-q_2}) \rangle$  où  $\pi_{\lambda, \mu}(x, y)$  désigne l'unique élément primitif (à conjugaison près) avec somme d'exposants  $\lambda$  sur  $x$  et  $\mu$  sur  $y$ . Le groupe  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 : \mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_2^2, \mathbf{a}_2^5 = \mathbf{a}_3^5, \mathbf{a}_3^3 = \mathbf{a}_4^3 \rangle$  n'est pas un groupe à unique relateur. Enfin, pour tout  $m$ , il existe un groupe *m-Pietrowski* qui est un groupe à unique relateur.

Par application des corollaires 4.6 et 4.12, nous déduisons ces faits remarquables :

COROLLAIRE 4.15 ([14])

Tout groupe de Pietrowski est Garside.

COROLLAIRE 4.16 ([14])

Un groupe non-cyclique à unique relateur est Garside si et seulement si son centre est non-trivial.

Mentionnons que G. BAUMSLAG et J. TAYLOR [31] ont donné un algorithme pour décider si un groupe à unique relateur admet un centre trivial ou non. Par le corollaire 4.16, nous pouvons donc décider si un groupe à unique relateur est un groupe de Garside.

EXEMPLE 4.17

La figure 4.6 montre le treillis des 1353 simples d'une structure de Garside pour le groupe à unique relateur

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} : \mathbf{x}^8 \mathbf{a} \mathbf{x}^{-6} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{x}^4 \mathbf{a} \mathbf{x}^{-6} \mathbf{a}^{-1} \rangle,$$

dont la présentation de Pietrowski est

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 : \mathbf{a} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 \mathbf{a}, \mathbf{x}_1^4 = \mathbf{x}_2^2, \mathbf{x}_2^3 = \mathbf{x}_3^6 \rangle.$$

Il est intéressant de noter qu'une telle structure de Garside fournit systématiquement une structure biautomatique explicite [58, 5, 7].

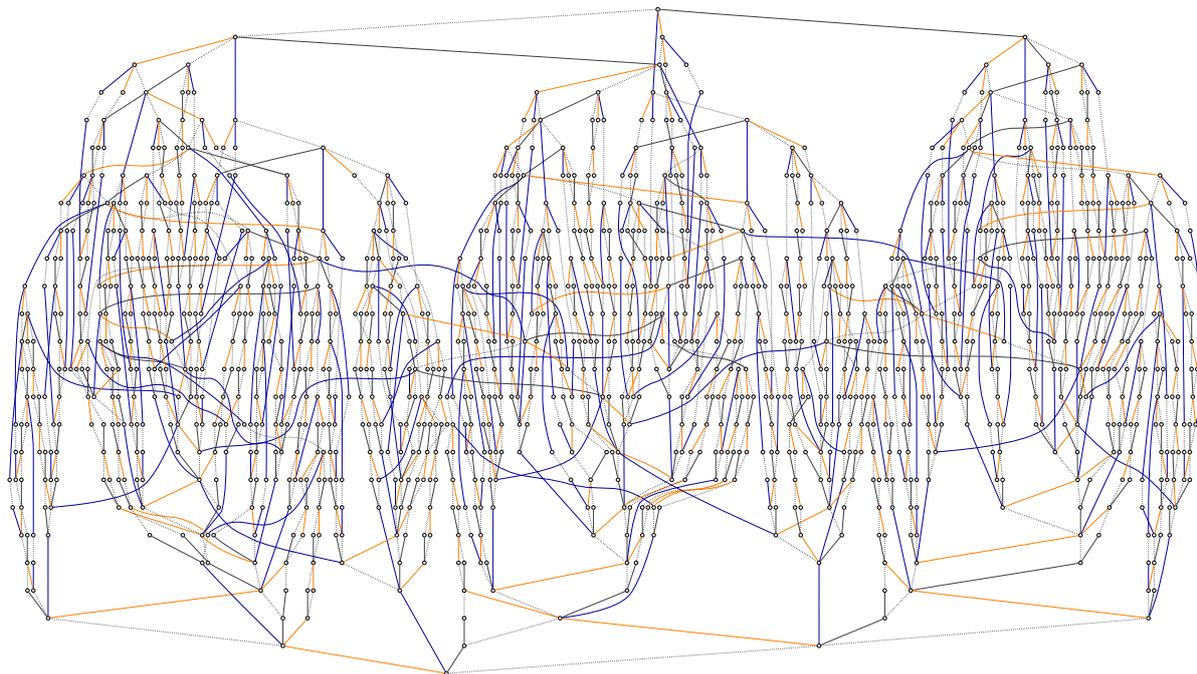


FIGURE 4.6 – Le treillis des 1353 simples du monoïde de Garside naturellement associé au groupe à unique relateur  $\langle a, x : x^8ax^{-6}a^{-1}x^4ax^{-6}a^{-1} \rangle$  de l'exemple 4.17.

**COROLLAIRE 4.18 ([14])**

Tous les groupes de Pietrowski et, en particulier, tous les groupes à unique relateur et centre non-trivial sont biautomatiques et ont donc un problème de conjugaison décidable.

Les groupes de Pietrowski sont également sans torsion. Ainsi, en combinant ce corollaire 4.18 et la solution de B. B. NEWMAN pour les groupes de torsion à unique relateur [109], le problème de conjugaison [30, problème (O5)] reste ouvert pour les groupes sans torsion à unique relateur et centre trivial (voir également [99]).

Au-delà d'enrichir globalement les propriétés de clôture de la classe des groupes de Garside, ces résultats fournissent explicitement une nouvelle famille de groupes de Garside, qui se trouve être assez éloignée des familles naturellement étudiées jusqu'ici : groupes de tresses en tout genre, groupes d'entrelacs toriques, ou groupes associés à certaines solutions de l'équation de Yang-Baxter [64].

Troisième partie

Convergences et perspectives



## Chapitre 5

# Automaticité *vs* autosimilarité

Le matériel de cet ultime chapitre est essentiellement basé sur [20] mais apparaît, en partie du moins, également dans [21]. Il correspond nous l'espérons à une première étape vers une de nos problématiques favorites guidant notre recherche depuis dix ans :

### PROBLÈME 5.1

Les groupes de tresses sont-ils des groupes d'automate ?

Comme leur nom même l'indique, (semi)groupes automatiques et (semi)groupes d'automate partagent le fait d'être définis à partir d'un même objet : l'automate ou le transducteur lettre-à-lettre dans ce cas précis. Mais, au-delà de cette origine commune, ces thèmes restaient jusqu'à tout récemment essentiellement éloignés, autant en terme de communauté, qu'en terme d'outils ou de résultats. Typiquement, tout article sur l'un ou l'autre de ces sujets se devait de contenir une phrase comme

« it should be emphasized that, despite their similar names, the notions of  $\text{automat}_{\text{ic}}^{\text{on}}$  (semi)groups are entirely separate from the notions of  $\text{automat}_{\text{on}}^{\text{ic}}$  (semi)groups. »

Peut en témoigner également le précieux chapitre de référence *Groups defined by automata* de L. BARTHOLDI et P. V. SILVA [29] qui se décompose en exactement deux sections, essentiellement *automatic groups* et *automaton groups*, sans qu'aucune référence entre l'une et l'autre n'apparaisse explicitement.

Un problème important est de pouvoir reconnaître si un (semi)groupe donné est autosimilaire, c'est-à-dire s'il est un (semi)groupe d'automate.

Parmi les problèmes ouverts de théorie des groupes du Kourovka Notebook [103], il y a celui portant le numéro 16.84 et posé par V. I. SUSHCHANSKIÏ (voir aussi [95]) :

Can the  $n$ -strand braid group  $\mathbf{B}_n$  act faithfully on a regular rooted tree by finite-state automorphisms ?

Cela revient à demander si le groupe de tresses est le sous-groupe d'un groupe d'automate.

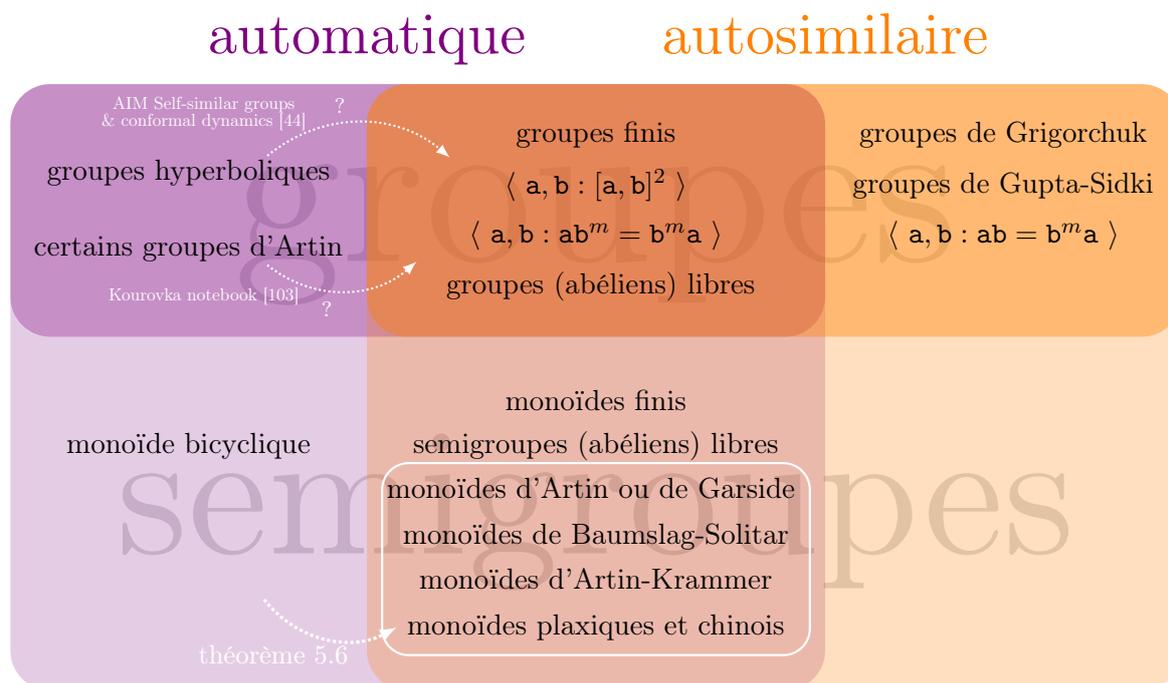


FIGURE 5.1 – Comment comparer (semi)groupes automatiques et (semi)groupes d’automate.

Parmi la trentaine de problèmes ouverts répertoriés dans [44], nous pouvons citer celui qui porte le numéro 1.1 :

It seems quite difficult to show whether a given group is self-similar.

- Are Gromov hyperbolic groups self-similar ?
- Find obstructions to self-similarity.

Toutes ces questions peuvent d’ailleurs être utilement reformulées en termes de semigroupes.

Notre but est d’établir une connexion possible entre « être un semigroupe automatique » et « être un semigroupe d’automate ». Des observations préliminaires sont que ces classes s’intersectent non trivialement et qu’aucune n’est incluse dans l’autre (voir la figure 5.1). Comme le groupe de Grigorchuk par exemple, de nombreux groupes d’automate sont des groupes de torsion infinis et ne peuvent donc pas être des groupes automatiques. Par contre, la question de savoir si tout groupe automatique est un groupe d’automate est ouverte. Cette dernière est liée à la question de savoir si tout groupe automatique est résiduellement fini, qui reste également ouverte malgré les travaux de D. T. WISE [130] et M. ELDER [70]. Comme le monoïde bicyclique, certains semigroupes automatiques ne sont pas résiduellement finis, donc ne peuvent pas être des semigroupes d’automate (voir [45] par exemple).

Quant à l’intersection, nous savons au moins que les (semi)groupes finis, les (semi)groupes libres (sauf le semigroupe libre de rang 1, voir [42, 43]) et les (semi)groupes abéliens libres sont à la fois des semigroupes automatiques et des semigroupes d’automate. Nous proposons une nouvelle façon naturelle d’interpréter algorithmiquement chaque semigroupe issu d’une large classe de semigroupes automatiques—comprenant toutes les classes de semigroupes mentionnées ci-dessus—comme un semigroupe d’automate (théorème 5.6). Il est intéressant de noter que, dans

tous ces cas, « être un semigroupe automatique » et « être un semigroupe d'automate » deviennent des propriétés duales au sens de la théorie des automates (corollaire 5.8).

Dans la section 5.1, nous rappelons les notions de formes normales et de structures automatiques, et précisons celles de normalisation quadratique, de diagramme en carré, et de famille de Garside. La section 5.2 est consacrée au résultat principal (théorème 5.6 et corollaire 5.8), alors que la section 5.3 rassemble finalement plusieurs exemples et contrexemples soigneusement sélectionnés.

## 5.1 Normalisations quadratiques

Cette section contient les définitions de notions classiques comme celle de forme normale ou de structure automatique, mais également les notions plus spécifiques comme celle de normalisation quadratique (voir [62]) ou de famille de Garside (voir [61, 64]).

Pour tout ensemble  $\mathcal{Q}$ , nous notons  $\mathcal{Q}^+$  le semigroupe libre sur  $\mathcal{Q}$  (*resp.*  $\mathcal{Q}^*$  le monoïde libre et  $1$  son élément unité) et appelons ses éléments des  $\mathcal{Q}$ -mots. Nous écrivons toujours  $\|\mathbf{w}\|$  pour désigner la longueur d'un  $\mathcal{Q}$ -mot  $\mathbf{w}$ , et  $\mathbf{w}\mathbf{w}'$  pour la concaténation de deux  $\mathcal{Q}$ -mots  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}'$ .

Soit  $S$  un semigroupe avec un ensemble générateur  $\mathcal{Q}$ . Une *forme normale* pour  $(S, \mathcal{Q})$  est une section (ensembliste) de la projection canonique  $EV$  du langage des  $\mathcal{Q}$ -mots sur  $S$ , c'est-à-dire, une application  $NF$  qui associe à chaque élément de  $S$  un représentant distingué de  $\mathcal{Q}^+$  :

$$\begin{array}{ccc} EV : \mathcal{Q}^+ & \xrightarrow{\quad} & S \\ & \curvearrowleft & \\ & NF & \end{array}$$

Dès que  $NF(S)$  est rationnel, cela fournit une *structure automatique (à droite)* pour  $S$  si le langage  $\mathcal{L}_q = \{ (NF(a), NF(aq)) : a \in S \}$  est rationnel pour chaque  $q \in \mathcal{Q}$ . Le semigroupe  $S$  est alors appelé *semigroupe automatique (à droite)*.

Nous mentionnons ici l'étude approfondie de M. HOFFMANN [85] des différentes notions (lecture/remplissage à gauche ou à droite *vs* multiplication à gauche ou à droite) d'automaticité pour les semigroupes.

Dans ses travaux fondateurs [71, chapitre 9], W. P. THURSTON a montré comment l'ensemble de ces différents automates reconnaissant la multiplication—c'est-à-dire reconnaissant les langages  $\mathcal{L}_q$  de ces paires de formes normales d'éléments qui ne diffèrent que par un facteur  $q \in \mathcal{Q}$  multiplicatif à droite—pouvait être avantageusement remplacé par un seul transducteur lettre-à-lettre qui calcule les formes normales via des exécutions itérées, chaque itération fournissant d'une part une brique de la forme normale finale et sortant d'autre part un mot restant à normaliser. Nous en donnerons une définition précise avant d'établir le corollaire 5.8.

On peut considérer la normalisation associée  $N = NF \circ EV$ . Plus spécifiquement, une *normalisation* est une paire  $(\mathcal{N}, N)$ , où  $\mathcal{N}$  est un ensemble et  $N$  est une application de  $\mathcal{Q}^+$  dans lui-même satisfaisant, pour chaque triplet  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  de  $\mathcal{Q}$ -mots, les trois conditions :

- $\|N(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|$ ,
- $\|\mathbf{w}\| = 1 \Rightarrow N(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ ,
- $N(\mathbf{u}N(\mathbf{w})\mathbf{v}) = N(\mathbf{u}\mathbf{w}\mathbf{v})$ .

Un  $\mathcal{Q}$ -mot  $\mathbf{w}$  satisfaisant  $N(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$  est appelé *N-normal*. Si  $S$  est un semigroupe, nous disons que  $(\mathcal{Q}, N)$  est une *normalisation pour S* si  $S$  admet la présentation

$$\langle \mathcal{Q} : \{ \mathbf{w} = N(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \mathcal{Q}^+ \} \rangle_+.$$

Comme dans [64], nous associons à tout élément  $q \in \mathcal{Q}$  une flèche étiquetée par  $q$  et à tout produit la concaténation des flèches correspondantes. Nous représentons les égalités dans le semigroupe ambiant à l'aide de diagrammes commutatifs, que nous appelons ici *diagrammes carrés*. Par exemple, le carré suivant illustre l'égalité  $q_1 q_2 = q'_1 q'_2$  :

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{q_1} & \\ q_2 \downarrow & & \downarrow q'_1 \\ & \xleftarrow{q'_2} & \end{array}$$

Pour une normalisation  $(\mathcal{Q}, N)$ , nous notons  $\bar{N}$  la restriction de  $N$  à  $\mathcal{Q}^2$  et, pour  $i \geq 1$ , notons  $\bar{N}_i$  l'application (partielle) de  $\mathcal{Q}^+$  dans lui-même qui consiste à appliquer  $\bar{N}$  aux éléments en position  $i$  et  $i + 1$ . Pour toute suite finie  $\mathbf{i} = i_1 \cdots i_n$  d'entiers strictement positifs, nous notons  $\bar{N}_{\mathbf{i}}$  l'application composée  $\bar{N}_{i_n} \circ \cdots \circ \bar{N}_{i_1}$  ( $\bar{N}_{i_1}$  est appliquée d'abord).

Une normalisation  $(\mathcal{Q}, N)$  est *quadratique* si ces deux conditions sont vérifiées :

- un  $\mathcal{Q}$ -mot  $\mathbf{w}$  est *N-normal* si et seulement si chaque facteur de taille 2 de  $\mathbf{w}$  l'est ;
- pour chaque  $\mathcal{Q}$ -mot  $\mathbf{w}$ , il existe une suite finie  $\mathbf{i}$  de positions, dépendante de  $\mathbf{w}$ , telle que l'on ait  $N(\mathbf{w}) = \bar{N}_{\mathbf{i}}(\mathbf{w})$ .

Comme l'illustre la figure 5.2, toute normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, N)$  se voit associée une *complexité*  $(d, p)$  (appelée classe minimale à gauche et classe minimale à droite dans [61, 62]) définie comme :

$$d = \max_{(q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{Q}^3} \min \{ \ell : N(q_1 q_2 q_3) = \bar{N}_{\underbrace{212 \dots}_{\text{length } \ell}}(q_1 q_2 q_3) \},$$

et

$$p = \max_{(q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{Q}^3} \min \{ \ell : N(q_1 q_2 q_3) = \bar{N}_{\underbrace{121 \dots}_{\text{length } \ell}}(q_1 q_2 q_3) \}.$$

Une telle complexité est nécessairement finie pourvu que l'ensemble  $\mathcal{Q}$  soit lui-même fini, et elle vérifie alors l'inégalité  $|d - p| \leq 1$ . Pour  $d \leq 4$  et  $p \leq 3$ , nous dirons que  $(\mathcal{Q}, N)$  satisfait la condition  $(\blacklozenge)$ , appelée *condition du domino* dans [61, 62, 64] mais avec un sens de lecture différent.

Le premier des principaux résultats de [62] est une axiomatisation de ces normalisations quadratiques satisfaisant la condition  $(\blacklozenge)$  en terme de leur restrictions aux mots de longueur 2 : tout application idempotente  $\bar{N}$  sur  $\mathcal{Q}^2$  qui satisfait  $\bar{N}_{2121} = \bar{N}_{121} = \bar{N}_{1212}$  s'étend en une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, N)$  satisfaisant la condition  $(\blacklozenge)$ . Pour des complexités plus grandes, une application sur  $\mathcal{Q}^2$  normalisant les mots de  $\mathcal{Q}^3$  ne normalise pas nécessairement les  $\mathcal{Q}$ -mots plus longs.

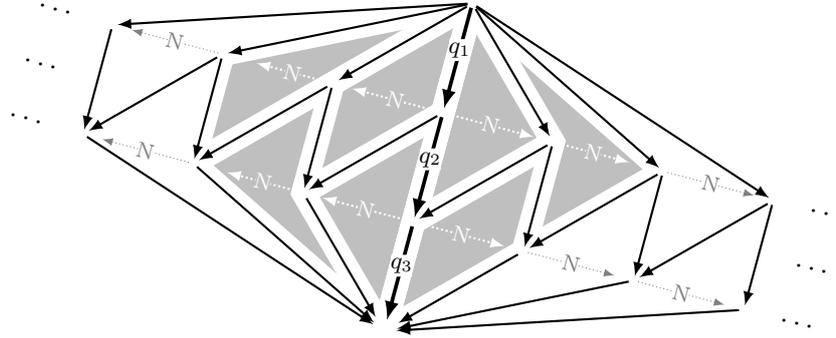


FIGURE 5.2 – Partant d'un  $\mathcal{Q}$ -mot initial  $q_1q_2q_3$ , on applique alternativement des normalisations sur les premiers et seconds facteurs de taille 2 jusqu'à stabilisation, en commençant soit par  $q_1q_2$  (côté droit ici) soit par  $q_2q_3$ . La zone grisée correspond à la condition (◆).

Le second résultat de [62] concerne la termination. Toute normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$  induit un système de réécriture quadratique, à savoir celui avec les règles  $\mathbf{w} \rightarrow \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{w})$  pour  $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}^2$ . Par définition, un tel système de réécriture est confluent et normalisant, ce qui signifie que, pour tout mot initial, il existe une suite finie d'étapes de réécriture menant à un unique mot  $\mathcal{N}$ -normal. Pour ce qui est de sa convergence, c'est-à-dire le fait que toute suite d'étapes de réécriture est finie, le problème est bien différent.

THÉORÈME 5.2 ([62])

Si  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$  est une normalisation quadratique satisfaisant la condition (◆), alors le système de réécriture associé est convergent.

Plus précisément, toute suite d'étapes de réécriture partant d'un mot de  $\mathcal{Q}^p$  est de longueur au plus  $\frac{p(p-1)}{2}$  (resp.  $2^p - p - 1$ ) pour une complexité  $(3, 3)$  (resp. soit  $(3, 4)$  soit  $(4, 3)$ ). Le théorème 5.2 est essentiellement optimal puisqu'il existe des systèmes de réécriture non-convergeants ayant une complexité  $(4, 4)$ .

Le reste de la section décrit un élément supplémentaire de la théorie de Garside (voir [64] pour les fondations de cette théorie) pouvant faire le lien avec les éléments déjà vus dans les chapitres 3 et 4. Les familles de Garside ont récemment été introduites comme un cadre général garantissant l'existence d'une forme normale. Même si cette notion n'est pas nécessaire pour la compréhension du résultat principal, de sa preuve et de l'ensemble de la section 5.2, plusieurs exemples de la section 5.3 peuvent éventuellement l'invoquer.

Si  $S$  est un monoïde simplifiable à droite dont le seul élément inversible est son unité 1, une famille de Garside (à droite) pour  $S$  est un ensemble générateur qui est clos par diviseur à gauche et par mcm à gauche. On connaît plusieurs caractérisations pratiques des familles de Garside. Celle qui suit est particulièrement pertinente ici.

**THÉORÈME 5.3 ([62])**

Soit  $S$  un monoïde simplifiable à droite dont le seul élément inversible est son unité 1 et ayant une famille de Garside à droite  $\mathcal{Q}$ . La normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ , définie par  $\mathcal{N}(ab) = cd$  pour  $a, b, c, d \in \mathcal{Q}$  avec  $ab = cd$  et  $d$  maximal, satisfait la condition  $(\blacklozenge)$ .

La plupart de nos résultats de la section 5.2 reposent sur la condition  $(\blacklozenge)$  décrite initialement par P. DEHORNOY et Y. GUIRAUD dans [62]. Cependant, aucun de leurs résultats (en particulier, les théorèmes centraux 5.2 et 5.3 mentionnés ci-dessus par souci de clarté) n'est ni nécessaire ni même utile pour établir les nôtres. Notons que nos constructions ne requièrent aucune de leurs hypothèses fortes (ni simplifiabilité, ni absence d'élément inversible non-trivial). Nous soulignons simplement que la condition  $(\blacklozenge)$  apparaît comme le véritable dénominateur commun des différentes approches. En collaboration avec Y. GUIRAUD, avec cette même volonté de convergence, nous développons une méthode de complétion combinant la réduction de Knuth-Bendix et la théorie de Garside [22].

## 5.2 Deux propriétés duales

Tous les ingrédients sont maintenant disponibles pour pouvoir interpréter efficacement et naturellement comme monoïde d'automate tout monoïde automatique admettant un langage spécial de formes normales, à savoir une normalisation quadratique satisfaisant la condition  $(\blacklozenge)$ .

Nous verrons rapidement que les semigroupes qui ne sont pas des monoïdes (sans élément unité 1 donc) mais qui admettent néanmoins une normalisation quadratique satisfaisant la condition  $(\blacklozenge)$  requièrent un traitement particulier et le résultat est possiblement non-optimal dans ce cas. Malgré cela, nous souhaitons garder une approche la plus générale possible.

L'idée est de construire un automate de Mealy encodant le comportement du langage de formes normales vis-à-vis de la multiplication.

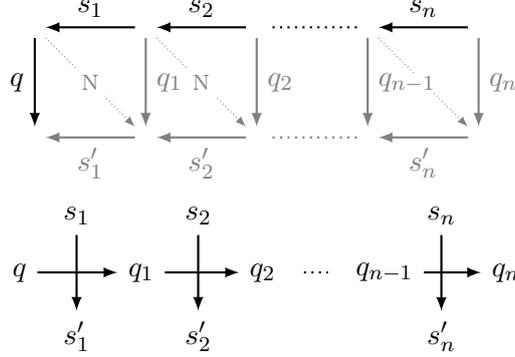
Étant donné un semigroupe  $S$  avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ , nous lui associons l'automate de Mealy  $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}, \mathcal{N}} = (\mathcal{Q}, \mathcal{Q}, \tau, \sigma)$  défini de sorte que, pour tout  $(a, b) \in \mathcal{Q}^2$ ,  $\sigma_b(a)$  est l'élément de  $\mathcal{Q}$  à droite dans la forme normale  $\mathcal{N}(ab)$  de  $ab$  et  $\tau_a(b)$  celui à gauche :

$$\mathcal{N}(ab) = \tau_a(b)\sigma_b(a).$$

Cette correspondance s'interprète simplement en terme de diagrammes en carré et en croix :



Ainsi, pour  $N(\mathbf{s}) = s_n \cdots s_1$  et  $N(\mathbf{s}q) = q_n s'_n \cdots s'_1$ , nous obtenons diagrammatiquement :



Nous choisissons à dessein de toujours dessiner un diagramme en carré de normalisation dans le sens droite-gauche, de sorte qu'il coïncide avec le diagramme en croix associé (lui toujours dessiné dans le sens gauche-droite). La fonction  $\sigma_q$  induite par l'état  $q$  envoie essentiellement toute forme normale (écrite ou lue de droite à gauche) sur la forme normale de son produit à droite par  $q$  (écrite ou lue de droite à gauche).

Nous visons maintenant à faire apparaître des hypothèses raisonnables (le plus souvent optimales) pour qu'une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, N)$  associée à un semigroupe original  $S$  engendre un semigroupe  $\langle \mathcal{M}_{\mathcal{Q}, N} \rangle_+$  qui approxime  $S$  aussi précisément que possible. Puisque les ensembles générateurs coïncident par définition, nous allons nous concentrer d'abord sur le cas où  $S$  doit être un quotient de  $\langle \mathcal{M}_{\mathcal{Q}, N} \rangle_+$  (approximation par le haut), et ensuite, sur le cas où  $\langle \mathcal{M}_{\mathcal{Q}, N} \rangle_+$  doit être un quotient de  $S$  (approximation par le bas).

Avant d'énoncer le résultat d'approximation par le haut, nous rappelons simplement que les semigroupes peuvent sembler bien plus difficiles à manipuler, en particulier quand il s'agit d'automatisme (voir [85]) ou d'autosimilarité (voir [42, 43]). À partir de tout semigroupe  $S$  (non-monoïde) avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, N)$ , on obtient un monoïde  $S^1$  avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}^1, N^1)$  en adjoignant une unité  $1$ , en posant alors  $\mathcal{Q}^1 = \mathcal{Q} \sqcup \{1\}$  et en définissant  $N^1$  par  $N^1(\mathbf{w}) = N(\mathbf{w})$  et

$$N^1(\mathbf{1w}) = N^1(\mathbf{w1}) = 1N(\mathbf{w}) \quad (\square)$$

pour  $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}^+$ . Le choix fait pour la condition  $(\square)$  devient naturel dès que l'on envisage l'unité  $1$  (adjoindre ou non) comme un élément factice qui assure simplement la préservation de la longueur par  $N^1$ .

**LEMME 5.4 ([20])**

Soit  $S^1$  un monoïde avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}^1, N^1)$  satisfaisant la condition  $(\square)$ . L'automate de Mealy  $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}^1, N^1}$  engendre un monoïde duquel  $S^1$  est un quotient.

Bien que spécifique à un cadre monoïdal et requérant ainsi la condition ad hoc  $(\square)$ , le résultat précédant ne repose sinon que sur la notion de normalisation quadratique et sur la définition idoine d'automate de Mealy associé. Pour l'énoncé d'approximation par le bas, nous devons considérer une hypothèse supplémentaire, qui s'avère nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 5.5 ([20])

Soit  $S$  un semigroupe avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ . Si la condition  $(\blacklozenge)$  est satisfaite, l'automate de Mealy  $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}, \mathcal{N}}$  engendre un semigroupe quotient de  $S$ . La réciproque est vraie pourvu que la condition  $(\boxplus)$  soit vérifiée.

Des lemme 5.4 et proposition 5.5, nous déduisons le résultat principal suivant.

THÉORÈME 5.6 ([20])

Soit  $S$  un monoïde avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$  satisfaisant les conditions  $(\boxplus)$  et  $(\blacklozenge)$ . L'automate de Mealy  $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}, \mathcal{N}}$  engendre un monoïde isomorphe à  $S$ .

Voici une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 5.7 ([20])

Tout monoïde avec une normalisation quadratique satisfaisant les conditions  $(\boxplus)$  et  $(\blacklozenge)$  est résiduellement fini.

Revenons à l'approche originale en terme de transducteur due à W. P. THURSTON [71].

À toute normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ , nous associons le *transducteur de Thurston* défini comme l'automate de Mealy  $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}, \mathcal{N}}$  avec ensemble d'états  $\mathcal{Q}$ , alphabet  $\mathcal{Q}$  et transitions comme ceci :



COROLLAIRE 5.8 ([20])

Soit  $S$  un monoïde avec une normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$  satisfaisant les conditions  $(\boxplus)$  et  $(\blacklozenge)$ . Le transducteur de Thurston  $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}, \mathcal{N}}$  et l'automate de Mealy  $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}, \mathcal{N}}$  étant des automates duaux,  $S$  possède les deux propriétés explicitement duales d'automaticité et d'autosimilarité.

### 5.3 Exemples et contreexemples

Notre premier exemple est simple mais particulièrement instructif.

#### EXEMPLE 5.9

Tout monoïde fini  $\mathcal{V}$  (en particulier tout groupe fini) est un monoïde automatique-autosimilaire. Considérons sa normalisation quadratique  $(\mathcal{V}, \mathcal{N})$  avec  $\mathcal{N}(ab) = 1(ab)$  pour chaque  $(a, b) \in \mathcal{V}^2$ . La figure 5.3 montre comment calculer sa complexité  $(3, 2)$ , validant la condition  $(\blacklozenge)$  pour appliquer le théorème 5.6. Sans surprise, dans le cas où  $\mathcal{V}$  est un groupe, l'automate de Mealy associé  $\mathcal{M}_{\mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{N}}$  est inversible et engendre bien  $\mathcal{V}$  comme un groupe.

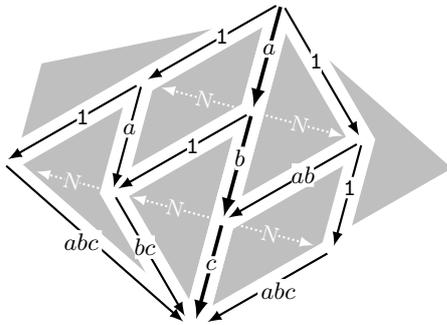


FIGURE 5.3 – Calcul de la complexité  $(3, 2)$  pour tout monoïde fini  $\mathcal{V}$  comme dans l'exemple 5.9.

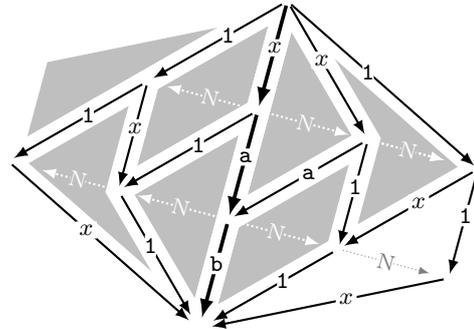


FIGURE 5.4 – Calcul de la complexité  $(3, 4)$  pour le monoïde bicyclique  $\mathbf{B}$  de l'exemple 5.10.

Comme mentionné en ouverture et montré sur la figure 5.1, il existe des semigroupes automatiques qui ne peuvent être des semigroupes d'automate.

#### EXEMPLE 5.10

Le monoïde bicyclique  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{ab} = 1 \rangle_+^1$  est connu comme étant automatique et non résiduellement fini. Il ne peut donc pas être un semigroupe d'automate. Considérons pour  $\mathbf{B}$  la normalisation quadratique  $(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1\}, \mathcal{N})$  avec  $\mathcal{N}(\mathbf{ab}) = 11$ ,  $\mathcal{N}(x1) = 1x$  pour  $x \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ , et  $\mathcal{N}(xy) = xy$  sinon. La figure 5.4 illustre le calcul (sur le mot témoin  $x\mathbf{ab}$  avec  $x \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ) de sa complexité  $(3, 4)$ . La condition  $(\blacklozenge)$  n'est pas satisfaite et le théorème 5.6 ne peut s'appliquer. Précisément, nous avons  $\sigma_{\mathbf{ab}}(x) = 1 \neq x = \sigma_{11}(x)$  pour  $x \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ , d'où  $\sigma_{\mathbf{ab}} \neq \sigma_1 = \sigma_{11}$ . Le lemme 5.4 indique en effet que  $\mathbf{B}$  n'est qu'un quotient de  $\mathcal{M}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1\}, \mathcal{N}}$ .

Par comparaison, l'un des exemples non-triviaux les plus simples pourrait être le suivant.

EXEMPLE 5.11

Le monoïde automatique  $\langle a, b : ab = a \rangle_+^1$  est simplifiable à droite et admet la famille de Garside à droite  $\mathcal{Q} = \{1, a, b\}$ . Selon les théorèmes 5.3 et 5.6, c'est par conséquent un monoïde d'automate. L'automate de Mealy associé est représenté sur la figure 5.5. Ce monoïde se trouve être le plus petit membre non-trivial commun à la famille des monoïdes de Baumslag-Solitar (voir [85] par exemple), nommément  $\mathbf{BS}_+^1(1, 0)$ , et à la vaste famille des monoïdes, que nous appelons volontiers monoïdes d'Artin-Krammer et qui ont été introduit par D. KRAMMER dans [93] (voir aussi [83, 84, 111]), nommément  $\mathbf{AK}_+^1(\Gamma)$  associé à la matrice à la Coxeter  $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

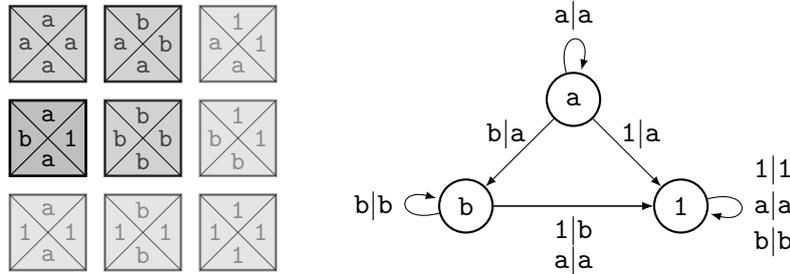


FIGURE 5.5 – L'automate de Mealy associé au monoïde  $\langle a, b : ab = a \rangle_+^1$  de l'exemple 5.11.

Les exemples 5.12 et 5.13 décrivent des éléments caractéristiques de ces deux familles.

EXEMPLE 5.12

Le monoïde d'Artin-Krammer suivant est emblématique :

$$\mathbf{AK}_+^1\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left\langle a, b, c : \begin{array}{l} \mathbf{abab} = \mathbf{aba} \\ \mathbf{ac} = \mathbf{ca} \\ \mathbf{bcbc} = \mathbf{bcb} \end{array} \right\rangle_+^1.$$

Il est présenté comme une version asymétrique du monoïde classique des tresses à 4 brins  $\mathbf{B}^+(A_3)$  associé à la matrice de Coxeter  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Il est simplifiable à droite, mais pas à gauche. Représentée sur la figure 5.6, sa famille de Garside minimale est constituée des 13 éléments correspondant aux sommets colorés. Les 33 autres sommets de construction correspondent à différents diviseurs à droite. Ainsi, l'ensemble ne constitue pas une famille close, mais forme comme un silex qui encode toute sa combinatoire. Conformément au théorème 5.6,  $\mathbf{AK}_+^1\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$  est un monoïde d'automate.

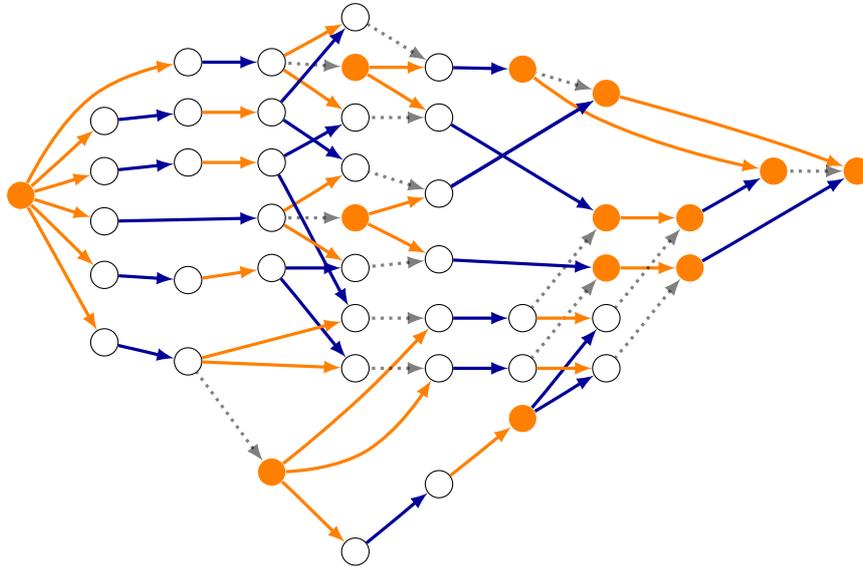


FIGURE 5.6 – La famille de Garside minimale du monoïde  $\mathbf{AK}_+^1\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$  de l'exemple 5.12.

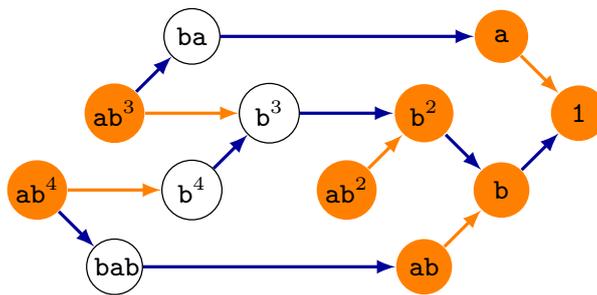


FIGURE 5.7 – La famille de Garside minimale du monoïde  $\mathbf{BS}_+^1(3, 2)$  de l'exemple 5.13.

EXEMPLE 5.13

Considérons le monoïde de Baumslag-Solitar  $\mathbf{BS}_+^1(3, 2) = \langle a, b : ab^3 = b^2a \rangle_+^1$ . Représentée sur la figure 5.7, sa famille de Garside minimale contient huit éléments (sommets colorés) et fait de lui un monoïde automatique-autosimilaire. Il s'agit d'un exemple de monoïde d'automate plongeable dans un groupe mais dont le groupe enveloppant n'est pas un groupe d'automate. En effet, le groupe de Baumslag-Solitar  $\mathbf{BS}(3, 2)$  est précisément connu comme un exemple de groupe qui n'est pas résiduellement fini, et ne peut donc pas être un groupe d'automate. La question cependant reste ouverte pour ces monoïdes d'automate dont le groupe enveloppant est un groupe de fractions.

QUESTION 5.14

Le groupe de fractions d'un monoïde d'automate est-il un groupe d'automate ?

Concernant toujours la plongeabilité dans un groupe, nous donnons un exemple de monoïde d'automate simplifiable qui ne peut se plonger dans un groupe.

EXEMPLE 5.15

Le monoïde  $\mathbf{T} = \langle a, b, c, d, a', b', c', d' : ab = cd, a'b' = c'd', a'd = c'b \rangle_+^1$  est connu suite aux travaux d'A. I. MALCEV [100–102] comme étant simplifiable mais ne pouvant se plonger dans un groupe : de ces trois relations, on ne peut en effet déduire la quatrième  $ad' = cb'$ . La normalisation quadratique  $(\{a, b, c, d, a', b', c', d'\}, N)$  définie par  $N(ab) = cd$ ,  $N(a'b') = c'd'$  et  $N(a'd) = c'b$  par exemple admet une complexité  $(3, 3)$ , satisfait donc la condition  $(\blacklozenge)$  et le théorème 5.6 s'applique. Ceci répond en particulier à une question d'A. J. CAIN [47].

Rétrospectivement, nous pouvons simplement mentionner qu'il y a quinze ans, nous répondions à deux questions de M. DROSTE et D. KUSKE au sujet des monoïdes de divisibilité, qui sont une généralisation algébrique naturelle des monoïdes de traces de Mazurkiewicz, à savoir des monoïdes dans lesquels la distributivité des treillis de divisibilité est maintenue comme hypothèse, mais pour lesquels les possibles relations entre générateurs ne sont plus nécessairement des commutations (voir [69, 94]).

Dans [6], nous précisons l'analogie avec les monoïdes de Garside (rappelons-le ici pour forcer le parallélisme : généralisation algébrique naturelle des monoïdes de tresses, à savoir des monoïdes dans lesquels l'existence de ppcm pour la division est gardée comme hypothèse, mais pour lesquels les possibles relations entre générateurs ne sont plus nécessairement de type Coxeter), en montrant que le quasicentre de ces monoïdes peut être étudié et décrit de façon similaire, et en déduisant une description de l'intersection entre ces deux classes de monoïdes.

Dans [7], nous définissions une forme normale à droite (d'emblée moins naturelle que la forme normale à gauche définie par Kuske [94] comme généralisation de celle de Cartier-Foata provenant de la théorie des traces de Mazurkiewicz [51, 67]) et montrions que tout monoïde de divisibilité à gauche admet un transducteur fini explicite qui calcule les formes normales à droite en temps quadratique. Reprenant l'approche originale de Thurston pour le monoïde de tresses [71], cela généralisait les résultats obtenus pour les monoïdes d'Artin-Tits [53] et les monoïdes de Garside [58].

EXEMPLE 5.16

Les monoïdes de divisibilité sont éligibles pour notre approche générale. Un monoïde  $M$  est appelé *monoïde de divisibilité (à gauche)* si  $M$  est simplifiable et finiment engendré par ses éléments irréductibles, si tout couple d'éléments admet un pgcd à gauche et si tout élément domine un treillis distributif. Tout monoïde de trace (finiment engendré) est un monoïde de divisibilité. Les deux monoïdes  $\langle x, y, z : x^2 = yz \rangle_+^1$  et  $\langle x, y, z : x^2 = yz, yx = z^2 \rangle_+^1$  sont des monoïdes de divisibilité, qui ne sont pas des monoïdes de trace. La condition de distributivité (sur les éléments de longueur 3) implique que tout monoïde de divisibilité admet une normalisation quadratique de complexité au plus  $(3, 3)$  et, par le théorème 5.6, est un monoïde d'automate.

Certains monoïdes non-simplifiables ni à gauche ni à droite admettent de jolies formes normales et des structures automatiques associées (voir [48]) :

EXEMPLE 5.17

Selon M.-P. SCHÜTZENBERGER [117], les monoïdes plaxiques font partie des monoïdes les plus fondamentaux. Le monoïde plaxique de rang 2 est

$$\mathbf{P}_2 = \langle a, b : aba = baa, bab = bba \rangle_+^1.$$

Comme noté dans [61, 62],  $\mathbf{P}_2$  admet la normalisation quadratique  $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$  avec  $\mathcal{Q} = \{1, a, b, ba\}$ ,  $\mathcal{N}(ba) = 1(ba)$ ,  $\mathcal{N}((ba)a) = a(ba)$ ,  $\mathcal{N}((ba)b) = b(ba)$ ,  $\mathcal{N}(1x) = x1$  pour  $x \in \mathcal{Q}$  et  $\mathcal{N}(xy) = xy$  sinon. Celle-ci est de complexité  $(3, 3)$ , donc satisfait la condition  $(\blacklozenge)$  et le théorème 5.6 garantit que  $\mathbf{P}_2$  est un monoïde d'automate. Notons que, pour un monoïde plaxique de plus haut rang  $\mathbf{P}_X$ , il suffit de la même façon de prendre pour  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des *colonnes*, c'est-à-dire les produits strictement décroissants d'éléments de  $X$ . Les monoïdes chinois [48] admettent eux des normalisations quadratiques avec complexité  $(4, 3)$  et satisfaisant donc la condition  $(\blacklozenge)$ . Le théorème 5.6 garantit que les monoïdes chinois sont également autosimilaires.

Pour conclure, nous souhaitons illustrer complètement la dualité entre « être un semi-groupe automatique » et « être un semi-groupe d'automate » en exposant un exemple paradigmatique.

EXEMPLE 5.18

Les monoïdes de tresses ont été utilisés par W. P. THURSTON [71, Chapitre 9] pour décrire son idée de construire un unique transducteur qui calcule la forme normale—appelée depuis forme d’Adian-Garside-Thurston ([23, 73]—via des exécutions itérées. Rencontré dans la section 3.2, rappelons que le monoïde classique des tresses à 3 brins est

$$\mathbf{B}^+(A_2) = \langle \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle_+^1.$$

Conformément au corollaire 5.8, son transducteur de Thurston et son automate de Mealy sont représentés sur la figure 5.9 : ces automates duaux font de  $\mathbf{B}^+(A_2)$  un monoïde à la fois automatique et autosimilaire. Nous pouvons espérer que cette démarche apporte un peu de lumière sur la question 5.1 de savoir si les groupes de tresses sont des groupes d’automate.

Mentionnons que, de façon disjointe de l’approche présentée dans ce chapitre 5, nous pouvons montrer que le groupe  $\mathbf{B}(A_2)$  des tresses à 3 brins est un sous-groupe du groupe de l’automate à 3 lettres et 8 états de la figure 5.8. Indépendamment, Lavrenyuk, Mazorchuk, Oliynyk, et Sushchanskiï [95] ont décrit des automates à 3 lettres pour  $\sigma_1$  (14 états) et pour  $\sigma_2$  (13 états).

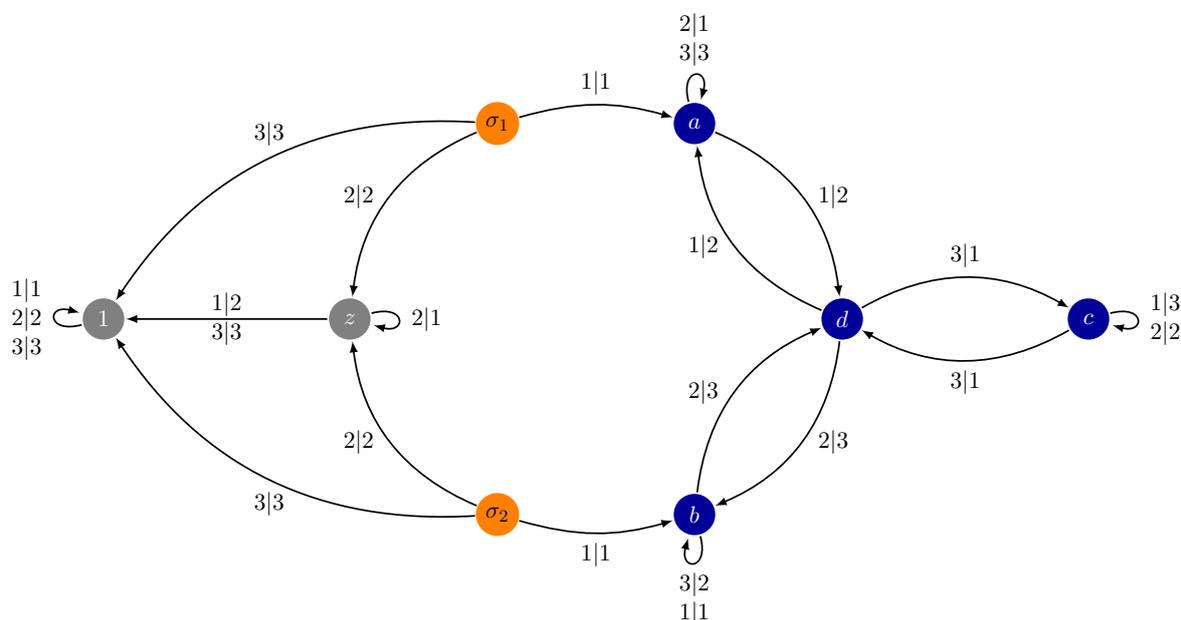


FIGURE 5.8 – Un automate de Mealy dont les états gris engendrent  $\mathbb{Z}$ , dont les états bleus engendrent le groupe  $(\mathbb{Z} \star_{\mathbb{Z}} \mathbf{B}(A_2)) / \mathbf{Z}(\mathbf{B}(A_2))$ , et dont les états oranges engendrent le groupe  $\mathbf{B}(A_2)$ , voir l’exemple 5.18.

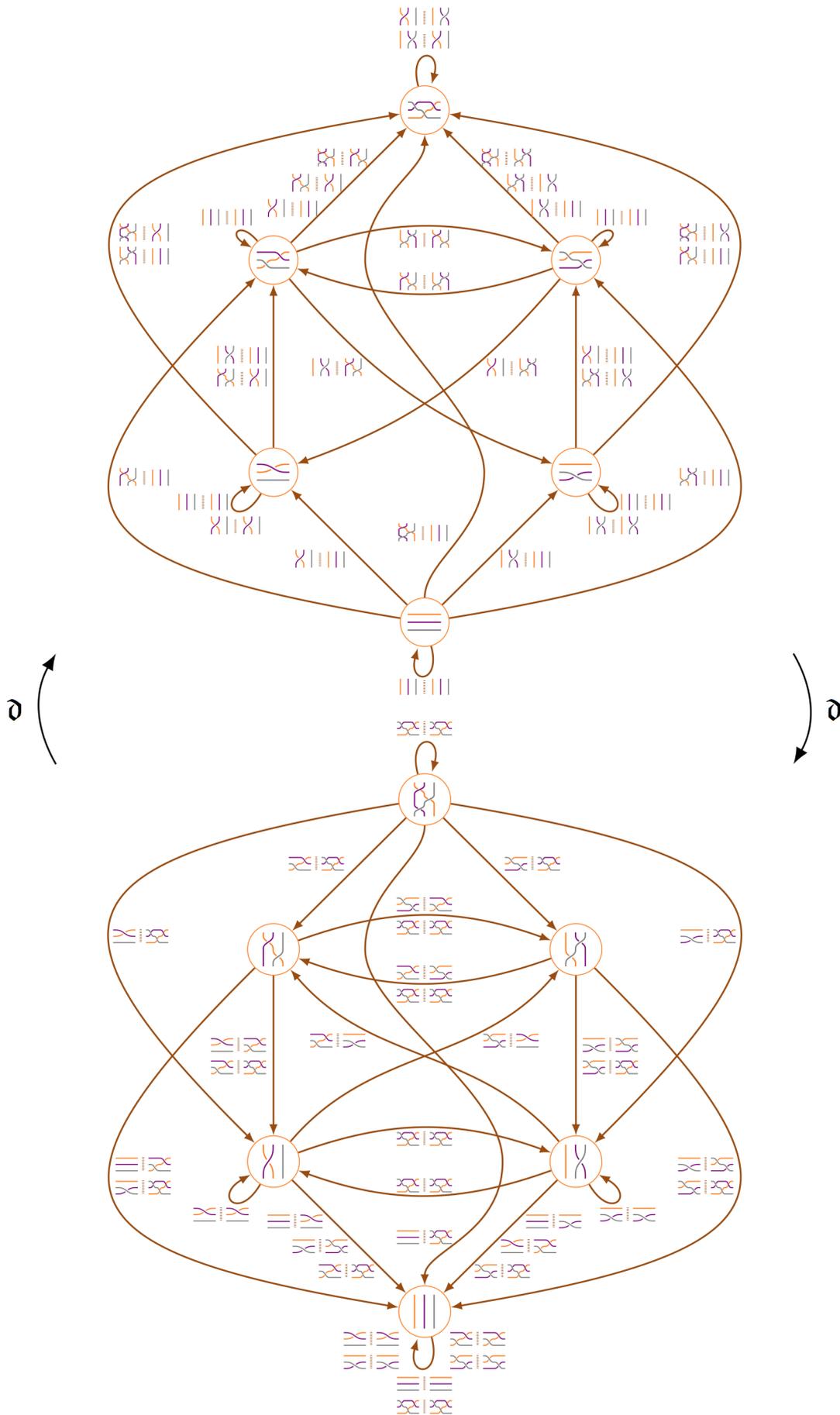


FIGURE 5.9 – Le transducteur de Thurston (en-haut) *vs* l'automate de Mealy (en-bas) pour le monoïde classique  $\mathbf{B}^+(A_2)$  des tresses à 3 brins de l'exemple 5.18.



# Bibliographie personnelle

- [1] Matthieu PICANTIN.  
“Petits groupes gaussiens”.  
Thèse de Doctorat. Univ Caen Normandie, 2000.  
cité pages 1, 44, 45, 49, 61, 64.
- [2] Matthieu PICANTIN.  
“The conjugacy problem in small Gaussian groups”.  
Communications in Algebra **29-3** (2001) 1021–1039.  
cité pages 44, 62.
- [3] Matthieu PICANTIN.  
“The center of thin Gaussian groups”.  
Journal of Algebra **245-1** (2001) 92–122.  
cité pages 44, 46, 55, 61, 62.
- [4] Matthieu PICANTIN.  
“Explicit presentations for the dual braid monoids”.  
Comptes Rendus de l’Académie des Sciences **334-10** (2002) 843–848.  
cité pages 1, 43, 50–52.
- [5] Matthieu PICANTIN.  
“Automatic structures for torus link groups”.  
Journal of Knot Theory and its Ramifications **12-6** (2003) 833–866.  
cité pages 1, 45, 64, 71.
- [6] Matthieu PICANTIN.  
“Garside monoids vs divisibility monoids”.  
Mathematical Structures in Computer Science **15-2** (2005) 231–242.  
cité pages 1, 61, 86.
- [7] Matthieu PICANTIN.  
“Finite transducers for divisibility monoids”.  
Theoretical Computer Science **362-1-3** (2006) 207–221.  
cité pages 1, 71, 87.
- [8] Ruth CORRAN et Matthieu PICANTIN.  
“A new Garside structure for the braid groups of type  $(e, e, r)$ ”.  
Journal of the London Mathematical Society **84-3** (2011) 689–711.  
cité pages 1, 43, 52–54.

- [9] Matthieu PICANTIN.  
“Selfdual lattices *vs* permeable lattices”.  
En cours de rédaction (2011).  
cité page 1.
- [10] Matthieu PICANTIN.  
“A (not so) wild Garside structure for hyperoctahedral braid groups”.  
En cours de rédaction (2011).  
cité pages 1, 58.
- [11] Matthieu PICANTIN.  
“A triple duality for hyperoctahedral (braid) groups”.  
En cours de rédaction (2012).  
cité pages 1, 55, 58.
- [12] Ali AKHAVI, Ines KLIMANN, Sylvain LOMBARDY, Jean MAIRESSE et Matthieu PICANTIN.  
“On the finiteness problem for automaton (semi)groups”.  
International Journal of Algebra and Computation **22-6** (2012) 1–26.  
cité pages 1, 5, 7, 8, 10, 19–21, 37.
- [13] Ines KLIMANN, Jean MAIRESSE et Matthieu PICANTIN.  
“Implementing computations in automaton (semi)groups”.  
17th International Conference on Implementation and Application of Automata (CIAA 2012).  
Lecture Notes in Computer Science **t. 7381** (2012) 240–252.  
cité pages 1, 5, 7, 11, 38.
- [14] Matthieu PICANTIN.  
“Tree products of cyclic groups and HNN extensions”.  
Groupes d’Artin-Tits, automorphismes et questions liées.  
URL : <http://arxiv.org/abs/1306.5724>  
cité pages 1, 61, 62, 65, 66, 69, 71, 72.
- [15] Ines KLIMANN et Matthieu PICANTIN.  
“A Characterization of Those Automata That Structurally Generate Finite Groups”.  
11th Latin American Theoretical INformatics Symposium (LATIN 2014).  
Lecture Notes in Computer Science **t. 8392** (2014) 180–189.  
cité pages 1, 5.
- [16] Thibault GODIN, Ines KLIMANN et Matthieu PICANTIN.  
“On torsion-free semigroups generated by invertible reversible Mealy automata”.  
9th International Conference on Language and Automata Theory and Applications (LATA 2015).  
Lecture Notes in Computer Science **t. 8977** (2015) 328–339.  
cité pages 1, 20, 30.
- [17] Ines KLIMANN, Matthieu PICANTIN et Dmytro SAVCHUK.  
“Orbit automata as a new tool to attack the order problem in automaton groups”.  
Journal of Algebra **445** (2016) 433–457.  
cité pages 1, 30–32, 35.
- [18] Ines KLIMANN, Matthieu PICANTIN et Dmytro SAVCHUK.  
“A 3-state reversible Mealy automaton cannot generate an infinite Burnside group”.  
International Journal of Foundations of Computer Science (2017) to appear.  
cité pages 1, 30, 31.

- [19] Daniele D'ANGELI, Thibault GODIN, Ines KLIMANN, Matthieu PICANTIN et Emanuele RODARO.  
“Boundary action of automaton groups without singular points and Wang tilings”.  
URL : <http://arxiv.org/abs/1604.07736>  
cité pages 1, 5, 12.
- [20] Matthieu PICANTIN.  
“Automatic semigroups *vs* automaton semigroups”.  
New Trends in Automata Groups et Semigroups.  
URL : <http://arxiv.org/abs/1609.09364>  
cité pages 1, 67, 75, 81, 82.
- [21] Ines KLIMANN et Matthieu PICANTIN.  
“Automaton (semi)groups: Wang tilings and Schreier tries”.  
Sequences, Groups, and Number Theory.  
Valérie BERTHÉ et Michel RIGO, éd. (2017).  
cité pages 5, 15–17, 26, 28, 30, 75.
- [22] Yves GUIRAUD et Matthieu PICANTIN.  
“A completion procedure combining Knuth-Bendix and Garside theories”.  
En cours de rédaction (2017).  
cité page 80.



# Bibliographie générale

- [23] Sergei I. ADIAN.  
“Fragments of the word Delta in a braid group”.  
Matematicheskie Zametki Akademii Nauk SSSR **36-1** (1984) 25–34. cité page 88.
- [24] Stanislas V. ALĚŠIN.  
“Finite automata and the Burnside problem for periodic groups”.  
Akademiya Nauk SSSR. Matematicheskie Zametki **11** (1972) 319–328. cité page 19.
- [25] Stanislav V. ALĚŠIN.  
“A free group of finite automata”.  
Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika, Mekhanika **4** (1983) 12–14. cité page 25.
- [26] Daniel ALLCOCK.  
“Braid pictures for Artin groups”.  
Transactions of the American Mathematical Society **354-9** (2002) 3455–3474. cité page 50.
- [27] Christos A. ATHANASIADIS et Victor REINER.  
“Noncrossing partitions for the group  $D_n$ ”.  
SIAM Journal on Discrete Mathematics **18-2** (2004) 397–417. cité page 48.
- [28] Laurent BARTHOLDI.  
*FR – GAP package for computations with functionally recursive groups, V. 2.1.1.*  
URL : <http://www.gap-system.org/Packages/fr.html>  
cité pages 25, 31, 37.
- [29] Laurent BARTHOLDI et Pedro V. SILVA.  
“Groups defined by automata”.  
AutoMathA Handbook.  
Jean-Éric PIN, éd. (2010).  
URL : <http://arxiv.org/abs/1012.1531>. cité page 75.

- [30] Gilbert BAUMSLAG, Alexei G. MYASNIKOV et Vladimir SHPILRAIN.  
“Open problems in combinatorial group theory. Second edition”.  
Combinatorial and geometric group theory.  
Contemporary Mathematics **t. 296**.  
(2002) 1–38.  
cité pages 61, 70, 72.
- [31] Gilbert BAUMSLAG et Tekla TAYLOR.  
“The centre of groups with one defining relator”.  
Mathematische Annalen **175** (1968) 315–319.  
cité page 71.
- [32] Robert BERGER.  
“The undecidability of the domino problem”.  
Memoirs of the American Mathematical Society **66** (1966) 72.  
cité page 13.
- [33] David BESSIS.  
“Zariski theorems and diagrams for braid groups”.  
Inventiones Mathematicae **145-3** (2001) 487–507.  
cité page 48.
- [34] David BESSIS.  
“The dual braid monoid”.  
Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure **36-5** (2003) 647–683.  
cité pages 43, 48, 51, 52, 54.
- [35] David BESSIS.  
“Finite complex reflection arrangements are  $K(\pi, 1)$ ”.  
Annals of Mathematics **181-3** (2015) 809–904.  
cité page 48.
- [36] David BESSIS et Ruth CORRAN.  
“Non-crossing partitions of type  $(e, e, r)$ ”.  
Advances in Mathematics **202-1** (2006) 1–49.  
cité pages 48, 52.
- [37] David BESSIS, François DIGNE et Jean MICHEL.  
“Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid”.  
Pacific Journal of Mathematics **205-2** (2002) 287–309.  
cité pages 48, 51.
- [38] Joan BIRMAN, Ki Hyoungh KO et Sang Jin LEE.  
“A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups”.  
Advances in Mathematics **139-2** (1998) 322–353.  
cité pages 43, 49, 51.
- [39] Ievgen V. BONDARENKO, Rostislav I. GRIGORCHUK, Rostyslav KRAVCHENKO, Yevgen MUNTJAN, Volodymyr V. NEKRASHEVYCH, Dmytro SAVCHUK et Zoran ŠUNIĆ.  
“Classification of groups generated by 3-state automata over 2-letter alphabet”.  
Algebra and Discrete Mathematics **1** (2008) 1–163.  
cité page 32.

- 
- [40] Egbert BRIESKORN et Kyoji SAITO.  
“Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen”.  
Inventiones Mathematicae **17** (1972) 245–271.  
cité pages 43, 61.
- [41] Michel BROUÉ, Gunter MALLE et Raphaël ROUQUIER.  
“Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras”.  
Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **500** (1998) 127–190.  
cité page 52.
- [42] Tara BROUGH et Alan J. CAIN.  
“Automaton semigroup constructions”.  
Semigroup Forum **90-3** (2015) 763–774.  
cité pages 76, 81.
- [43] Tara BROUGH et Alan J. CAIN.  
“Automaton semigroups: new constructions results and examples of non-automaton semigroups”.  
Theoretical Computer Science **674** (2017) 1–15.  
cité pages 76, 81.
- [44] Kai-Uwe BUX et al.  
“Selfsimilar groups and conformal dynamics - Problem List, 2006”.  
URL : <http://www.aimath.org/WWN/selfsimgroups/selfsimgroups.pdf>  
cité page 76.
- [45] Alan J. CAIN.  
“Automaton semigroups”.  
Theoretical Computer Science **410** (2009) 5022–5038.  
cité page 76.
- [46] Alan J. CAIN.  
“Automatic structures for subsemigroups of Baumslag-Solitar semigroups”.  
Semigroup Forum **87-3** (2013) 537–552.  
cité page 67.
- [47] Alan J. CAIN.  
Personal communication.  
2016  
cité page 86.
- [48] Alan J. CAIN, Robert D. GRAY et António MALHEIRO.  
“Rewriting systems and biautomatic structures for Chinese, hypoplactic, and Sylvester monoids”.  
International Journal of Algebra and Computation **25-1-2** (2015) 51–80.  
cité page 87.
- [49] Filippo CALLEGARO et Ivan MARIN.  
“Homology computations for complex braid groups”.  
Journal of the European Mathematical Society **16-1** (2014) 103–164.  
cité page 52.

- [50] Louis CAPONI.  
“On classification of groups generated by automata with 4 states over a 2-letter alphabet”.  
Mémoire de Master. Univ South Florida, 2014  
cité pages 30–32.
- [51] Pierre CARTIER et Dominique FOATA.  
*Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.*  
Lecture notes in mathematics, volume 85.  
Springer, 1969.  
cité page 87.
- [52] Frédéric CHAPOTON.  
“Enumerative properties of generalized associahedra”.  
Séminaire Lotharingien de Combinatoire **51** (2005) 1–16.  
cité page 48.
- [53] Ruth CHARNEY.  
“Artin groups of finite type are biautomatic”.  
Mathematische Annalen **292-4** (1992) 671–683.  
cité page 87.
- [54] Wei-Liang CHOW.  
“On the algebraic braid group”.  
Annals of Mathematics **49** (1948) 654–658.  
cité page 58.
- [55] Alfred H. CLIFFORD et Gordon B. PRESTON.  
*The algebraic theory of semigroups. Vol. I.*  
Mathematical Surveys, volume 7.  
American Mathematical Society, 1961.  
cité page 44.
- [56] Karel CULIK II.  
“An aperiodic set of 13 Wang tiles”.  
Discrete Mathematics **160** (1996) 245–251.  
cité page 12.
- [57] Daniele D’ANGELI et Emanuele RODARO.  
“Freeness of automata groups vs boundary dynamics”.  
Journal of Algebra **462** (2016) 115–136.  
cité page 25.
- [58] Patrick DEHORNOY.  
“Groupes de Garside”.  
Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure **35-2** (2002) 267–306.  
cité pages 43, 44, 71, 87.
- [59] Patrick DEHORNOY.  
“Complete positive group presentations”.  
Journal of Algebra **268-1** (2003) 156–197.  
cité page 44.

- 
- [60] Patrick DEHORNOY.  
“The subword reversing method”.  
International Journal of Algebra and Computation **21-1-2** (2011) 71–118.  
cité page 44.
- [61] Patrick DEHORNOY.  
“Garside and quadratic normalisation: a survey”.  
19th International Conference on Developments in Language Theory (DLT 2015).  
Lecture Notes in Computer Science **t. 9168** (2015) 14–45.  
cité pages 77, 78, 87.
- [62] Patrick DEHORNOY et Yves GUIRAUD.  
“Quadratic normalization in monoids”.  
International Journal of Algebra and Computation **26-5** (2016) 935–972.  
cité pages 77–80, 87.
- [63] Patrick DEHORNOY et Luis PARIS.  
“Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups”.  
Proceedings of the London Mathematical Society **79-3** (1999) 569–604.  
cité pages 43, 44, 49, 64.
- [64] Patrick DEHORNOY et al.  
*Foundations of Garside theory*.  
Tracts in Mathematics, volume 22.  
European Mathematical Society, 2015.  
URL : <http://www.math.unicaen.fr/~garside/Garside.pdf>  
cité pages 43–46, 61, 64, 72, 77–79.
- [65] Martin DELACOURT et Nicolas OLLINGER.  
“Permutive one-way cellular automata and the finiteness problem for automaton groups”.  
13th Conference Computability in Europe (CiE 2017).  
Lecture Notes in Computer Science (2017).  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01436460>.  
cité pages 15, 16.
- [66] Pierre DELIGNE.  
“Les immeubles des groupes de tresses généralisés”.  
Inventiones Mathematicae **17** (1972) 273–302.  
cité pages 43, 61.
- [67] Volker DIEKERT et Gregorz ROZENBERG, édés.  
*The book of traces*.  
Singapore River Edge, 1995.  
cité page 87.
- [68] François DIGNE, Ivan MARIN et Jean MICHEL.  
“The center of pure complex braid groups”.  
Journal of Algebra **347** (2011) 206–213.  
cité page 52.

- [69] Manfred DROSTE et Dietrich KUSKE.  
 “Recognizable languages in divisibility monoids”.  
 Mathematical Structures in Computer Science **11-6** (2001) 743–770.  
 cité page 86.
- [70] Murray ELDER.  
 “Automaticity, almost convexity and falsification by fellow traveler properties of some finitely presented groups”.  
 Thèse de Doctorat. Univ Melbourne, 2000.  
 cité page 76.
- [71] David B. A. EPSTEIN, James W. CANNON, Derek F. HOLT, Silvio V. F. LEVY, Michael S. PATERSON et William P. THURSTON.  
*Word processing in groups*.  
 Jones et Bartlett Publishers, 1992.  
 cité pages 46, 77, 82, 87, 88.
- [72] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, V. 4.8.6*.  
 The GAP Group.  
 URL : <http://www.gap-system.org>  
 cité page 25.
- [73] Frank A. GARSIDE.  
 “The braid group and other groups”.  
 The Quarterly Journal of Mathematics **20** (1969) 235–254.  
 cité pages 43, 88.
- [74] Volker GEBHARDT et Stephen TAWN.  
 “Zappa–Szép products of Garside monoids”.  
 Mathematische Zeitschrift **282-1** (2016) 341–369.  
 cité page 61.
- [75] Meinolf GECK, Gerhard HISS, Frank LÜBECK, Gunter MALLE, Jean MICHEL et Götz PFEIFFER.  
*CHEVIE – GAP package “Symbolic calculations with generic character tables of groups of Lie type, Coxeter groups, Iwahori-Hecke algebras and other related structures”, V. 3.1*.  
 URL : <http://www.gap-system.org/Gap3/Packages3/chevie.html>  
 cité page 51.
- [76] Pierre GILLIBERT.  
 “The finiteness problem for automaton semigroups is undecidable”.  
 International Journal of Algebra and Computation **24-1** (2014) 1–9.  
 cité pages 5, 13, 14.
- [77] Yair GLASNER et Shahar MOZES.  
 “Automata and square complexes”.  
 Geometriae Dedicata **111** (2005) 43–64.  
 cité pages 7, 25.

- [78] Thibault GODIN.  
“Machines de Mealy, (semi)groupes d’automate, problèmes de décision et génération aléatoire”.  
Thèse de Doctorat. Univ Paris Diderot, 2017.  
cité page 30.
- [79] Thibault GODIN et Ines KLIMANN.  
“Reversible Mealy automata of prime size cannot generate infinite Burnside groups”.  
41st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2016).  
Leibniz International Proceedings in Informatics **t. 58** (2016) 44:1–44:14.  
cité pages 30, 31.
- [80] Rostislav I. GRIGORCHUK.  
“On Burnside’s problem on periodic groups”.  
Akademiya Nauk SSSR. Funktsional’nyĭ Analiz i ego Prilozheniya **14-1** (1980) 53–54.  
cité page 32.
- [81] Rostislav I. GRIGORCHUK.  
“Semigroups with cancellations of degree growth”.  
Matematicheskie Zametki **43-3** (1988) 305–319.  
cité page 5.
- [82] Rostislav I. GRIGORCHUK, Volodymyr V. NEKRASHEVICH et Vitaly I. SUSHCHANSKIĬ.  
“Automata, dynamical systems, and groups”.  
Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova. Rossiiskaya Akademiya Nauk  
**231** (2000) 134–214.  
cité page 5.
- [83] Alexander HESS.  
“Factorable monoids: resolutions and homology via discrete Morse theory”.  
Thèse de Doctorat. Univ Bonn, 2012.  
URL : <http://hss.ulb.uni-bonn.de/2012/2932/2932.pdf>  
cité page 84.
- [84] Alexander HESS et Viktoriya OZORNOVA.  
“Factorability, string rewriting and discrete Morse theory”.  
URL : <http://arxiv.org/abs/1412.3025>  
cité page 84.
- [85] Michael HOFFMANN.  
“Automatic semigroups”.  
Thèse de Doctorat. Univ Leicester, 2001.  
cité pages 77, 81, 84.
- [86] James E. HUMPHREYS.  
*Reflection groups and Coxeter groups.*  
Cambridge Studies in Advanced Mathematics, volume 29.  
Cambridge University Press, 1990.  
cité page 48.

- [87] David A. JACKSON.  
“Decision and Separability Problems for Baumslag-Solitar Semigroups”.  
International Journal of Algebra and Computation **12-1-2** (2002) 33–49.  
cité page 67.
- [88] Emmanuel JEANDEL et Michaël RAO.  
“An aperiodic set of 11 Wang tiles”.  
URL : <http://arxiv.org/abs/1506.06492>  
cité page 12.
- [89] Jarkko KARI.  
“The Nilpotency Problem of One-Dimensional Cellular Automata”.  
SIAM J. Comput. **21-3** (1992) 571–586.  
cité page 13.
- [90] Jarkko KARI.  
“A small aperiodic set of Wang tiles”.  
Discrete Mathematics **160** (1996) 259–264.  
cité page 12.
- [91] Jarkko KARI et Nicolas OLLINGER.  
“Periodicity and immortality in reversible computing”.  
33rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2008).  
Lecture Notes in Computer Science **t. 5162** (2008) 419–430.  
cité page 15.
- [92] Ines KLIMANN.  
“Automaton semigroups: the two-state case”.  
Theory of Computing Systems **58-4** (2014) 1–17.  
cité pages 5, 11, 30, 38.
- [93] Daan KRAMMER.  
“An asymmetric generalisation of Artin monoids”.  
Groups Complexity Cryptology **5** (2013) 141–168.  
cité page 84.
- [94] Dietrich KUSKE.  
“Divisibility monoids: presentation, word problem, and rational languages”.  
13th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT 2001).  
Lecture Notes in Computer Science **t. 2138** (2001) 227–239.  
cité pages 86, 87.
- [95] Yaroslav LAVRENYUK, Volodymyr MAZORCHUK, Andriy OLIYNYK et Vitaly I. SUSH-  
CHANSKIĬ.  
“Faithful group actions on rooted trees induced by actions of quotients”.  
Communications in Algebra **35-11** (2007) 3759–3775.  
cité pages 75, 88.
- [96] Bastien LE GLOANNEC.  
“The 4-way deterministic Periodic Domino Problem is undecidable”.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00985482>  
cité page 12.

- 
- [97] Eon-Kyung LEE et Sang-Jin LEE.  
“Periodic elements in Garside groups”.  
Journal of Pure and Applied Algebra **215-10** (2011) 2295–2314.  
cité page 52.
- [98] Sang Jin LEE.  
“Garside groups are strongly translation discrete”.  
Journal of Algebra **309-2** (2007) 594–609.  
cité page 62.
- [99] Roger C. LYNDON et Paul E. SCHUPP.  
*Combinatorial group theory*.  
Springer-Verlag, 1977.  
cité page 72.
- [100] Anatoly I. MALCEV.  
“On the immersion of an algebraic ring into a field”.  
Mathematische Annalen **113-1** (1937) 686–691.  
cité page 86.
- [101] Anatoly I. MALCEV.  
“Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen”.  
Matematicheskii Sbornik **6 (48)** (1939) 331–336.  
cité page 86.
- [102] Anatoly I. MALCEV.  
“Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen. II”.  
Matematicheskii Sbornik **8 (50)** (1940) 251–264.  
cité page 86.
- [103] Victor D. MAZUROV et Evgeny I. KHUKHRO.  
“Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook.”  
URL : <http://arxiv.org/abs/1401.0300>  
cité pages 75, 76.
- [104] Jon MCCAMMOND.  
“Algorithms, Dehn functions, and automatic groups.”  
URL : <http://sites.google.com/a/scu.edu/rscott/pggt>  
cité pages 61, 70.
- [105] Stephen MESKIN, Alfred PIETROWSKI et Arthur STEINBERG.  
“One-relator groups with center”.  
Journal of the Australian Mathematical Society **16** (1973) 319–323.  
cité page 71.
- [106] Yevgen MUNTYAN et Dmytro SAVCHUK.  
*AutomGrp – GAP package for computations in self-similar groups and semigroups, V. 1.2.4*.  
URL : <http://www.gap-system.org/Packages/automgrp.html>  
cité pages 25, 31, 37.

- [107] Georges NEAIME.  
“Monoïdes et représentations linéaires des groupes de tresses de type  $(e, e, r)$ ”.  
Thèse de Doctorat. Univ Caen Normandie, en cours.  
cité page 54.
- [108] Volodymyr V. NEKRASHEVYCH.  
*Self-similar groups*.  
Mathematical Surveys and Monographs, volume 117.  
American Mathematical Society, 2005.  
cité page 7.
- [109] Bernhard B. NEWMAN.  
“Some results on one-relator groups”.  
Bulletin of the American Mathematical Society **74** (1968) 568–571.  
cité page 72.
- [110] Stepan Yu. OREVKOV.  
“On commutator subgroups of Artin groups”.  
Doklady Mathematics **85-1** (2012) 117–119.  
cité page 52.
- [111] Viktoriya OZORNOVA.  
“Factorability, discrete Morse theory, and a reformulation of  $K(\pi, 1)$ -conjecture”.  
Thèse de Doctorat. Univ Bonn, 2013.  
URL : <http://hss.ulb.uni-bonn.de/2013/3117/3117.pdf>  
cité page 84.
- [112] Alfred PIETROWSKI.  
“The isomorphism problem for one-relator groups with non-trivial centre”.  
Mathematische Zeitschrift **136** (1974) 95–106.  
cité pages 61, 70, 71.
- [113] Victor REINER.  
“Non-crossing partitions for classical reflection groups”.  
Discrete Mathematics **177-1-3** (1997) 195–222.  
cité pages 48, 51.
- [114] Wolfgang RUMP.  
“Decomposition of Garside groups and self-similar  $L$ -algebras”.  
Journal of Algebra **485** (2017) 118–141.  
cité page 61.
- [115] Dmytro SAVCHUK et Said N. SIDKI.  
“Affine automorphisms of rooted trees”.  
Geometriae Dedicata **183-1** (2016) 195–213.  
cité page 35.
- [116] Dmytro SAVCHUK et Yaroslav VOROBETS.  
“Automata generating free products of groups of order 2”.  
Journal of Algebra **336-1** (2011) 53–66.  
cité pages 7, 25.

- 
- [117] Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER.  
“Pour le monoïde plaxique”.  
Mathématiques et Sciences Humaines **140** (1997) 5–10.  
cité page 87.
- [118] Hervé SIBERT.  
“Extraction of roots in Garside groups”.  
Communications in Algebra **30-6** (2002) 2915–2927.  
cité page 62.
- [119] Pedro V. SILVA et Benjamin STEINBERG.  
“On a class of automata groups generalizing lamplighter groups”.  
International Journal of Algebra and Computation **15-5-6** (2005) 1213–1234.  
cité page 14.
- [120] Neil J. A. SLOANE.  
*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.  
URL : <http://oeis.org>  
cité pages 30, 53.
- [121] Richard P. STANLEY.  
*Enumerative combinatorics. Volume 1*.  
Cambridge studies in advanced mathematics.  
Cambridge University Press, 1997.  
cité page 48.
- [122] Richard P. STANLEY.  
*Enumerative combinatorics. Volume 2*.  
Cambridge studies in advanced mathematics.  
Cambridge University Press, 1999.  
cité page 16.
- [123] Benjamin STEINBERG.  
“Testing spherical transitivity in iterated wreath products of cyclic groups”.  
URL : <http://arxiv.org/abs/0607563>  
cité page 37.
- [124] Benjamin STEINBERG, Mariya VOROBETS et Yaroslav VOROBETS.  
“Automata over a binary alphabet generating free groups of even rank”.  
International Journal of Algebra and Computation **21-1-2** (2011) 329–354.  
cité pages 19, 25.
- [125] Vladimir B. STYŠNEV.  
“Taking the root in the braid group”.  
Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya **42-5** (1978) 1120–1131.  
cité page 62.
- [126] Jenő SZÉP.  
“On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups”.  
Acta Universitatis Szegediensis **12** (1950) 57–61.  
cité page 61.

- [127] Mariya VOROBETS et Yaroslav VOROBETS.  
 “On a free group of transformations defined by an automaton”.  
 Geometriae Dedicata **124** (2007) 237–249.  
 cité pages 19, 25.
- [128] Mariya VOROBETS et Yaroslav VOROBETS.  
 “On a series of finite automata defining free transformation groups”.  
 Groups, Geometry, and Dynamics **4-2** (2010) 377–405.  
 cité pages 19, 25.
- [129] Hao WANG.  
 “Proving theorems by pattern recognition, II”.  
 Bell System Technical Journal **40-1** (1961) 1–41.  
 cité page 12.
- [130] Daniel T. WISE.  
 “A non-Hopfian automatic group”.  
 Journal of Algebra **180-3** (1996) 845–847.  
 cité page 76.
- [131] Guido ZAPPA.  
 “Sulla costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro”.  
 Atti del Secondo Congresso dell’Unione Matematica Italiana.  
 Rome EDIZIONI CREMONENSE, éd. (1942) 119–125.  
 cité page 61.

---

# Index

- Arbre de Schreier, 26
- Arbre orbital, 32
- Association Culik-Kari, 12
- Association Gillibert-Kari, 13
- Atome, 46
- Automate de Mealy, 6
- Automate dual, 6, 16, 25
- Automate inverse, 6
- Automate orbital, 32, 38
- Automate périodique, 14
- Automate permutif, 15
- Automate puissance, 17, 19, 26
- Automate reset, 6, 14
- Automate unidirectionnel, 14
- Autorepliable, chemin, 28
- Autosimilarité, 7, 75
  
- Biréversibilité, 6
  
- Complexité d'une normalisation, 78
- Conjugaison, 22, 62, 72
- Contraction d'une action, 25
  
- Diagramme en carrés, 78
- Diagramme en croix, 7
- Diviseur, 44, 79
- Dualité Garside, 43, 48–51, 54, 55, 57, 58
- Dualité Mealy, 6–8, 10, 16, 19, 25, 34, 82, 88
  
- Élément de Garside minimal, 46
- Éléments simples, 46
- Équivalence de Nerode, 8
- Exposant d'un élément, 69
- Extension HNN, 66
  
- Famille de Garside, 79
- Forme normale, 77
  
- Graphe en hélice, 19
- Graphe paginé, 17, 18
  
- Groupe automatique, 71
- Groupe autosimilaire, 7
- Groupe d'automate, 7
- Groupe de Pietrowski, 71
  
- Inversibilité, 6
  
- Mcm, 44, 79
- $m\partial$ -trivialité, 10
- $m\partial$ -réduction, 8, 22, 38
- Minimisation, 8
- Monoïde atomique, 46
- Monoïde de Garside, 44
- Monoïde-germe, 47, 54, 55, 58–60
  
- Normalisation, 77
- Normalisation quadratique, 78
- Norme, 46
  
- Pavage *cd*-déterministe, 12
- Pavage de Wang, 12
- Permutation échangeante, 16
- Pgcd, 44
- Ppcm, 44
- Primalité, 37
- Produit en arbre, 65
- Produit libre amalgamé, 62
  
- Rayon de transitivité, 37
- Repliable, arête, 28
- Repliable, chemin, 28
- Réversibilité, 6
- Rigidité, 21
  
- Semigroupe automatique, 71, 77
- Semigroupe autosimilaire, 7
- Semigroupe d'automate, 7
- Simplifiabilité, 44
  
- Transducteur de Thurston, 82
- Transitivité sphérique, 37