Algorithmique – Maîtrise
TD 2 : Parcours - Tri Topologique

Isabelle Fagnot, Mihaela Sighireanu, Yan Jurski, Olivier Serre

Exercice 1 :

1. Quel type de parcours est-il préférable d'utiliser (une seule fois) pour les problèmes suivants :
   (a) trouver un circuit s'il en existe, et renvoyer « faux » sinon.
   (b) trouver un circuit de longueur minimale contenant un sommet donné, ou renvoyer « faux » s'il n'en existe pas.
2. Le programme suivant se veut être une solution de a). Malheureusement, il ne trouve pas toujours un cycle et parfois il trouve un cycle qui n'en est pas un. Expliquer pourquoi et corriger l'algorithme pour résoudre le problème

```
  Variables Globales:
    booleen marquage[V] initialisé à faux
    sommets source[V] initialisé à null

  Debut :

    Variable locale sommet v
    Prendre un sommet v
    cherche_cycle(v)
    retourner ‘‘pas de cycle’’
  Fin

****************************************

  Procedure cherche_cycle(sommet v)

  Variable locale sommet x,y

  Debut:
    marquage[v]=vrai
    pour chaque voisin x de v faire
      si marquage[x]==faux faire
         source[x]=v
         cherche_cycle(x)
      sinon faire
         afficher ‘‘cycle trouve’’
         afficher x
         y=source[x]
         tant que (y!=x) faire
            afficher(y)
            y=source[y]
         fin tant que
         s’arreter
      fin sinon
    fin du pour

  Fin
```

3. Écrivez une solution pour l'autre problème et montrer :
   - qu'elle termine ;
   - que, si on calcule un chemin, celui-ci correspond bien à ce que l'on cherche ;
   - que, si le chemin recherché existe, l'algorithme le trouve.
4. Les trois points précédents sont-ils suffisants pour assurer que les algorithmes sont corrects ?

Exercice 2 : (Tri topologique)

Un ordre total $<$ sur les sommets d'un graphe G orienté SANS CYCLE est dit topologique si, lorsqu'il existe un arc (s, s') dans G, alors on a $s < s'$.

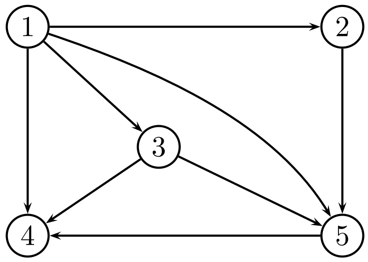

Fig. 1 – Un graphe orienté

1. Un homme d'affaire très pressé, doit s'habiller en quatrième vitesse pour ne pas manquer son avion. Il ne doit bien sûr oublier aucun vêtement parmi les suivants : caleçon, pantalon, ceinture, cravate, chemise, chaussettes, veste, montre et chaussures. Il ne peut bien sûr pas enfiler son pantalon ni mettre ses chaussures avant son caleçon. Les chaussettes doivent être mise avant les chaussures. La chemise doit être mise avant la cravate et la ceinture (qui ne peut être mise avant le pantalon). Enfin, la veste ne peut être enfilée tant qu'il n'a pas sa cravate et sa ceinture.

   Exprimer ces dépendances à l'aide d'un graphe. Comment notre homme d'affaire peut-il faire pour s'habiller sans se tromper ?
2. Proposez un algorithme de tri topologique basé sur un parcours en profondeur.
3. Exécuter l'algorithme sur le graphe de la figure 1.
4. On cherche à présent un algorithme different. Pour cela considérez le nombre d'arcs incidents à chaque sommet, et ce qui se passe quand on retire un sommet du graphe. En déduire un algorithme qui rangera dans une file les sommets dans un ordre topologique.
5. Montrez que votre algorithme termine.
6. Montrer que tous les sommets finissent dans la file.
7. Montrer que votre algorithme est correct.

Exercice 3 : On cherche à calculer l'ensemble des sommets atteignables à partir d'un sommet donné dans un graphe $G = (V, E)$. Proposez une solution. Symétriquement on cherche à présent l'ensemble des sommets qui permettent d'atteindre un sommet donné. Alors ?