Arithmétique entière des ordinateurs (représentation)

Écriture décimale : écriture positionnelle.
Ex : $128 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

Circuit en logique binaire $\Rightarrow$ Écriture binaire (base 2)
Ex : $(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

En particulier : Entiers $=$ mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$
(les chiffres binaires sont appelés bits pour **b**inary dig**it**s)

En pratique : Entiers mots de longueur fixe (T)

Selon les machines/constructeurs : T vaut 16, 32 voire 64 ou même 128.

Un entier « machine » est un mot :

$$b_{\mathsf{T}-1} b_{\mathsf{T}-2} \dots b_1 b_0$$

où $b_i \in \{0, 1\}$

Ex : $(0000001000000001)_2 = 1 \times 2^9 + 1 \times 2^0$

Note : il y a 2^N mots différents de longueur N sur un alphabet à deux éléments $\Rightarrow 2^N$ entiers différents représentables (lesquels ?)

Arithmétique entière des ordinateurs (opérations)

Table d'addition :

$+$	$(0)_2$	$(1)_2$
$(0)_2$	$(00)_2$	$(01)_2$
$(1)_2$	$(01)_2$	$(10)_2$

Ex :

$$\begin{array}{rr} & (1000010000000001)_2 \\ + & (1000000000000001)_2 \\ \hline & (1000001000000010)_2 \end{array}$$

Table de multiplication :

$\times$	$(0)_2$	$(1)_2$
$(0)_2$	$(0)_2$	$(0)_2$
$(1)_2$	$(0)_2$	$(1)_2$

Ex :

$$\begin{array}{rr} & (0011)_2 \\ \times & (0010)_2 \\ \hline & (0000)_2 \\ + & (0011.)_2 \\ + & (0000..)_2 \\ + & (0000...)_2 \\ \hline & (0000110)_2 \end{array}$$

Problème : débordement de la représentation ou dépassement de capacité

Arithmétique entière des ordinateurs (autres bases)

Binaire : base 2 Deux chiffres : 0 et 1

Octal : base 8 Huit chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7

Héxadécimal : base 16

Seize chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F

Conversions par « re(dé)groupement »

Ex : $(101)_2=(5)_8=(0101)_2=(5)_{16}$

$(111101010000)_2=(7520)_8=(F50)_{16}$

Exercices

- Soustraire deux nombres en base 2
- Additionner deux nombres en base 16
- Mutiplier deux nombres en base 8
- Convertir un nombre en base 16 en base 8
- Écrire en pseudo-langage/C-- une fonction qui prend un tableau de caractères représentant un nombre écrit en base 8 et renvoie la valeur de type Entier correspondante : {'7','3'}$\longrightarrow$59)

Exercices (suite)

● Écrire en pseudo-langage/C-- des fonctions de conversions entre les différentes bases (2, 8 et 16). Les nombres étant représentés par des tableaux de caractères.

● Quels sont les mots sur 0,1 représentant des nombres multiples de 2, de 4, de 2^p. Écrire une fonction (pseudo/C--) qui renvoie vraie si le nombre représenté comme tableau de caractères est un mutiple de 2^p. La fin du nombre est marquée par le caractère d'espace.

● En base 16, comment sont les mots représentant des multiples de 16 ?

Arithmétique entière des ordinateurs (nombres négatifs)

Écriture décimale signée : écriture positionnelle $+$ signe

Ex : $-128 = -1 \times (1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0)$

Problème : -0 et $+0$, deux mots différents pour le même nombre !

Pas de symbole supplémentaire en machine ! $\Rightarrow$ Un choix parmi de nombreuses possibilités, dont :

- utilisation d'une des lettres du mot pour le signe, il n'y a que 2 signes. Problème : deux représentations $\neq$ pour 0 ;
- utilisation d'une base exotique (négative ou complexe). Problème : c'est exotique ;
- représentation complémentée. Problème : $\neq$ selon la complémentation choisie.

En pratique : complément à 2.

Arithmétique entière des ordinateurs (complément à 2)

Pas de signe explicite !

Nombre de longueur $n \Rightarrow$ calculs modulo 2^n

$$x + (-x) = 0 \bmod 2^n$$

Ex :

$(00000000)_2+(00000000)_2=(00000000)_2=0 \bmod 2^8$

$(00000001)_2+(11111111)_2=(100000000)_2=0 \bmod 2^8$

De façon arbitraire :

chiffre à gauche $= 0$, alors nombre positif, négatif sinon

Ex : $(11111111)_2$=-1, $(01111111)_2$=127

L'opération d'addition s'effectue comme sur les nombres non signés

Exercices

Sur les nombres de 8 bits, et en complément à 2 :

- Calculer les inverses de 35, -89, 127 et -128
- Calculer les sommes (-3)+(-7), (-127)+(-1), (127)+(1).

Pourquoi certaines machines permettent-elles de savoir si il y a eu un débordement sur l'avant dernier bit ?

- Comment calculer une soustraction ?

Arithmétique réelle des ordinateurs (représentation)

Basée sur la notation scientifique

Ex : Nombre d'*Avogadro* $\simeq 6.022 \times 10^{23}$

Il suffit d'enregistrer la mantisse et l'exposant

Sur machine on utilise très souvent la norme IEEE 754

Un nombre réél flottant est un triplet (s, e, m) où :

- s désigne le signe (0 si positif, 1 si négatif) ;
- e est l'exposant par excès de la base ;
- m est la mantisse normalisée.

L'excès (q) et la base (b) sont implicitement connus ainsi :

$$(s, e, m) = -1^s \times m \times b^{(e-q)}$$

Le mot (s, e, m) est de taille fixe

Pour IEEE 754 on a :

	$\|s\|$	$\|e\|$	$\|m\|$	q	Taille totale
Simple Précision	1	8	23	127	32
Double Précision	1	11	52	1023	64

Arithmétique réelle des ordinateurs (représentation)

Pour la simple précision, le mot

$$se_7 \dots e_0 m_{22} m_{21} \dots m_1 m_0$$

représente le nombre

$$-1^s \times 1, m_{22} m_{21} \dots m_1 m_0 \times 2^{e-127}$$

On dit que la mantisse est normalisée

Ex : Le nombre $0,25$ s'écrit $(0,01)_2$ soit
`00111110100000000000000000000000`

Note : 0 n'est pas représentable ! ! ! Diverses conventions permettant de représenter 0 et les « infinis ».

Arithmétique réelle des ordinateurs (opérations)

L'addition consiste en :

1. l'alignement des exposants (le plus petit sur le plus grand) ;
2. addition des mantisses ;
3. puis renormalisation.

Attention : l'alignement peut conduire à perdre des bits de la mantisse.

Arithmétique réelle des ordinateurs (problèmes)

On ne représente pas tous les réels ($\mathbb{R}$ n'est pas énumérable)

La distribution des réels « machine » sur $\mathbb{R}$ n'est pas uniforme

Les opérations ne sont pas exactes : $(a + b) + c$ n'est pas toujours égal à $a + (b + c)$

Tester l'égalité de deux réels est dangereux

La distance entre deux réels représentables n'est pas toujours représentable

Exercices

- Représenter en simple précision les nombres $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{3}$ (on sait que $\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$) et 2^{30}.
- Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, $2^{30} + 1$.
- Que penser du fragment de programme suivant :

```
Variable a : réél;
Pour a allant de 2^30 à 2^31 par pas de 1 faire quelque chose
```

- Combien de réels peuvent être représentés en simple (double) précision ?
- Quel est le plus petit (grand) réél représentable ?