Présentation d'un TRE en Master 1 Ingénierie Informatique de Paris 7

Titre Reconnaissance des graphes sans *bull*

Laboratoire *Liafa*

Nom et coordonnées du responsable du suivi du stagiaire *Fabien de Montgolfier* `fm@liafa.jussieu.fr`

Classes de graphes

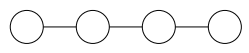
On peut définir de nombreuses *classes de graphes*, qui sont des sous-ensembles de la classe de tous les graphes.

Beaucoup de classes sont définies par *sous-graphes exclus*. Par exemple, la classe des graphes bipartis est définie comme ayant tous les cycles de longeur impaire comme sous-graphes interdits. Bien entendu, on peut la définir autrement (on peut colorier les sommets en blanc et noir de sorte que toutes les arêtes touchent des sommets des deux couleurs).

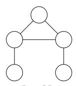
Plus formellement, le graphe G *exclut* le graphe H si H n'est pas un sous-graphe induit de G. Si $\mathcal{H}$ est un ensemble de graphes, G exclut $\mathcal{H}$ s'il exclut tout graphe de $\mathcal{H}$. Tous les graphes vérifiant cette propréte forment la classe des graphes qui excluent $\mathcal{H}$.

On remarquera que pour les bipartis, le nombre de sous-graphes exclus est infini. Mais certaines classes sont définies par un nombre *fini* de sous-graphes exclus.

Donnons deux exemples. La classe des *graphes sans triangle* est la classe de graphes où trois sommets se sont jamais voisin deux à deux. Et la classe des *cographes* est la classe des graphes où P_4 est exclu.



P_4



bull

Algorithmes de reconnaissance

Soit $\mathcal{C}(H)$ la classe des graphes où H est exclu (on exclut donc un seul graphe). Par exemple $\mathcal{C}(P_4)$ est la classe des cographes. Si H possède k sommets, on peut facilement reconnaître si un graphe G, de n sommets, appartient à la classe $\mathcal{C}(H)$, en temps $O(n^k)$. L'algorithme est

```
Pour tout ensemble de k sommets de G
  regarder si ces sommets induisent le graphe H
```

On peut donc reconnaître les cographes en $O(n^4)$ et les graphes sans triangle en $O(n^3)$. Mais on peut faire mieux ! Par exemple, pour les graphes sans triangle, on peut faire

```
Pour toute arete (u,v)
  Si u et v ont un voisin commun
    Retourner faux
Retourner vrai
```

qui est en $O(nm)$. Ce qui est moins que $O(n^3)$ car les graphes sans triangle ont peu d'arêtes. Pour les cographes, il existe même des algorithmes *linéaires*, en $O(n + m)$! Ces algorithmes sont relativement sophistiqués.

Objectif du stage

Or, pour la classe des graphes sans bull, il n'existe pas, à notre connaissance, d'algorithme en temps meilleur que $O(n^5)$.

Le but de ce TER est de réfléchir à l'existence d'un algorithme de complexité meilleure. Et de le programmer, le cas échéant.

Cela est motivé par le fait que Bull (le taureau) apparaît souvent dans les problèmes de graphes parfait, et que de nombreuses sous-classes de cette classe sont connues.